

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son aquellas que están conformadas por la función incógnita y su derivada. La importancia de estas en el campo de la ingeniería radica en que muchos fenómenos físicos se formulan matemáticamente en términos de su cambio proporcional o razones de cambio; es decir las ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1: $\frac{du}{dt} = -0,27(u - 60)^{(u-60)}$ describe de manera aproximada la razón de cambio de la temperatura u de un cuerpo que pierde calor por convección natural en un entorno con temperatura cambiante.

Ejemplo 2: $\frac{dx}{dt} = -kx$ representa la ecuación de la desintegración radiactiva, donde la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia no desintegrada.

En la ecuación diferencial, a la cantidad que se va a diferenciar, se la conoce con el nombre de **variable dependiente**, mientras que la cantidad respecto a la cual se va a derivar se denomina **variable independiente**.

Las ecuaciones diferenciales que serán objeto de estudio son aquellas en las que la función incluye una variable independiente, por lo cual se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO) [que está en contraste con las ecuaciones diferenciales parciales que comprenden dos o más variables independientes].

La solución de una ecuación diferencial es la función que satisface la ecuación diferencial y también ciertas condiciones iniciales sobre la función. Al resolver analíticamente una ecuación diferencial suele encontrarse una solución general que contiene constantes arbitrarias y luego se evalúan las constantes arbitrarias de modo que la expresión coincida con las condiciones iniciales.

Por ejemplo: Suponga que únicamente posee la siguiente ecuación diferencial, sin ninguna información sobre condiciones iniciales

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

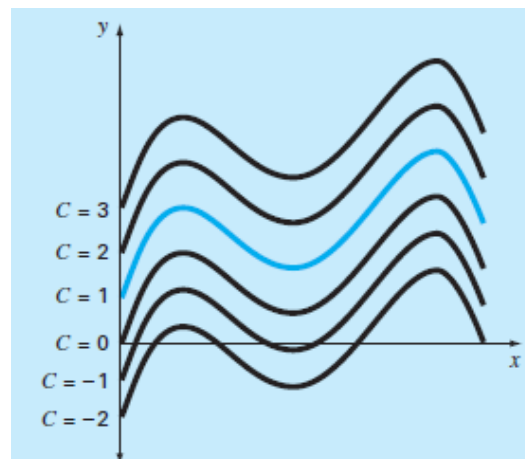
Este polinomio expresa la razón de cambio de y con respecto a x ; es decir su pendiente. Como se expresó anteriormente, resolver esta ecuación diferencial significa encontrar la función original, entonces aplicando la regla de integración sobre

$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5) dx$$

Nos proporcionará el siguiente resultado

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

Donde la constante C denominada Constante de Integración, indica que la solución no es única, más específicamente existe un conjunto infinito de soluciones que satisfacen la ecuación diferencial, tal como lo muestra el siguiente gráfico



Por lo tanto, para poder determinar de manera unívoca la solución que satisface esta ecuación diferencial, se requiere que sea acompañada por *las condiciones auxiliares*.

Si ud recuerda, el orden de la ecuación diferencial representa la máxima derivada de la función que figura en la ecuación. Entonces en este ejemplo la ecuación diferencial es de primer orden. Y resulta que, para las EDO de primer orden, se requiere un tipo de condición auxiliar, llamada **valor inicial**, para determinar la constante y obtener una solución única.

Si por ejemplo, para la ecuación diferencial que estamos evaluando resulta que la condición inicial es $x = 0; y = 1$, entonces reemplazando estos valores iniciales en la función obtenida al integral la ecuación diferencial obtenemos

$$1 = -0.5(0)^4 + 4(0)^3 - 10(0)^2 + 8.5(0) + C$$

Entonces resulta que $C = 1$, por lo cual gracias a estas condiciones de “Valor inicial” obtenemos una única función que satisface la ecuación diferencial

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Las condiciones iniciales por lo común tienen interpretaciones muy tangibles para las ecuaciones diferenciales surgidas de las condiciones de problemas físicos. Cuando tratamos con una ecuación diferencial de n -ésimo orden, se requiere de n condiciones para obtener una solución única. Si se especifican todas las condiciones en el mismo valor de la variable independiente (por ejemplo, en x o $t = 0$), entonces se conocen como problemas de valor inicial. En cambio, en los problemas de valor frontera, la especificación de condiciones ocurre con diferentes valores de la variable independiente.

Los métodos analíticos están limitados a ciertas formas especiales de ecuaciones. Los métodos numéricos no tienen tales limitaciones a sólo formas estándares. No obstante, la solución se obtiene como una tabulación de los valores de la función en varios valores de la variable independiente, y no como una relación funcional, y si cambian las condiciones iniciales es necesario volver a calcular toda la tabla.

Método de Euler

Comenzamos nuestro estudio con los métodos de Euler, los cuales son adecuados para una programación rápida debido a su sencillez. Debemos señalar que, cuando el sistema de ecuaciones es cada vez más complicado, se utilizan con más frecuencia los métodos de Euler. De hecho, una gran parte de los métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales parciales

parabólicas e hiperbólicas que son mucho más complicadas que las ecuaciones diferenciales ordinarias se basan en los métodos de Euler y no en los métodos de Runge-Kutta (que estudiaremos más adelante).

El objetivo del método de Euler es obtener una aproximación al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

Se generarán aproximaciones de y en varios puntos, denominados **puntos de red**, en el intervalo $[a, b]$. Hacemos la suposición de que los puntos de red están distribuidos uniformemente sobre este intervalo, y para ello escogemos un entero positivo n que determina el número de segmentos que conforman los puntos de red $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Y h es la distancia común entre los puntos, también denominado “Tamaño de paso”, por lo que

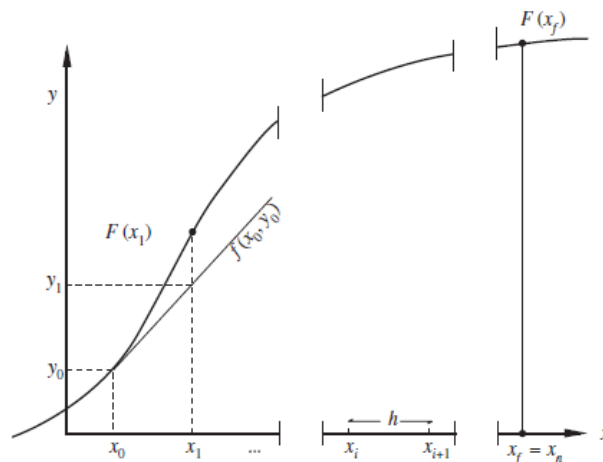
$$h = \frac{b - a}{n}$$

La condición inicial $y(a) = \alpha$ representa el punto $P_0(a, \alpha)$, el cual por simplicidad se escribirá como $P_0(x_0, y_0)$ y para mayor simplicidad aún será $F(x_0)$.

Entonces si contamos con la derivada $F'(x)$ y la condición de inicio P_0 ; a saber

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} \Big|_{P_0 = f(x_0, y_0)}$$

Con esta información se procede a trazar una recta pendiente en P_0 cuya pendiente es $f(x_0, y_0)$. Esta recta aproxima $F(x)$ en una vecindad de x_0 . Entonces podríamos plantearnos si es posible estimar el valor de y_1 para un x_1 . Esto se intenta reflejar en el siguiente gráfico



Donde se puede observar que

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Y entonces

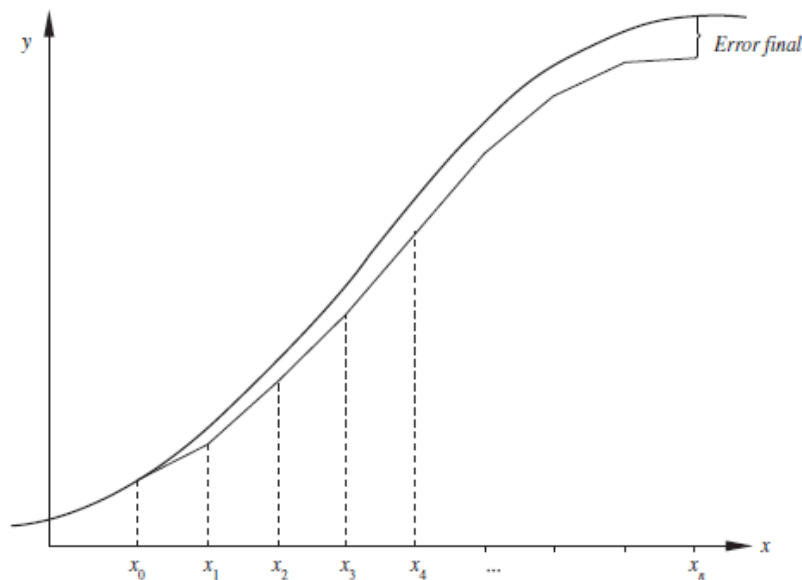
$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

Resulta evidente entonces que la ordenada y_1 , estimada de esta manera no es igual a $F(x_1)$, pues existe un error.

No obstante, con este valor y_1 es posible calcular $F'(x)$ en $P_1(x_1, y_1) = F(x_1)$ y repetir el procedimiento anterior con el objeto de obtener la sucesión de aproximaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h f(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + h f(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Por lo cual esta sucesión es realmente una fórmula de recurrencia para determinar una aproximación la curva $y = F(x)$ por medio de una serie de segmentos de línea recta, tal como lo expresa la siguiente imagen



Como se puede observar este método genera un error inherente al propio procedimiento. Este puede disminuirse de manera teórica tanto como se desee reduciendo el valor de h , y por lo tanto aumentando el número de segmentos n , pero esto generará un mayor número de cálculos y tiempo de máquina, provocando un aumento en el error de redondeo.

Las ecuaciones diferenciales son aquellas que están conformadas por la función incógnita y su derivada. La importancia de estas en el campo de la ingeniería radica en que muchos fenómenos físicos se formulan matemáticamente en términos de su cambio proporcional o razones de cambio; es decir las ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1: Resuelva

$$y' = -20y + 7e^{-0.5x}, y(0) = 5$$

por medio del método de Euler con $h = 0,01$ para $0 < x < 0,04$.

Los primeros cálculos con $h = 0,01$ son los siguientes

$$x_0 = 0, \quad y_0 = y(0) = 5$$

$$x_1 = 0.01, \quad y_1 = y_0 + hy'_0 = 5 + 0.01[-20(5) + 7e^0] = 4.07$$

$$x_2 = 0.02 \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 4.07 + 0.01[-20(4.07) + 7e^{-0.005}] = 3.32565$$

$$x_3 = 0.03 \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 3.32565 + 0.01[-20(3.32565) + 7e^{0.01}] = 2.72982$$

$$x_4 = 0.04 \quad y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 3.32565 + 0.01[-20(3.32565) + 7e^{0.015}] = 2.25282$$

Ejemplo 2: Resuelva el ejercicio del ejemplo 1 en un intervalo de $0 < x < 0,05$, comparando los resultados con la solución analítica

$$y = 5e^{-20x} + \frac{7}{19}(e^{-0.5x} - e^{-20x})$$

Para diferentes valores de h (0,01;0,001;0,0001)

Los resultados para los valores seleccionados de x , con tres valores de intervalos de tiempo se muestran en la tabla

x	$h = 0.01$	$h=0.001$	$h = 0.0001$	$y_{analítica}$
0.01	4.07000	4.14924	4.15617	4.158599697
0.02	3.32565	3.45379	3.46513	3.469395432
0.03	2.72982	2.88524	2.89915	2.904800415
0.04	2.25282	2.42037	2.43554	2.442228423
0.05	1.87087	2.04023	2.05574	2.063187419

Análisis del Error del método

La solución numérica de ecuaciones diferenciales incluye dos tipos de error:

- Errores de truncamiento causados por la naturaleza de los métodos empleados en la aproximación a los valores de y
- Errores de redondeo causados por el número limitado de dígitos o de cifras significativas que puede retener la computadora.

Los errores de truncamiento se componen de dos partes. La primera es un error de truncamiento local que resulta al aplicar el método en cuestión en un paso. El segundo es un error de programación que resulta de las aproximaciones producidas durante los pasos

anteriores. La suma de los dos es el error de truncamiento global. El conocimiento de la magnitud y propiedades del error de truncamiento se puede obtener de la expansión de la serie de Taylor. La serie de Taylor alrededor del punto inicial (x_i, y_i) es:

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i}{2!} h^2 + \dots + \frac{y_i^{(n)}}{2!} h^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad \text{donde } h = x_{i+1} - x_i$$

sabiendo que $y' = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + O(h^{n+1})$$

en donde $O(h^{n+1})$ especifica que el error de truncamiento local es proporcional al tamaño de paso elevado a la $(n + 1)$ – ésima potencia. El error de truncamiento en el método de Euler es atribuible a los términos restantes de la expansión que no se incluyen en la ecuación $y_{n+1} = y_n + hy'_n$. Por lo que

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 + \dots + O(h^{n+1})$$

Es el error de truncamiento local. Para una h lo suficientemente pequeña, los errores en los términos de la ecuación de E_a decrecen por lo común a medida que el orden crece, y el resultado, a menudo, se representa como

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2$$

O lo que es lo mismo $E_a = O(h^2)$, que es el error de truncamiento local aproximado.

El problema con este método bastante sencillo es su falta de exactitud, al requerir un tamaño de paso extremadamente pequeño. Esta técnica sería correcta sólo si la función fuese lineal.

Método Heun

Un motivo fundamental de error en el método de Euler es suponer que la derivada al inicio del intervalo es la misma durante todo el intervalo. Para mejorar la estimación de la pendiente Heun emplea la determinación de dos derivadas en el intervalo (una en el punto inicial y otra en el final). Las dos derivadas se promedian después con la finalidad de obtener una mejor estimación de la pendiente en todo el intervalo.

El método de Euler se utiliza para obtener una predicción intermedia denotada como

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

y que recibe el nombre de ecuación predictor o simplemente “Predictor”. El objetivo de esta ecuación será ahora brindar una estimación de y_{i+1} que permite el cálculo de una estimación de la pendiente al final del intervalo:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$

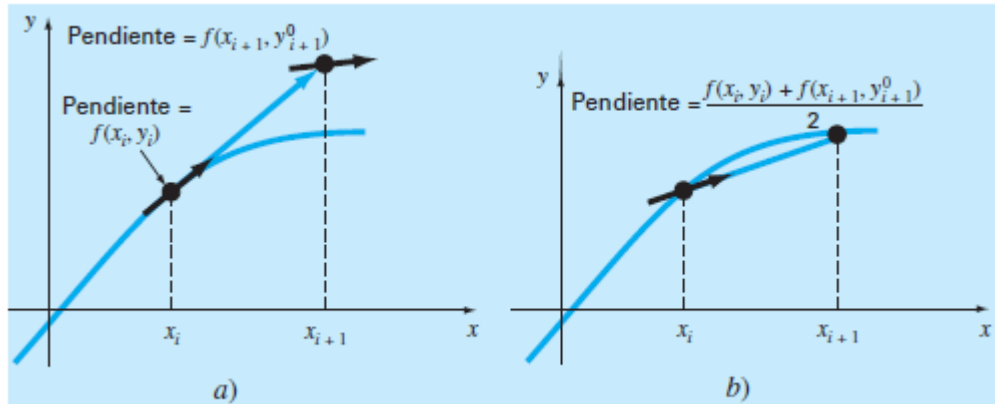
Por lo cual se puede estimar la pendiente promedio en el intervalo involucrado como

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Esta pendiente promedio se utiliza después para extrapolar linealmente desde y_i hasta y_{i+1} con el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Que se conoce con el nombre de Ecuación correctora o simplemente corrector. La interpretación gráfica de este método se muestra en la siguiente figura



Representación gráfica del método de Heun. a) Predictor y b) corrector.

El método Heun es un procedimiento predictor-corrector de un solo paso, que al igual que el método de Euler se puede aplicar de manera iterativa. Este proceso iterativo no necesariamente converge a la solución verdadera, sino que lo hará a una estimación con un error de truncamiento finito.

Ejemplo 3: Resuelva

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

Cuya condición inicial es $x=0, y=2$, por medio del método de Euler Heun con $h = 1$ para $0 < x < 4$. Considere que la solución analítica es

$$y = \frac{4}{1.3} (e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + 2e^{-0.5x}$$

Para poder evaluar el error que se comete.

Primero se evalúa la pendiente en (x_0, y_0) como

$$y'_0 = 4e^0 - 0.5(2) = 3$$

Segundo, se obtiene el valor del predictor usando el método de Euler

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Por lo que nos queda

$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

Ahora, para mejorar el estimado de y_{i+1} , se emplea este valor para predecir la pendiente al final del intervalo:

$$y'_1 = f(x_1, y_1^0) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164$$

que se combina con la pendiente inicial para obtener una pendiente promedio en el intervalo desde $x = 0$ hasta 1:

$$y' = \frac{3 + 6.402164}{2} = 4.701082$$

Dicho resultado se sustituye en el corrector para obtener la predicción en $x = 1$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h \quad (1)$$

Es decir

$$y_1 = 2 + 4.701082(1) = 6.701082$$

Lo cual generaría la siguiente tabla

x	$y_{\text{verdadero}}$	y_{Heun}	$ E_r (\%)$
0	2.0000000	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18
2	14.8439219	16.3197819	9.94
3	33.6771718	37.1992489	10.46
4	75.3389626	83.3377674	10.62

Pero este método tiene la particularidad de que puede mejorar o corregir la predicción de y_1 sustituyendo en (1) el nuevo resultado obteniendo en varias iteraciones

$$y_1 = 2 + \frac{[3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701082)]}{2} = 6.275811$$

$$y_1 = 2 + \frac{[3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.275811)]}{2} = 6.382129$$

Estas iteraciones algunas veces provocan que el error crezca conforme se llevan a cabo las iteraciones. Tales incrementos pueden ocurrir especialmente con grandes tamaños de paso, y nos previenen de llegar a una conclusión general errónea de que siempre una iteración más mejorará el resultado. No obstante, con tamaños de paso lo suficientemente pequeños, las iteraciones, a la larga, deberán converger a un solo valor. En nuestro caso, 6.360865, que representa un error relativo de 2.68%, que se obtiene después de 15 iteraciones. La siguiente tabla presenta los resultados del resto de los cálculos usando el método con 1 y 15 iteraciones por paso.

x	$y_{\text{verdadero}}$	Iteraciones del método de Heun			
		1		15	
		y_{Heun}	$ E_r (\%)$	y_{Heun}	$ E_r (\%)$
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18