Integración Numérica

Cuadraturas de Gauss-Lagendre

Ingeniería en Informática – Ingeniería en Minas – Licenciatura en Sistemas
Mg Ing Ariel Alejandro Vega

1

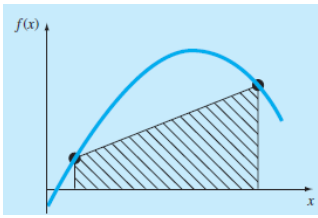
Motivación

- Los métodos de Newton – Cotes se aplican usando valores igualmente espaciados, previamente predeterminados o fijos.
- Esta situación afecta en la precisión del método aplicado.
- Los métodos de Gauss-Lagrende pretenden definir valores óptimos para aproximar la integral de la manera más precisa.
- Estos puntos de Lagendre constituyen las raíces del polinomio usado para interpolar la función a integrar.

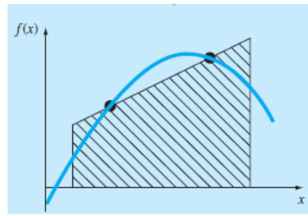
2

La idea

- Suponga la regla del Trapecio



- La integración con puntos de Lagendre



Los puntos de Lagendre no estará equidistanciados
No se podrán usar en los métodos de Newton-Cotes
El objetivo es minimizar el error

3

La idea

- La regla del Trapecio está dada por

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

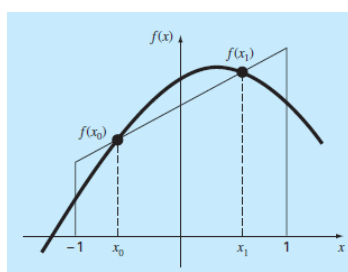
Con $h = (b-a)$

- La expresaremos como

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(a) + w_2 f(b)$$

Con $w_1 = w_2 = \frac{h}{2}$

- Suponga que se desea integrar en el intervalo [-1,1] entonces tendremos



- Donde w_1, w_2, x_0, x_1 son desconocidos, pero si se eligen adecuadamente la integral será EXACTA.

4

Método de coeficientes indeterminados

- Las condiciones w_1 y w_2 se obtienen al suponer que la función se ajusta con exactitud a la integral de una constante y de una función lineal.
- Las condiciones x_0 y x_1 se obtienen suponiendo se ajustan a la integral de una parábola y de una función cúbica.
- Entonces estas son las 4 ecuaciones que permiten obtener las condiciones.

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

5

Método de coeficientes indeterminados

- La resolución de estas ecuaciones determinan que:

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}5773503 \ldots$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773503 \ldots$$

- Que reemplazados en la formula de la regla del trapecio modificada se obtiene:

$$I \cong w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- Observe que esta suma de funciones tiene una exactitud de tercer grado.

¿Y si el intervalo es diferente?

Se plantea un cambio de variable. Se puede verificar que

$$x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2}$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d$$

Donde x_d está relacionada de manera lineal con x

6

Ejemplo

- Calcule mediante Gauss-Lagrende de 2 puntos la integral de

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 500x^5$$

Datos

a=0, b=0,8. Sol analítica= 1,640533

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} = \frac{0{,}8 + 0{,}8x_d}{2} = 0{,}4 + 0{,}4x_d$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2}dx_d = \frac{0{,}8}{2}dx_d = 0{,}4dx_d$$

- Reemplazando en la fórmula general

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [0.2 + 25(0.4+0.4x_d) - 200(0.4+0.4x_d)^2 + 675(0.4+0.4x_d)^3 - 900(0.4+0.4x_d)^4 + 400(0.4+0.4x_d)^5]0.4dx_d$$

7

Ejemplo

- La integral aproximada por Gauss-Lagendre para dos puntos es

$$I \cong w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- Donde evaluamos en la función ajustada:

$$= \int_{-1}^{1} [0.2 + 25(0.4+0.4x_d) - 200(0.4+0.4x_d)^2 + 675(0.4+0.4x_d)^3 - 900(0.4+0.4x_d)^4 + 400(0.4+0.4x_d)^5]0.4dx_d$$

Es decir $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}516741$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1{,}305837$

- Entonces:

$$I \cong 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$$

8

Ejemplo:Comparación – otros métodos

Regla del Trapecio = $I \cong 0.8\dfrac{0.2+0.232}{2} = 0.1728$ $\varepsilon_t = 89.5\%$.

Regla del Trapecio Múltiple=

n	h	I	$\varepsilon_t(\%)$
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

Simpson 1/3= $I \cong 0.8\dfrac{0.2+4(2.456)+0.232}{6} = 1.367467$ $\varepsilon_t = 16.6\%$

Gauss-Lagendre de 2 puntos= $I \cong 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$

Error relativo del 11,09%

Generalización del método

- Si desea utilizar más de dos puntos de Lagendre, es posible realizarlo usando la forma general del polinomio

$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_{n-1} f(x_{n-1})$

- Donde puede usar la siguiente tabla. La primera columna indica los factores de ponderación, mientras que la segunda el valor de los argumentos

Puntos	Factor de ponderación	Argumentos de la función
2	c_0 = 1.0000000 c_1 = 1.0000000	x_0 = −0.577350269 x_1 = 0.577350269
3	c_0 = 0.5555556 c_1 = 0.8888889 c_2 = 0.5555556	x_0 = −0.774596669 x_1 = 0.0 x_2 = 0.774596669
4	c_0 = 0.3478548 c_1 = 0.6521452 c_2 = 0.6521452 c_3 = 0.3478548	x_0 = −0.861136312 x_1 = −0.339981044 x_2 = 0.339981044 x_3 = 0.861136312
5	c_0 = 0.2369269 c_1 = 0.4786287 c_2 = 0.5688889 c_3 = 0.4786287 c_4 = 0.2369269	x_0 = −0.906179846 x_1 = −0.538469310 x_2 = 0.0 x_3 = 0.538469310 x_4 = 0.906179846
6	c_0 = 0.1713245 c_1 = 0.3607616 c_2 = 0.4679139 c_3 = 0.4679139 c_4 = 0.3607616 c_5 = 0.1713245	x_0 = −0.932469514 x_1 = −0.661209386 x_2 = −0.238619186 x_3 = 0.238619186 x_4 = 0.661209386 x_5 = 0.932469514

Ejemplo

- La integral aproximada por Gauss-Lagendre para tres puntos es

$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$
$= 0.5555556 f(-0{,}774596669) + 0{,}8888889 f(0) + 0{,}5555556 f(-0{,}774596669)$

- Donde evaluamos en la función ajustada:

$$= \int_{-1}^{1} [0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5] 0.4 dx_d$$

- Entonces:

$$I = 0.2813013 + 0.8732444 + 0.4859876 = 1.640533$$

que es exacta.