EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición:

Una expresión algebraica es la **combinación de números reales y letras** por medio de diversas operaciones. Las letras representan *variables* o *indeterminadas (parte literal)* que toman valores sobre el conjunto de los números reales y los números constituyen valores *constantes (coeficientes).*

Ejemplos:

- $3a^2 - 2b^{-1} + \frac{\sqrt{2c}}{b}$
- $\frac{5}{b^2} - \frac{2a^3}{c^2} + 4a^{-3} + \sqrt{b.c}$

Clasificación:

Las expresiones algebraicas se clasifican según las operaciones que se apliquen en: **racionales** e **irracionales.**

Una expresión algebraica es racional cuando ninguna de sus letras figura bajo un signo radical o con exponente fraccionario, y a su vez se clasifican en **enteras** y **fraccionarias.**

- Una expresión algebraica es entera si sus letras están relacionadas únicamente por suma, resta, multiplicación y potenciación con exponente entero no negativo (es decir incluye el exponente cero "0").
- Una expresión algebraica es fraccionaria si hay en ella una letra que figura como divisor en un cociente o como base de una potencia con exponente entero negativo.

Una expresión algebraica es irracional si hay en ella como mínimo una letra sometida a la operación de radicación o figura como base de una potencia con exponente fraccionario.

Ejemplos:

$2a + b$	Expresión algebraica racional entera
$\frac{4b^2+5a}{c}$	Expresión algebraica racional fraccionaria
$\sqrt{a} + b^{1/3} + 2ac$	Expresión algebraica irracional

Nota: el dominio de una expresión algebraica está formado por números reales que, cuando se sustituyen en las variables, hacen que la expresión tenga significado y de por resultado un número real (valor numérico).

Expresiones algebraicas enteras

Monomios

Se llama monomio a toda expresión algebraica racional entera, formada por un número y por una o varias variables, ligados únicamente por las operaciones de multiplicación y potenciación.

Los monomios están formados por un **coeficiente** y una **parte literal**. El coeficiente es el número que resulta de multiplicar los factores representados por cifras, y la parte literal es el producto indicado de sus letras.

Se denomina grado de un monomio a la suma de los exponentes de las variables que lo forman.

Se dice que dos o más monomios son **semejantes** cuando la parte literal está formada por las mismas letras afectadas por los mismos exponentes y ligadas por las mismas operaciones, es decir, cuando sólo difieren en los coeficientes.

Ejemplos:

a) $5.a^3.c.b^6$ b) $-4.a.b^2$ c) $\frac{1}{2}.a^3.(-2).5.c.b^6$

Los coeficientes de estos monomios son: 5, -4 y -5 respectivamente.

Las partes literales de estos monomios son: a^3cb^6; ab^2; a^3cb^6 respectivamente.

Los monomios son de grado 10, 3 y 10 respectivamente y los monomios a) y c) son semejantes.

Dos monomios son **iguales** cuando son iguales sus coeficientes y tienen la misma parte literal.

Polinomios

Se denomina polinomio a la combinación de sumas y restas de monomios. Es decir, es una suma algebraica de términos, cada uno de los cuales consta de un coeficiente numérico o constante, multiplicado por una cierta potencia de la o las variable/s.

Ejemplo: $2a^5b + 5a^3 + 4a^5b^3$

A los polinomios de dos términos se los conoce con el nombre de *binomio*; a los de tres términos con el nombre de *trinomio*; a los de cuatro como *cuatrinomio*, a los de cinco como *polinomio de 5 términos* y así sucesivamente.

En general un polinomio en una variable o indeterminada *x*, se puede escribir de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a$$

Donde $\boldsymbol{a_i}$ son los coeficientes con $i = 1, 2, \ldots, n$ y, **x** es la variable.

Ejemplo: $P(x) = 4x^7 + 2x^5 + 3$

Se llama **grado de un polinomio** al grado del término de mayor grado que lo constituye.

Ejemplos:

$P(x) = 4x^7 + 2x^5 + x + 1$ es un polinomio de grado 7

$Q(x) = x + x^3 + 7 + x^2$ tiene grado 3.

El coeficiente del término que determina el grado del polinomio se llama **coeficiente principal**.

En los ejemplos anteriores los coeficientes principales para el polinomio P(x) es 4 y para el polinomio Q(x) es 1.

Un polinomio está **ordenado** cuando lo está respecto a las potencias crecientes o decrecientes de las variables.

Ejemplos:

$P(x) = 4x^7 + 2x^5 + x + 1$ es un polinomio ordenado.

$Q(x) = x + x^3 + 7 + x^2$ es un polinomio desordenado

Un polinomio está **completo** cuando están todas las potencias de la variable.

Ejemplos:

$P(x) = 4x^7 + 2x^5 + x + 1$ es un polinomio incompleto, ya que no aparecen todas las potencias de x.

$Q(x) = x + x^3 + 7 + x^2$ es un polinomio completo, ya que aparecen, con coeficientes no nulos, todas las potencias de x.

<u>Valor numérico de un polinomio</u>

Se llama valor numérico de un polinomio P(x) en $x = b$ al número que resulta de reemplazar en el polinomio la variable x por el número b: P(b).

Ejemplo: el valor numérico del polinomio $P(x) = 5x^2 + 2x + 3$ para $x = 1$ es 10 y resulta de reemplazar en el polinomio "x" por 1:

$P(1) = 5.1^2 + 2.1 + 3 = 10$

Raíz o cero de un polinomio

Una constante a se llama raíz de un polinomio P(x) si sustituida en lugar de la variable x, confiere valor cero al polinomio, es decir lo anula. $P(a) = 0$

Ejemplo: dado el polinomio $P(x) = x^2 + 5x - 6$ determinar si $a = 1$ es raíz de P(x)

$P(1) = 1^2 + 5.1 - 5 = 0 \Rightarrow a\ es\ raíz\ de\ P(x)$

Operaciones con expresiones algebraicas

Suma y resta de polinomios

Dados los polinomios P(x) y Q(x), se llama suma (o resta) de los mismos y se indica con $P(x) + Q(x)$ para el caso de la suma y $P(x) - Q(x)$ para la resta, al polinomio cuyos coeficientes se obtienen sumando (o restando) los términos semejantes.

Ejemplo:

- Sean $P(x) = 7x^4 - 3x + \frac{3}{5}$ y $Q(x) = \frac{2}{3}x^5 + 5x^4 + 2x^2 - x + 1$ determinar $P + Q$ y $P - Q$.

$$P(x) + Q(x) = \left(7x^4 - 3x + \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}x^5 + 5x^4 + 2x^2 - x + 1\right)$$

$$= 7x^4 - 3x + \frac{3}{5} + \frac{2}{3}x^5 + 5x^4 + 2x^2 - x + 1$$

$$P(x) + Q(x) = \frac{2}{3}x^5 + 12x^4 + 2x^2 - 4x + \frac{8}{5}$$

$$P(x) - Q(x) = \left(7x^4 - 3x + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2}{3}x^5 + 5x^4 + 2x^2 - x + 1\right)$$

$$= 7x^4 - 3x + \frac{3}{5} - \frac{2}{3}x^5 - 5x^4 - 2x^2 + x - 1$$

$$P(x) - Q(x) = -\frac{2}{3}x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 2x - \frac{2}{5}$$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios se efectúa, término a término, aplicando la propiedad distributiva del producto.

Ejemplos:

- Multiplicar el polinomio $P(x) = x^2 + 5x - 4$ por el monomio $2x$

Se multiplicará cada término del polinomio por el monomio y luego se sumarán los productos:

$$(x^2 + 5x - 4).(2x) = 2x^3 + 10x^2 - 8x$$

- Multiplicar los polinomios P(x) y Q(x)

$$P(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 10$$

$$Q(x) = 5.x^2 - 7.x + 3$$

$$P(x).Q(x) = (-x^3 - 3x^2 - 2x + 10).(5x^2 - 7x + 3)$$

$$= -5x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 15x^4 + 21x^3 - 9x^2 - 10x^3 + 14x^2 - 6x + 50x^2 - 70x + 30$$

$$P(x).Q(x) = -5x^5 - 8x^4 + 8x^3 + 55x^2 - 76x + 30$$

Recordar que el producto de potencias de igual base es otra potencia de igual base cuyo exponente es la suma de los exponentes. Para el caso de la división, es la resta.

División de polinomios

Dividir un polinomio P(x) llamado **dividendo**, ordenado según las potencias decrecientes de "x", por otro polinomio Q(x) llamado **divisor**, significa hallar un polinomio o monomio C(x) llamado **cociente** y un polinomio o monomio R(x) llamado **resto**, tales que el dividendo sea igual al producto del divisor por el cociente más el resto, y que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Es decir:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{P(x)} & \mathbf{Q(x)} \\ \cline{2-2} & \mathbf{C(x)} \\ \mathbf{R(x)} & \end{array}$$

Entonces: $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$

Tener presente que el grado de P(x) > grado de Q(x) . El grado de C(x) es igual a la diferencia de los grados de P(x) y Q(x).

Si $\boldsymbol{R(x) = 0}$ entonces el polinomio P(x) es **divisible** por Q(x) y en este caso $P(x) = Q(x).C(x)$ y la división es exacta.

Regla Práctica:

Para dividir dos polinomios se procede de la siguiente manera:

Antes de comenzar se ordenan los polinomios en forma decreciente y se completa P(x)

1° Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor.

2° Se multiplica el resultado por todo el divisor.

3° Se resta este último polinomio del dividendo. Estas operaciones se repiten hasta llegar a un dividendo parcial cuyo grado sea menor que el del divisor, entonces, tal dividendo parcial es el resto y habrá quedado formado el cociente con los resultados de las sucesivas divisiones.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 6 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4 - 9x^3 + 3x^2 \qquad\qquad} & 3x^2 + 4x + 11 \\
-\; 4x^3 - \quad x^2 \quad - x + 6 & \\
\underline{4x^3 - 12x^2 + 4x \qquad} & \\
-\; 11x^2 - 5x + 6 & \\
\underline{11x^2 - 33x + 11} & \\
28x - 5 &
\end{array}
$$