

Capítulo 2. Introducción a la Interpolación y la Aproximación

Parte 1. El problema de la interpolación

En numerosos problemas científicos, de ingeniería y computacionales disponemos de información solamente para determinados valores de una variable. Estos datos pueden provenir de mediciones, muestreos, experimentos, simulaciones o ejecuciones de un sistema.

Por ejemplo, podemos conocer el valor de una señal solamente en determinados instantes, la elevación de un terreno en posiciones relevadas o el tiempo de respuesta de un sistema para determinados niveles de carga.

En todos estos casos disponemos de información discreta:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

pero puede resultar necesario estimar qué ocurre en un punto para el cual no disponemos directamente de un dato.

Esta situación da origen a una pregunta que será central durante esta unidad:

¿Cómo podemos utilizar la información disponible para estimar valores entre los puntos conocidos?

Aunque los problemas puedan pertenecer a disciplinas diferentes, todos ellos pueden conducir a una estructura matemática común.

Tres problemas, una misma necesidad

Consideremos tres situaciones que utilizaremos a lo largo de esta unidad.

- Ingeniería Informática — Información digital muestreada

Una señal digital se obtiene registrando el valor de una magnitud en determinados instantes. Supongamos que, entre otras muestras, conocemos:

Tiempo (ms)	Valor
2	18
4	30

pero necesitamos estimar el valor correspondiente a:

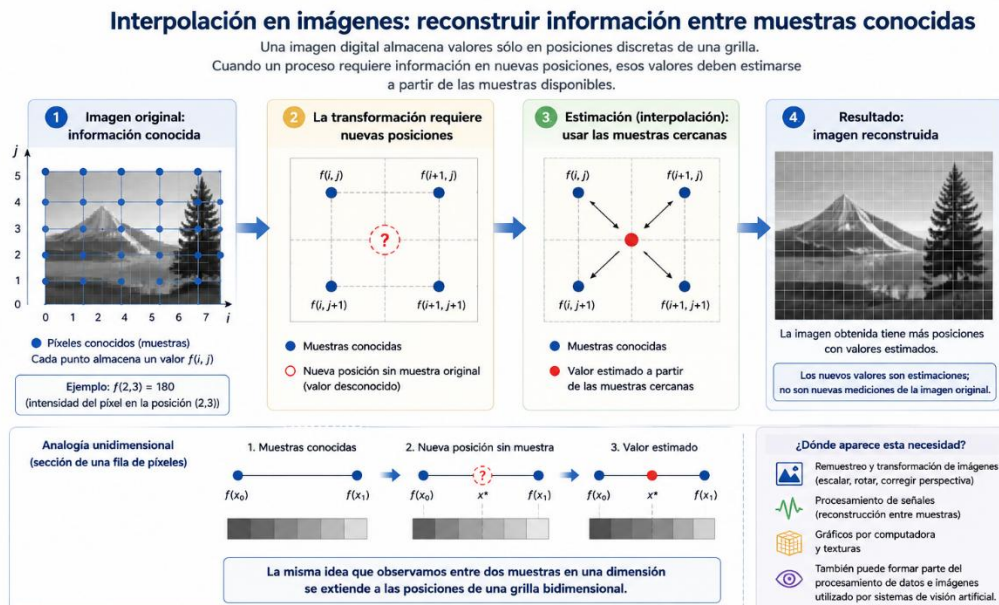
$$t = 3ms$$

No existe una muestra registrada exactamente en ese instante.

La misma necesidad de estimar valores entre muestras aparece en diferentes áreas de la informática: procesamiento de señales, transformación y remuestreo de imágenes, gráficos por computadora, animación, reconstrucción de datos y tablas de consulta.

En una imagen digital, por ejemplo, conocemos valores asociados a posiciones discretas de una grilla. Cuando una imagen cambia de tamaño o se transforma geométricamente, puede ser necesario estimar valores correspondientes a nuevas posiciones situadas entre los píxeles originales. Por lo tanto, nuestro sencillo problema unidimensional forma parte de una necesidad computacional mucho más amplia: **reconstruir información entre muestras conocidas**.

Figura 1. Ejemplo de interpolación para realizar transformaciones.



Fuente: Elaboración propia del autor usando IA.

- Ingeniería de Minas — Información espacial

Durante un relevamiento se registran las elevaciones del terreno en determinadas posiciones a lo largo de un perfil. Supongamos que conocemos:

Distancia (m)	Elevación (m)
100	1248
150	1262

pero necesitamos estimar la elevación correspondiente a:

$$x = 125 \text{ m}$$

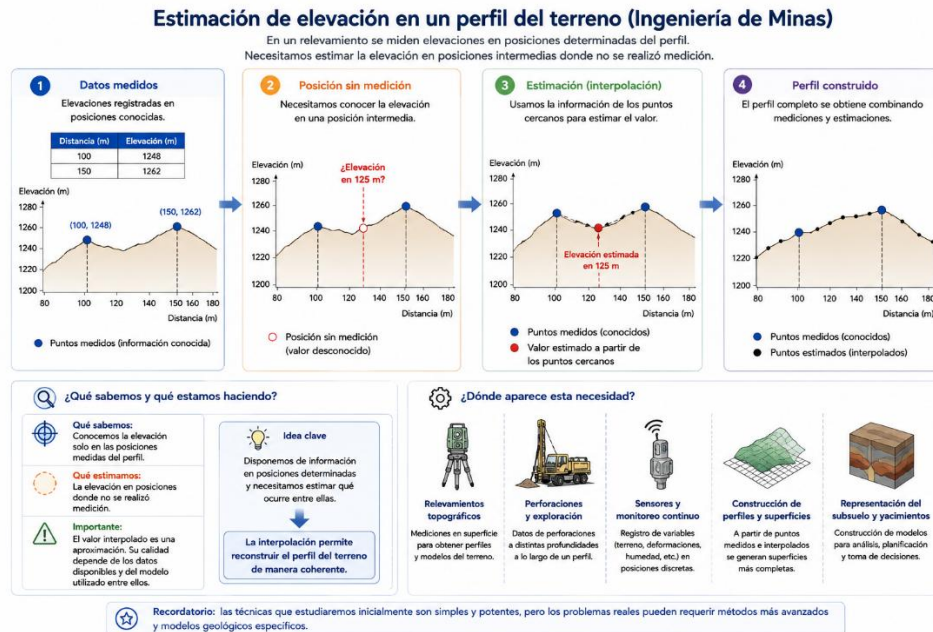
No se realizó una medición exactamente en esa posición.

Los problemas reales de Ingeniería de Minas pueden involucrar información espacial proveniente de relevamientos, sensores, perforaciones y otras mediciones. A partir de estos datos pueden construirse perfiles, superficies y representaciones del terreno o del subsuelo.

Los problemas espaciales reales pueden requerir técnicas considerablemente más avanzadas que las que estudiaremos inicialmente.

Sin embargo, todos comparten una cuestión fundamental: disponemos de información en determinadas posiciones y necesitamos estimar qué ocurre entre ellas.

Figura 2. Ejemplo de interpolación para estimación de elevaciones en perfiles de terreno



Fuente: Elaboración propia del autor usando IA.

- Licenciatura en Sistemas — Análisis de capacidad de un sistema

Una organización utiliza un sistema de gestión al que acceden simultáneamente distintos usuarios. Debido al crecimiento previsto de la organización, se estima que durante los próximos meses aumentará la cantidad de usuarios que utilizarán el sistema de manera concurrente.

Antes de decidir si resulta necesario ampliar los recursos de infraestructura, se realizan **pruebas de carga** para observar cómo responde el sistema ante distintos niveles de utilización.

Entre los resultados obtenidos se encuentran:

Usuarios concurrentes	Tiempo de respuesta (ms)
40	180
60	260

La organización estima que, en una primera etapa, el sistema podría alcanzar aproximadamente 50 usuarios concurrentes.

Ese escenario no fue incluido específicamente en las pruebas realizadas. Si bien sería posible efectuar una nueva prueba, los datos disponibles

permiten obtener una primera estimación de su comportamiento sin necesidad de ensayar cada posible nivel de carga.

Surge entonces la pregunta:

¿Podemos utilizar las mediciones disponibles para estimar el tiempo de respuesta del sistema cuando operen 50 usuarios concurrentes?

En este caso conocemos el comportamiento observado para dos niveles de carga y queremos estimar un valor situado entre ellos:

(40, 180) (50, ?) (60, 260)

La estimación obtenida puede aportar información para el análisis de capacidad del sistema y contribuir, junto con otros criterios técnicos y económicos, a decidir si la infraestructura actual resulta suficiente o si será necesario evaluar alternativas de ampliación.

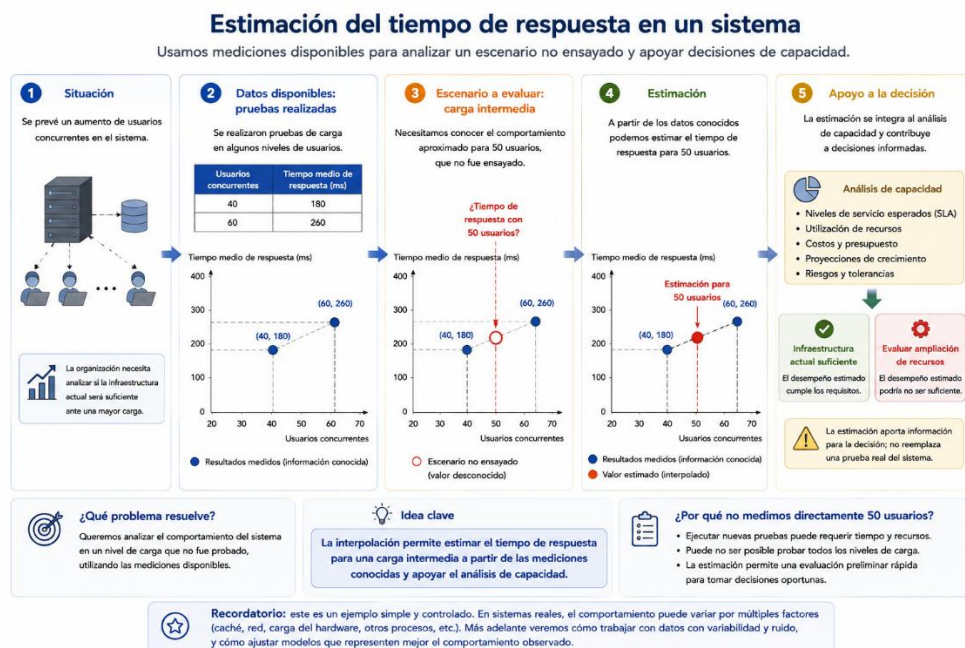
En un contexto más amplio

Las pruebas de carga y el monitoreo de sistemas generan información para determinados estados de funcionamiento. A partir de esos datos puede ser necesario analizar escenarios que no fueron observados directamente.

La interpolación constituye una herramienta posible cuando el valor que interesa estimar se encuentra entre condiciones para las cuales disponemos de información.

Sin embargo, el resultado obtenido continúa siendo una estimación. No sustituye una prueba real ni garantiza que el sistema presente exactamente ese comportamiento.

Figura 3. Ejemplo de estimación de tiempo usando interpolación



Fuente: Elaboración propia del autor usando IA.

La estructura común

Los tres problemas parecen inicialmente diferentes:

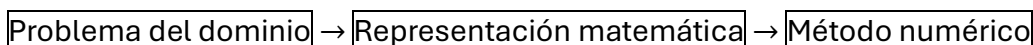
Información digital	Perfil de terreno	Comportamiento de un sistema
---------------------	-------------------	------------------------------

Sin embargo, al abstraer sus características particulares encontramos la misma estructura:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

Conocemos valores de y solamente para determinados valores de x y queremos estimar qué ocurre entre ellos.

Esta transformación:



nos permitirá aplicar las mismas herramientas matemáticas a problemas provenientes de diferentes disciplinas.

Aproximación

De manera general, aproximar consiste en representar una función o un conjunto de datos mediante otra función que resulte adecuada para el propósito del problema.

La necesidad de aproximar puede aparecer en distintas situaciones.

- Podemos desconocer la expresión analítica de la función y disponer solamente de datos: (x_i, y_i)
- Pero también podemos conocer la función original y, aun así, resultar conveniente sustituirla, dentro de determinado intervalo, por otra función más sencilla de evaluar o manipular.

Por lo tanto, aproximar no significa necesariamente desconocer la función original. El objetivo es construir una representación adecuada para la necesidad que estamos intentando resolver.

Pero esto introduce otra pregunta:

¿Qué relación queremos que exista entre la función aproximante y los datos conocidos?

Esta pregunta permite distinguir diferentes problemas de aproximación.

Interpolación

Cuando exigimos que la función aproximante pase exactamente por todos los puntos conocidos, hablamos de interpolación.

Dados:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

buscamos una función que cumpla:

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Los valores $x_0, x_1, \dots, x_n$ reciben el nombre de nodos de interpolación; cada par (x_i, y_i) representa un punto conocido o dato de interpolación.

La condición anterior significa que la función interpolante reproduce exactamente los valores conocidos:

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P(x_n) = y_n,$$

Sin embargo, esta afirmación debe interpretarse con cuidado.

Que $P(x)$ pase exactamente por los datos conocidos **no significa que conozcamos exactamente el comportamiento del fenómeno entre ellos**.

Esta distinción será fundamental durante toda la unidad:

Coincidir exactamente en los nodos

no implica necesariamente:

Representar exactamente el fenómeno entre los nodos.

Interpolación y extrapolación

Si el valor que deseamos estimar se encuentra dentro del intervalo determinado por los datos conocidos:

$$x_0 < x < x_n,$$

realizamos una **interpolación**.

En cambio, si utilizamos los datos disponibles para estimar un valor situado fuera de ese intervalo, realizamos una **extrapolación**.

La extrapolación requiere especial cuidado porque utiliza el comportamiento observado dentro de una región conocida para estimar qué podría ocurrir en una región donde no disponemos de información.

Funciones de interpolación

¿Qué función podemos utilizar para interpolar?

Para construir una interpolación necesitamos elegir una familia de funciones capaz de representar los datos conocidos. Existen distintas posibilidades y **no hay una única familia de funciones que resulte la más adecuada para todos los problemas.**

En esta sección comenzaremos trabajando con **polinomios**:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Esta elección no es arbitraria. Los polinomios presentan propiedades especialmente convenientes para el Cálculo Numérico: pueden evaluarse utilizando operaciones elementales, son continuos y pueden derivarse e integrarse con facilidad. Además, permiten construir funciones interpolantes de grado creciente a medida que incorporamos nuevos datos, lo que proporciona un marco conveniente para estudiar cómo cambia la representación y analizar posteriormente sus ventajas y limitaciones.

Existe también una propiedad fundamental que los hace particularmente adecuados para introducir el problema de interpolación:

Dados $n + 1$ puntos con valores de x distintos, existe un único polinomio de grado menor o igual que n que pasa por todos ellos.

Por ejemplo:

$$2 \text{ puntos} \rightarrow \text{grado} \leq 1$$

$$3 \text{ puntos} \rightarrow \text{grado} \leq 2$$

$$n + 1 \text{ puntos} \rightarrow \text{grado} \leq n$$

Esto permite estudiar de manera progresiva cómo se construye una función interpolante, cómo cambia al incorporar nuevos datos y qué ocurre con la calidad de la aproximación.

Sin embargo, **utilizar polinomios no significa que sean siempre la mejor elección.** A medida que avancemos veremos también algunas de sus limitaciones y estudiaremos otras estrategias para representar los datos cuando un único polinomio global deja de resultar conveniente.

Comenzaremos por el caso más sencillo: construir un polinomio a partir de dos puntos conocidos.

Interpolación lineal

Si conocemos dos puntos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$$

buscamos el polinomio de menor grado que pueda pasar por ambos. En este caso se trata de una recta:

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

Los coeficientes a_0 y a_1 son inicialmente desconocidos. Sin embargo, disponemos de dos datos y queremos que la recta pase exactamente por ellos.

Por lo tanto, debemos exigir:

$$P_1(x_0) = y_0$$

y

$$P_1(x_1) = y_1$$

Al reemplazar los puntos conocidos en la expresión de la recta obtenemos:

$$a_0 + a_1x_0 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 = y_1$$

Tenemos entonces **dos ecuaciones y dos coeficientes desconocidos**.

Restando ambas ecuaciones:

$$a_1(x_1 - x_0) = y_1 - y_0$$

por lo que:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Este coeficiente representa la pendiente de la recta determinada por los dos puntos conocidos.

Entonces, a partir de:

$$y_0 = a_0 + a_1x_0$$

Podemos expresar

$$a_0 = y_0 - a_1x_0$$

Y si sustituimos ambos coeficientes en P_1 , obtenemos:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Esta expresión resulta especialmente útil porque el polinomio queda escrito **directamente en función de los datos disponibles**.

Veamos qué significa utilizar esta misma expresión en nuestros tres problemas.

Ingeniería Informática

Para las muestras:

$$(2,18), (4,30)$$

estimamos en $t = 3$:

$$P_1(3) = 18 + \frac{30 - 18}{4 - 2} (3 - 2)$$

Por lo tanto:

$$P_1(3) = 24$$

Hemos estimado el valor de una muestra inexistente utilizando la información proporcionada por las muestras vecinas.

Ingeniería de Minas

Para:

$$(100,1248), (150,1262)$$

Estimamos la elevación en $x = 125$:

$$P_1(125) = 1248 + \frac{1262 - 1248}{150 - 100} (125 - 100)$$

Por lo tanto:

$$P_1(125) = 1255$$

La elevación estimada es: 1255 m.

Esto no significa que hayamos medido esa elevación. Hemos construido una estimación suponiendo un comportamiento lineal entre las dos posiciones relevadas.

Licenciatura en Sistemas

Para:

$$(40,180), (60,260)$$

Estimamos el tiempo de respuesta para 50 usuarios:

$$P_1(50) = 180 + \frac{260 - 180}{60 - 40} (50 - 40)$$

Por lo tanto:

$$P_1(50) = 220 \text{ ms}$$

Pero el resultado **no demuestra que el tiempo de respuesta del sistema aumente linealmente con la cantidad de usuarios**. La recta constituye el modelo que hemos elegido para estimar el comportamiento entre esas dos mediciones.

Una misma operación, diferentes interpretaciones

Los tres problemas fueron resueltos mediante exactamente la misma expresión matemática:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Sin embargo, el significado del resultado depende del problema.

- En Informática reconstruimos un valor entre muestras.
- En Minas estimamos una elevación en una posición no relevada.
- En Sistemas estimamos el comportamiento bajo una condición que no fue ensayada.

Esto muestra una característica importante de los métodos numéricos: una misma estructura matemática puede utilizarse para abordar problemas provenientes de dominios diferentes, pero la interpretación y las limitaciones del resultado continúan dependiendo del fenómeno estudiado.

¿Y qué tan buena es la estimación?

Hemos obtenido tres aproximaciones, pero:

¿Qué tan próximas se encuentran de los valores que realmente tendrían los fenómenos estudiados?

La función interpolante pasa exactamente por los nodos utilizados:

$$P_1(x_i) = y_i$$

Por lo tanto, en esos puntos la diferencia respecto de los datos conocidos es cero.

Pero nuestro interés se encuentra precisamente **entre los nodos**.

Cuando existe una función $f(x)$ que describe el fenómeno, puede existir entre los nodos una diferencia entre su valor y el proporcionado por la función interpolante $P(x)$:

$$E(x) = f(x) - P(x)$$

Esta diferencia permite definir el **error de interpolación**. Cuando la función verdadera no es conocida y disponemos únicamente de datos, la evaluación de la calidad requiere otros criterios que analizaremos posteriormente.

Por ahora no intentaremos calcularlo. Primero necesitamos comprender cómo se construyen las funciones interpolantes y qué factores pueden afectar su comportamiento.

Más adelante retomaremos esta pregunta y estudiaremos los mecanismos propios de la interpolación para **analizar y, cuando sea posible, estimar o acotar la calidad de las aproximaciones obtenidas.**

Interpolación Cuadrática

Hasta ahora hemos utilizado dos datos conocidos para construir un polinomio de primer grado:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Los dos puntos proporcionaron las dos condiciones necesarias para determinar sus dos coeficientes.

Pero supongamos ahora que disponemos de **un tercer dato**:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

Podríamos utilizar solamente dos de ellos y realizar una interpolación lineal. Sin embargo, esto significaría **dejar de utilizar información que tenemos disponible.**

Surge entonces una nueva pregunta:

¿Podemos construir una función interpolante que utilice simultáneamente los tres datos conocidos?

Para que una única recta pase por los tres puntos, estos deberían encontrarse exactamente alineados. En general, no podemos suponer que esto ocurra.

Necesitamos entonces ampliar la familia de polinomios que estamos utilizando.

El siguiente caso es un polinomio de segundo grado:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Este polinomio posee tres coeficientes desconocidos:

$$a_0, a_1, a_2$$

Como disponemos de tres datos y queremos que el polinomio pase exactamente por ellos, imponemos las condiciones de interpolación:

$$P_2(x_0) = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_1$$

$$P_2(x_2) = y_2$$

Al sustituir cada punto conocido en la condición de interpolación obtenemos:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Tenemos ahora **tres ecuaciones y tres coeficientes desconocidos**.

La idea es exactamente la misma que utilizamos en la interpolación lineal:

Datos conocidos → condiciones de interpolación → determinación de coeficientes
→ $P_2(x)$

La diferencia es que, al disponer de un dato adicional, podemos construir un polinomio de mayor grado capaz de reproducir los tres valores conocidos.

Determinación de coeficientes

Veamos ahora cómo se determinan estos coeficientes para un conjunto concreto de datos. El procedimiento será el mismo que acabamos de establecer: cada punto conocido proporcionará una condición de interpolación y, a partir de ellas, construiremos el sistema que permitirá obtener a_0 , a_1 y a_2 .

Supongamos que conocemos: $(0,1), (1,3), (2,9)$

Buscamos un polinomio: $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que pase exactamente por los tres puntos.

Aplicando las condiciones de interpolación:

$$P_2(0) = 1$$

Por tanto, $a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 1$ y entonces $a_0 = 1$.

Para la condición:

$$P_2(1) = 3,$$

Tenemos, $a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 3$ y entonces $a_0 + a_1 + a_2 = 3$.

Finalmente, para

$$P_2(2) = 9$$

Resulta, $a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 9$ y entonces $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 9$

De esta manera, los tres datos conocidos generan el sistema:
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 9 \end{cases}$$

A partir de este sistema podemos determinar los coeficientes del polinomio interpolante.

Sustituyendo el valor de a_0 en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_2 = 3 \\ 1 + 2a_1 + 4a_2 = 9 \end{cases}$$

y simplificando

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ 2a_1 + 4a_2 = 8 \end{cases}$$

Podemos despejar, por ejemplo a_1 de la primera ecuación

$$a_1 = 2 - a_2$$

Sustituyendo en la segunda:

$$2(2 - a_2) + 4a_2 = 8$$

$$4 - 2a_2 + 4a_2 = 8$$

$$2a_2 = 4$$

$$a_2 = 2$$

Entonces

$$a_1 = 2 - 2 = 0$$

Por lo tanto, los coeficientes del polinomio interpolante son:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2$$

Y el polinomio que buscamos resulta

$$P_2(x) = 1 + 2x^2$$

Finalmente, es conveniente verificar que el polinomio obtenido satisface las condiciones de interpolación para los tres puntos.

Cálculo directo de los coeficientes

En el desarrollo anterior determinamos los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 resolviendo el sistema generado por las tres condiciones de interpolación. Este procedimiento permite comprender cómo los datos conocidos determinan el polinomio interpolante.

Sin embargo, para tres puntos también es posible expresar directamente los coeficientes del polinomio en función de los datos disponibles.

A partir de la resolución algebraica del sistema anterior puede demostrarse que:

$$a_2 = \frac{(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Una vez conocido a_2 , podemos calcular

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - a_2(x_0 + x_1)$$

Y finalmente

$$a_0 = y_0 - a_1x_0 - a_2x_0^2$$

De esta manera, los coeficientes pueden calcularse directamente a partir de los tres puntos conocidos, sin resolver explícitamente el sistema de ecuaciones en cada aplicación.

Una vez determinados los coeficientes puede construirse el polinomio y utilizarlo para realizar la estimación buscada.

Aclaración importante

Estas expresiones no representan un método de interpolación diferente. Son el resultado de resolver algebraicamente las mismas condiciones de interpolación que planteamos anteriormente. Su utilización permite concentrar la práctica en la construcción y aplicación del polinomio, evitando que la resolución del sistema de ecuaciones se convierta en el objetivo principal del ejercicio.

Existen otras formas de construir directamente el mismo polinomio interpolante a partir de los datos conocidos. Por ejemplo, a partir de la forma de expresar un polinomio según Newton, los coeficientes se pueden llegar a expresar de otra manera, pero llegamos al mismo resultado.

Una idea que comienza a generalizarse

Comparemos los dos casos estudiados. Con dos puntos construimos un polinomio de primer grado y utilizamos dos condiciones para determinar los coeficientes. Con tres puntos construimos un polinomio de segundo grado y utilizamos tres condiciones para determinar tres coeficientes.

Esto sugiere una estructura más general.

Dados $n + 1$ puntos con nodos distintos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

Podemos buscar un polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Que satisfaga

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Esto conduce a un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ coeficientes desconocidos.

¿Mayor grado significa necesariamente una mejor aproximación?

Incorporar un tercer dato nos permite construir un polinomio que reproduzca **más información conocida**. Pero esto no permite concluir todavía que:

$$\boxed{\text{Mayor grado}} \rightarrow \boxed{\text{mejor aproximación}}$$

entre los nodos. Que el polinomio pase exactamente por una mayor cantidad de datos conocidos y que represente mejor el comportamiento del fenómeno son cuestiones diferentes.

Esta pregunta será especialmente importante cuando aumentemos la cantidad de nodos y estudiemos posteriormente la **calidad y el comportamiento de la interpolación polinomial**.

Interpolación de Lagrange

Hasta ahora construimos el polinomio interpolante partiendo de su forma general:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

e imponiendo las condiciones de interpolación:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

De esta manera obtenemos un sistema de $n + 1$ ecuaciones

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n &= y_1 \\ \vdots & \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= y_n \end{cases}$$

cuya resolución permite determinar los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$

Este procedimiento nos permitió comprender cómo los datos conocidos determinan el polinomio interpolante. Sin embargo, cuando aumenta la cantidad de puntos conocidos, también aumenta el número de coeficientes desconocidos y, por lo tanto, el tamaño del sistema que debemos resolver.

Surge entonces una pregunta:

¿Es posible construir directamente el polinomio interpolante a partir de los datos conocidos, sin determinar previamente los coeficientes mediante la resolución de un sistema de ecuaciones?

La forma de Lagrange proporciona una respuesta a esta pregunta.

La idea consiste en construir **polinomios auxiliares** que permitan incorporar separadamente la contribución de cada dato conocido y luego combinarlos para obtener el polinomio interpolante.

Construcción para tres puntos

Consideremos tres puntos conocidos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

Cuyos nodos de interpolación son:

$$x_0, x_1, x_2$$

Queremos construir un polinomio $P_2(x)$ que satisfaga las condiciones de interpolación:

$$P_2(x_0) = y_0, P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2$$

Para comprender la construcción de Lagrange, dejemos momentáneamente de lado los valores y_0, y_1, y_2 y concentrémonos únicamente en los nodos.

Comencemos buscando un polinomio $L_0(x)$ que cumpla:

$$L_0(x_0) = 1$$

$$L_0(x_1) = 0$$

$$L_0(x_2) = 0$$

Para conseguir que el polinomio se anule en x_1 , podemos utilizar el factor lineal:

$$(x - x_1)$$

Ya que cuando $x = x_1$:

$$(x - x_1) = 0$$

De manera similar, para que se anule en x_2 , utilizamos:

$$(x - x_2)$$

Si multiplicamos ambos factores:

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

obtenemos un polinomio de segundo grado que se anula tanto en x_1 como en x_2 .

Sin embargo, todavía necesitamos que ese polinomio tome exactamente el valor 1 cuando $x = x_0$.

Al evaluar el producto en x_0 obtenemos:

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

que en general, no es igual a 1.

Podemos conseguirlo **normalizando** el polinomio: dividimos el producto por el valor que él mismo toma en x_0 :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Ahora, al evaluar en $x = x_0$:

$$L_0(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 1$$

Mientras que:

$$L_0(x_1) = \frac{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 0$$

y

$$L_0(x_2) = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 0$$

Por lo tanto:

$$L_0(x_0) = 1$$

$$L_0(x_1) = 0$$

$$L_0(x_2) = 0$$

Hemos construido así un **polinomio fundamental de Lagrange** asociado al nodo x_0 .

Aplicando el mismo razonamiento, podemos construir un polinomio $L_1(x)$ asociado al nodo x_1 .

Para que se anule en x_0 y x_2 utilizamos los factores:

$$(x - x_0)(x - x_2)$$

Luego normalizamos utilizando el valor que este producto toma en x_1 :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

De esta manera:

$$L_1(x_0) = 0$$

$$L_1(x_1) = 1$$

$$L_1(x_2) = 0$$

Finalmente, para construir el polinomio asociado al nodo x_2 , utilizamos:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

que cumple

$$L_2(x_0) = 0$$

$$L_2(x_1) = 0$$

$$L_2(x_2) = 1$$

Podemos resumir el comportamiento de los tres polinomios fundamentales:

	x_0	x_1	x_2
$L_0(x)$	1	0	0
$L_1(x)$	0	1	0
$L_2(x)$	0	0	1

Cada polinomio fundamental está asociado a un nodo: **toma el valor 1 en ese nodo y se anula en todos los demás.**

Esta propiedad es la que permitirá utilizarlos para construir el polinomio interpolante.

Recuperemos ahora los valores y_0, y_1, y_2 . Sabemos que $L_0(x)$ vale 1 en x_0 y 0 en los demás nodos.

Por lo tanto, al multiplicarlo por y_0

$$y_0 L_0(x)$$

obtenemos una contribución que en x_0 vale:

$$y_0 L_0(x_0) = y_0$$

Mientras que en los otros nodos se anula:

$$y_0 L_0(x_1) = 0, \quad y_0 L_0(x_2) = 0$$

De manera similar

$$y_1 L_1(x)$$

aporta el valor y_1 en x_1 y se anula en los otros nodos, mientras que:

$$y_2 L_2(x)$$

aporta el valor y_2 en x_2 y se anula en los restantes.

Podemos entonces sumar las tres contribuciones:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Veamos qué ocurre al evaluar esta expresión en cada nodo.

x_0	$P_2(x_0) = y_0(1) + y_1(0) + y_2(0) = y_0$
x_1	$P_2(x_1) = y_0(0) + y_1(1) + y_2(0) = y_1$
x_2	$P_2(x_2) = y_0(0) + y_1(0) + y_2(1) = y_2$

Hemos construido así un polinomio de segundo grado que satisface las condiciones de interpolación **sin necesidad de determinar previamente los coeficientes mediante la resolución del sistema de ecuaciones.**

Generalización

Lagrange utilizó el mismo razonamiento para extender este polinomio a cualquier cantidad de puntos conocidos.

Dados $n + 1$ puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

Con nodos de interpolación distintos:

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

Para cada nodo x_i construimos un polinomio fundamental $L_i(x)$ que cumpla:

$$L_i(x_i) = 1$$

Y

$$L_i(x_j) = 0, \quad j \neq i$$

Para conseguir que $L_i(x)$ se anule en todos los demás nodos, utilizamos un factor:

$$(x - x_j)$$

por cada x_j distinto de x_i .

Esto puede expresarse como:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$$

Para conseguir además que el polinomio tome exactamente el valor 1 en x_i , normalizamos dividiendo por el valor que ese producto toma cuando $x = x_i$:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Obtenemos así el **polinomio fundamental de Lagrange asociado al nodo x_i .**

Por construcción

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Finalmente, multiplicamos cada polinomio fundamental por el valor conocido asociado a su nodo y sumamos todas las contribuciones

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

Esta expresión constituye la forma de Lagrange del polinomio interpolante. El polinomio obtenido satisface la condición de interpolación.

Ejemplo de interpolación de Lagrange

Consideremos los tres puntos conocidos: (0,1), (1,3) y (2,9)

Los nodos de interpolación son: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$

y los valores asociados son: $y_0 = 1$, $y_1 = 3$ y $y_2 = 9$

Buscamos el polinomio interpolante de segundo grado en la forma de Lagrange:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Para $L_0(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Sustituyendo los nodos

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{2}$$

Para $L_1(x)$:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

Entonces

$$L_1(x) = \frac{x(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)}$$

$$L_1(x) = -x(x - 2)$$

Y para $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Por tanto

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

Ahora podemos construir el polinomio interpolante, incorporando los valores conocidos de $y_0 = 1$, $y_1 = 3$ y $y_2 = 9$:

$$P_2(x) = 1.L_0(x) + 3.L_1(x) + 9.L_2(x)$$

Sustituyendo

$$P_2(x) = 1 \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 3x(x-2) + 9 \frac{x(x-1)}{2}$$

Si la desarrollamos y simplificamos

$$P_2(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2} - 3x^2 + 6x + \frac{9x^2 - 9x}{2}$$

Agrupando términos

$$P_2(x) = 1 + 2x^2$$

Siempre es recomendable comprobar esta forma del polinomio mediante la condición de interpolación:

$$P_2(0) = 1$$

$$P_2(1) = 3$$

$$P_2(2) = 9$$

Por lo tanto, el polinomio obtenido pasa exactamente por los tres puntos conocidos.

Ventajas de la forma de Lagrange

La forma de Lagrange permite construir el polinomio interpolante directamente a partir de los datos conocidos, sin necesidad de determinar previamente los coeficientes de la representación canónica de un polinomio.

Entre sus principales ventajas podemos señalar:

- **Construcción directa:** el polinomio se obtiene a partir de los nodos x_i y de sus valores asociados y_i , evitando la resolución explícita del sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes.

- **Formulación general:** la misma expresión puede utilizarse para cualquier cantidad de puntos conocidos.
- **No requiere nodos equidistantes:** los valores pueden encontrarse separados por distancias diferentes, siempre que sean distintos entre sí.
- **Interpretación clara de las condiciones de interpolación:** cada polinomio fundamental $L_i(x)$ está construido para valer 1 en su propio nodo y 0 en los restantes. Esto permite comprender directamente por qué el polinomio resultante reproduce todos los datos conocidos.

La forma de Lagrange constituye, por lo tanto, una manera general y conceptualmente clara de construir el polinomio interpolante.

Limitaciones de la forma de Lagrange

Sin embargo, que una formulación permita construir directamente el polinomio no significa que resulte igualmente conveniente en todas las situaciones.

Una primera dificultad aparece cuando aumenta la cantidad de nodos. Cada polinomio fundamental:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

debe incorporar todos los nodos excepto aquel al que está asociado. Por lo tanto, a medida que aumenta la cantidad de datos, las expresiones también se vuelven más extensas y aumenta la cantidad de operaciones necesarias.

Pero existe otra limitación especialmente importante.

Supongamos que hemos construido el polinomio interpolante utilizando 3 nodos. Sus polinomios fundamentales serán $L_0(x)$, $L_1(x)$ y $L_2(x)$. Si luego agregas un nuevo dato (x_3, y_3) los polinomios fundamentales ya no son suficientes. Por ejemplo

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Pasará a tener esta forma

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Y lo mismo ocurrirá con el resto de los polinomios fundamentales. Por lo tanto, **agregar un nuevo dato modifica la construcción de todos los polinomios fundamentales anteriores.**

Esta característica puede resultar poco conveniente cuando los datos se incorporan progresivamente.

Interpolación mediante Polinomio de Newton por Diferencias Divididas

En la sección anterior se presentó el polinomio interpolante de Lagrange, que permite construir directamente el polinomio que interpola un conjunto de datos, sin necesidad de plantear y resolver previamente un sistema de ecuaciones para determinar sus coeficientes.

Sin embargo, la forma de Lagrange presenta una dificultad cuando el conjunto de datos cambia. Si se incorpora un nuevo punto, los polinomios fundamentales deben modificarse, ya que su construcción depende de todos los nodos utilizados.

Esto plantea una nueva pregunta:

¿Es posible construir el mismo polinomio interpolante de una forma que permita incorporar progresivamente nuevos datos sin tener que reconstruir completamente el polinomio anterior?

El polinomio de interpolación de Newton propone precisamente una representación que posee esta característica.

La idea consiste en construir el polinomio de manera progresiva: se comienza interpolando un primer dato y, a medida que se incorporan nuevos datos, se agregan términos que permiten interpolarlos sin modificar la interpolación conseguida en los puntos anteriores.

Construcción progresiva del polinomio

Hasta aquí hemos representado los datos conocidos mediante pares (x_i, y_i) . En esta sección utilizaremos también la notación $f(x_i)$ para expresar el valor asociado al nodo x_i . Por lo tanto:

$$y_i = f(x_i)$$

Ambas notaciones representan la misma información. Utilizaremos $f(x_i)$ porque resulta especialmente conveniente al introducir las diferencias divididas.

Supongamos que inicialmente se dispone únicamente del dato

$$(x_0, f(x_0))$$

El polinomio más sencillo que permite interpolarlo es un polinomio constante:

$$P_0(x) = b_0$$

Y como debe cumplirse la condición de interpolación, tenemos que

$$P_0(x_0) = f(x_0)$$

Resulta inmediatamente que

$$b_0 = f(x_0)$$

Y, por lo tanto

$$P_0(x) = f(x_0)$$

Incorporación de un segundo dato

Supongamos ahora que se incorpora el punto

$$(x_1, f(x_1))$$

Es necesario agregar un nuevo término al polinomio anterior para que también pase por este punto. Sin embargo, el nuevo término **no debe modificar el valor que ya se consiguió en x_0** .

Para conseguirlo puede utilizarse el factor

$$(x - x_0)$$

Ya que cuando $x = x_0$

$$x - x_0 = 0$$

Entonces se propone

$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

Obsérvese qué sucede al evaluar el polinomio en x_0 :

$$P_1(x_0) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) = b_0$$

Por lo tanto, cualquiera sea el valor que posteriormente tome b_1 , el nuevo término no modifica el valor del polinomio en x_0 .

Ahora se debe determinar b_1 de manera que el polinomio pase además por el segundo punto:

$$P_1(x_1) = f(x_1)$$

Entonces

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

Como ya sabemos que

$$b_0 = f(x_0)$$

Se obtiene

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0)$$

Despejando b_1

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Esta expresión representa la razón de cambio entre los valores de la función correspondientes a x_0 y x_1 .

Para simplificar su representación se introduce la notación de **diferencia dividida de primer orden**:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Por consiguiente

$$b_1 = f[x_0, x_1]$$

El polinomio interpolante lineal queda entonces

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Esta expresión representa exactamente el polinomio lineal que interpola los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$.

Incorporación de un tercer dato

Supongamos ahora que se incorpora un tercer punto

$$(x_2, f(x_2))$$

Nuevamente se desea agregar un término que permita que el polinomio pase por este nuevo punto, pero **sin modificar los valores que ya se consiguieron en x_0 y x_1** .

Por esta razón, el nuevo término debe anularse cuando

$$x = x_0$$

y también cuando

$$x = x_1$$

Por lo tanto, proponemos

$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Esta estructura posee una propiedad importante.

Si $x = x_0$:

$$(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) = 0$$

Y si $x = x_1$:

$$(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) = 0$$

Por consiguiente, el término agregado

$$b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

no altera la interpolación conseguida anteriormente en x_0 y x_1 . Sólo queda determinar qué valor debe tomar para que también se cumpla

$$P_2(x_2) = f(x_2)$$

Sustituyendo $x = x_2$:

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Utilizando los coeficientes obtenidos anteriormente resulta que

$$f(x_2) = f(x_0) + f|x_0, x_1|(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Despejando:

$$b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - f|x_0, x_1|(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Esta expresión puede reorganizarse utilizando las diferencias divididas de primer orden:

$$f|x_1, x_2| = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

De esta manera se obtiene

$$b_2 = \frac{f|x_1, x_2| - f|x_0, x_1|}{(x_2 - x_0)}$$

Esta expresión recibe el nombre de **diferencia dividida de segundo orden** y se representa como

$$f|x_1, x_1, x_2| = \frac{f|x_1, x_2| - f|x_0, x_1|}{(x_2 - x_0)}$$

Por lo que

$$b_2 = f|x_1, x_1, x_2|$$

El polinomio cuadrático queda entonces

$$P_2(x) = f(x_0) + f|x_0, x_1|(x - x_0) + f|x_0, x_1, x_2|(x - x_0)(x - x_1)$$

Generalización

El procedimiento anterior puede continuar a medida que se incorporan nuevos datos.

Para un cuarto punto se agregaría un término de la forma

$$b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

que se anula automáticamente en x_0, x_1 y x_2 .

Para un quinto punto se agregaría

$$b_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

y así sucesivamente.

De esta manera, para $n + 1$ puntos diferentes

$$((x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)))$$

Se obtiene la estructura general

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Donde los coeficientes son

$$b_0 = f|x_0| = f(x_0)$$

$$b_1 = f|x_0, x_1|$$

$$b_2 = f|x_0, x_1, x_2|$$

$$\vdots$$

$$b_n = f|x_0, x_1, \dots, x_n|$$

Por lo tanto, el polinomio interpolante de Newton por diferencias divididas puede escribirse como

$$P_n(x) = f|x_0| + f|x_0, x_1|(x - x_0) + f|x_0, x_1, x_2|(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f|x_0, x_1, \dots, x_n|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

La tabla de diferencias divididas

Las diferencias divididas pueden definirse de manera recursiva.

- **Diferencia dividida de orden cero**

$$f|x_i| = f(x_i)$$

Es simplemente el valor conocido de la función

- **Diferencia dividida de primer orden**

$$f|x_i, x_{i+1}| = \frac{f|x_{i+1}| - f|x_i|}{x_{i+1} - x_i}$$

O su equivalente

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- **Diferencia dividida de segundo orden**

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Es decir, para calcular una diferencia dividida de segundo orden se utilizan dos diferencias divididas de primer orden

- **De manera general**

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Esto significa que cada diferencia dividida de un determinado orden se obtiene a partir de diferencias divididas del orden inmediatamente anterior.

Las expresiones de las diferencias divididas permiten determinar los coeficientes del Polinomio de Newton.

Como cada diferencia dividida de un determinado orden se obtiene a partir de diferencias divididas del orden anterior, resulta conveniente **organizar estos cálculos en una tabla de diferencias divididas**.

Pero la tabla no cumple solamente una función de organización.

Una vez calculadas las diferencias divididas, sus valores contienen los coeficientes que permiten construir progresivamente los polinomios interpolantes de Newton.

Por ejemplo, si disponemos de cuatro datos:

$$\left((x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)) \right)$$

la tabla tendrá la estructura:

x_i	$f[x_i]$	Primer orden	Segundo orden	Tercer orden
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Si observamos la primera entrada de cada columna, encontramos:

$$f[x_0], f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

Es decir, se toman las diferencias divididas que comienzan en x_0 .

Estos valores son precisamente los coeficientes necesarios para construir el polinomio de Newton.

Pero además permiten recuperar los polinomios de diferentes grados sin recalcular las diferencias ya obtenidas.

Por lo tanto, una misma tabla contiene la información necesaria para construir progresivamente los polinomios interpolantes asociados a los datos utilizados.

¿Y qué ocurre si incorporamos un nuevo dato?

Si a nuestro ejemplo anterior incorporamos un nuevo dato $(x_4, f(x_4))$

Los valores previamente calculados **no necesitan volver a determinarse**. Se incorpora el nuevo dato y se calculan solamente las nuevas diferencias divididas necesarias hasta obtener:

x_i	$f[x_i]$	Primer orden	Segundo orden	Tercer orden	Cuarto orden
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Entonces el nuevo polinomio puede expresarse como:

$$P_4(x) = P_3(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

De esta manera, la tabla refleja directamente el carácter incremental de la forma de Newton.

Una observación importante

El método de Newton por diferencias divididas **no requiere que los valores de estén igualmente espaciados**.

Ejemplo de interpolación mediante diferencias divididas

Consideremos nuevamente los tres puntos utilizados en el ejemplo de interpolación de Lagrange: $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,9)$. Podemos expresar estos datos como:

x_i	$f(x_i)$
0	1
1	3
2	9

Buscamos construir el polinomio interpolante mediante la forma de Newton:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Para ello necesitamos determinar las diferencias divididas correspondientes

- Diferencias divididas de primer orden:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{3 - 1}{1 - 0} = 2$$

Y

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{9 - 3}{2 - 1} = 6$$

- Diferencias divididas de segundo orden:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{6 - 2}{2 - 0} = 2$$

La tabla

x_i	$f(x_i)$	Primer orden	Segundo orden
0	1	2	2
1	3	6	
2	9		

Observe que la propia tabla facilita el cálculo de las diferencias

x_i	$f(x_i)$	Primer orden	Segundo orden
0	1	2	2
1	3	6	
2	9		

La utilidad de la tabla es que hace visible los cálculos de las diferencias y de los coeficientes necesarios para construir el polinomio de Newton. Si queremos construir un polinomio de segundo grado los coeficientes son:

x_i	$f(x_i)$	Primer orden	Segundo orden
0	1	2	2
1	3	6	
2	9		

Es decir: $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 2$

Ahora podemos construir tanto un polinomio de primer grado como de segundo grado:

- Primer grado

$$P_1(x) = f|x_0| + f|x_0, x_1|(x - x_0)$$

$$P_1(x) = 1 + 2(x - 0)$$

$$P_1(x) = 1 + 2x$$

Podemos usar este polinomio para interpolar los primeros dos puntos: (0,1) y (1,3)

- Segundo grado

$$P_2(x) = f|x_0| + f|x_0, x_1|(x - x_0) + f|x_0, x_1, x_2|(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 1 + 2(x - 0) + 2(x - 0)(x - 1)$$

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2(x - 0)(x - 1)$$

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x(x - 1)$$

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x$$

$$P_2(x) = 1 + 2x^2$$

Tanto para el primer como el segundo polinomio es conveniente verificar que se cumpla la condición de interpolación, así luego podremos usar la forma obtenida con seguridad.

La tabla de diferencias divididas no solamente organiza los cálculos. También permite construir progresivamente polinomios desde el orden 0 hasta el orden que permite construir la cantidad de datos disponibles.

Cada nueva diferencia dividida permitió incorporar un término al polinomio anterior sin perder la interpolación ya conseguida en los nodos precedentes.

También puede comprobar que el polinomio de segundo grado es exactamente el mismo que obtuvimos con anterioridad al interpolar estos tres datos mediante la forma de Lagrange.

¿Por qué dos construcciones aparentemente diferentes conducen exactamente al mismo polinomio?

Esta cuestión nos permitirá establecer a continuación la relación entre las formas de **Lagrange y Newton** del polinomio interpolante.

Relación entre las formas de Lagrange y Newton

Dados $n + 1$ puntos con nodos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

Debemos recordar que existe un **único polinomio de grado menor o igual que n** que interpola esos datos.

Por lo tanto, si Lagrange y Newton utilizan los mismos datos y ambos construyen un polinomio de grado menor o igual que n que satisface:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

entonces, necesariamente deben producir el mismo polinomio.

Podemos expresar entonces:

$$P_n^{Lagrange}(x) = P_n^{Newton}(x)$$

La diferencia entre ambos métodos no se encuentra en **qué polinomio obtienen**, sino en **cómo lo construyen y representan**. La siguiente tabla resume la comparación entre ambos polinomios.

Aspecto	Lagrange	Newton por diferencias divididas
Polinomio obtenido	El único $P_n(x)$ que interpola los datos	El mismo $P_n(x)$
Construcción	Combinación de polinomios fundamentales	Incorporación progresiva de términos
Coeficientes	Valores y_i asociados a los $L_i(x)$	Diferencias divididas
Nodos equidistantes	No son necesarios	No son necesarios
Incorporación de un nuevo dato	Deben modificarse los polinomios fundamentales	Puede extenderse el polinomio anterior
Reutilización de cálculos	Menos conveniente en su forma directa	Permite aprovechar diferencias divididas ya calculadas

Por lo tanto, la elección entre Lagrange y Newton no determina un polinomio interpolante diferente. Ambas son representaciones de este $P_n(x)$, pero poseen características diferentes desde el punto de vista de su construcción y utilización.

Error del polinomio interpolante

Hasta aquí hemos construido un polinomio $P_n(x)$ que reproduce exactamente los valores conocidos de una función en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$:

Por lo tanto:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

En esos puntos no existe diferencia entre la función y el polinomio:

$$f(x_i) - P_n(x_i) = 0$$

Sin embargo, el propósito de la interpolación no consiste solamente en reproducir valores que ya conocemos. Queremos utilizar el polinomio para estimar la función en un punto donde no disponemos directamente de su valor.

Utilizamos entonces:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

Si conociéramos el verdadero valor $f(x)$, podríamos definir el error cometido mediante:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

La pregunta es ahora:

¿Podemos expresar esta diferencia utilizando la estructura de interpolación que acabamos de estudiar?

Si suponemos que conocemos efectivamente $f(x)$ para otro punto x distinto de los nodos, entonces el par $(x, f(x))$ podría incorporarse como un dato adicional.

Por lo tanto, pasaríamos de tener $n + 1$ datos a tener $n + 2$

La construcción incremental de Newton nos permite incorporar ese dato adicional como un nuevo término sin descartar P_n

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)$$

Aquí utilizamos t como variable del polinomio para no confundirla con el punto particular x donde queremos estudiar el error.

Este detalle es importante:

- El punto x es fijo: es el lugar donde queremos conocer la calidad de nuestra estimación.
- En cambio, t es la variable del nuevo polinomio.

¿Qué ocurre si evaluamos este nuevo polinomio justamente en $t = x$?

El nuevo polinomio debe satisfacer:

$$P_{n+1}(x) = f(x)$$

Por otra parte, al sustituir $t = x$ en la expresión anterior:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Como

$$P_{n+1}(x) = f(x)$$

Podemos escribir

$$f(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Restando $P_n(x)$ en ambos miembros

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Pero habíamos definido que

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Entonces

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

¿Qué significa esta expresión?

Este resultado es especialmente importante porque nos permite interpretar el error utilizando conceptos que ya conocemos.

Recordemos que, al construir Newton:

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \text{nuevo término}$$

El nuevo término es

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)$$

Y cuando evaluamos precisamente en $t = x$, ese término representa

$$f(x) - P_n(x)$$

Por tanto

El error de $P_n(x)$ puede interpretarse como el término que faltaría agregar para incorporar el valor verdadero $f(x)$.

El problema de la expresión anterior

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Contiene $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$. Para calcular esta diferencia dividida necesitamos conocer $f(x)$. Pero justamente estamos interpolando porque normalmente **no conocemos** $f(x)$.

Entonces esta expresión es matemáticamente muy importante, pero todavía no resuelve nuestro problema práctico.

Necesitamos comprender mejor qué representa una diferencia dividida de orden $n + 1$.

Relación entre diferencias divididas y derivadas

Si f posee suficientes derivadas en un intervalo que contiene los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ entonces existe algún punto ξ dentro de ese intervalo tal que:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Este resultado permite relacionar la información discreta de las diferencias divididas con el comportamiento continuo de la función.

Antes de utilizarlo, conviene entender por qué tiene sentido.

- En una diferencia dividida de primer orden.

Sabemos que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Esta expresión es la pendiente de la recta secante que une $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$

El **teorema del valor medio** establece que, si f cumple las condiciones correspondientes, existe algún punto:

$$\xi \in (x_0, x_1)$$

donde la derivada de la función coincide con esa pendiente:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Por lo tanto:

$$f[x_0, x_1] = f'(\xi)$$

Para algún ξ comprendido entre los nodos. Esto ya demuestra que una diferencia dividida de primer orden guarda relación con una derivada de primer orden.

- Para órdenes superiores

Al aumentar el orden ocurre algo análogo. Una diferencia dividida de segundo orden $f[x_0, x_1, x_2]$ puede relacionarse con alguna segunda derivada de f :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

para algún ξ dentro del intervalo que contiene los nodos.

De manera general:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

para algún ξ dentro del intervalo correspondiente.

Entonces para nuestra diferencia dividida de orden $n + 1$:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Utilizando la expresión de las derivadas en la expresión del error

Habíamos obtenido:

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Sustituyendo

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Resulta

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

para algún ξ perteneciente al intervalo que contiene a los nodos y al punto x .

Esta es la **expresión teórica del error del polinomio interpolante** que aparece tanto en la forma de Lagrange como la forma de Newton.

Interpretación de cada parte de la Expresión

La fórmula:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Contiene dos componentes fundamentales.

El primero es

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Este término depende de la **función que estamos intentando aproximar**.

El segundo es:

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Este término depende de:

- los nodos seleccionados;
- la posición del punto donde queremos interpolar.

Por lo tanto, la calidad de la interpolación no depende solamente del grado del polinomio. Depende también del comportamiento de la función y de la distribución de los nodos.

¿Qué es ξ ?

En la expresión $f^{(n+1)}(\xi)$, ξ representa **algún punto situado dentro del intervalo que contiene los nodos y el punto x .**

No significa $\xi = x$. Tampoco significa que $\xi = x_i$

Y, en general, **no sabemos exactamente cuál es su valor.**

El resultado matemático garantiza que existe al menos un ξ para el cual se cumple la expresión del error.

Además, el valor de ξ puede cambiar cuando cambia el punto donde realizamos la interpolación.

Una nueva dificultad para calcular el error

Para calcularlo necesitaríamos conocer $f^{(n+1)}(\xi)$. Y acabamos de establecer que normalmente no conocemos ξ .

Peor aún: en muchos problemas de interpolación tampoco conocemos la expresión analítica de $f(x)$; solamente disponemos de datos.

Esto nos obliga a tener en cuenta que la forma en que podemos evaluar o estimar la calidad de la interpolación dependerá de:

- Si conocemos la función $f(x)$
- Si solo conocemos los datos $(x_i, f(x_i))$

¿Cómo podemos utilizar la expresión del error si no conocemos ξ ?

Aunque conozcamos la función f , generalmente no podemos evaluar directamente $f^{(n+1)}(\xi)$. Esto no significa que la expresión del error deje de ser útil. En lugar de intentar conocer el error exacto, podemos preguntarnos:

¿Podemos establecer un valor que el error no debería superar?

Esta pregunta nos conduce a una **cota del error de interpolación**.

- **Cota del error cuando conocemos la función.** Supongamos que conocemos la expresión analítica de f y podemos estudiar su derivada de orden $n + 1$ en el intervalo de interés.

Consideremos:

$$I = [a, b]$$

como un intervalo que contiene los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$ y también el punto x donde queremos realizar la estimación.

Buscamos un valor M que satisfaga:

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad \forall t \in I$$

Una elección natural es

$$M = \max_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$$

Es importante observar qué estamos haciendo.

No conocemos exactamente cuál es el valor de ξ , pero sabemos que:

$$\xi \in I$$

Por lo tanto, independientemente de dónde se encuentre ξ :

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$$

Partimos ahora de:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Tomando valor absoluto:

$$|E_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Como:

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$$

Obtenemos

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Esta expresión constituye una **cota del error de interpolación en el punto x** .

Ejemplo: Supongamos que queremos interpolar $f(x) = e^x$ utilizando un polinomio lineal construido con los nodos $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ y queremos analizar la estimación en $x = 0,5$.

Al utilizar un polinomio interpolador de primer orden, la expresión del error involucra la derivada de orden $n + 1 = 2$

Como $f(x) = e^x$ tenemos que $f''(x) = e^x$.

En el intervalo $[0,1]$ la función e^x es creciente. Por lo tanto:

$$M = \max_{t \in [0,1]} |f''(t)| = e$$

La cota viene dada por:

$$|E_1(x)| \leq \frac{M}{2!} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

Para $x = 0,5$

$$|E_1(0,5)| \leq \frac{e}{2!} |(0,5 - 0)(0,5 - 1)|$$

Entonces

$$|E_1(0,5)| \leq \frac{e}{2} |(0,5)(-0,5)|$$

$$|E_1(0,5)| \leq \frac{e}{2} 0,25$$

Por lo tanto:

$$|E_1(0,5)| \leq \frac{e}{8} \approx 0,3398$$

Esto significa que la teoría garantiza que la magnitud del error de interpolación en $x = 0,5$ no supera aproximadamente 0,3398.

La cota no afirma que ese sea el error realmente cometido. De hecho, como en este ejemplo conocemos $f(x)$, podemos comprobarlo.

El polinomio lineal interpolante es:

$$P_1(x) = 1 + (e - 1)x$$

Entonces

$$P_1(0,5) = 1 + (e - 1)(0,5)$$

$$P_1(0,5) = 1 + \frac{e - 1}{2}$$

$$P_1(0,5) = \frac{1+e}{2} \approx 1,8591$$

Mientras que

$$f(0,5) = e^{0,5} \approx 1,6487$$

Por lo tanto:

$$E_1(0,5) = f(0,5) - P_1(0,5) \approx -0,2104$$

y

$$|E_1(0,5)| \approx 0,2104$$

Efectivamente

$$0,2104 \leq 0,3398$$

La cota se cumple, pero resulta mayor que el error real.

- **Si no conocemos la función → Estimación mediante un dato adicional**
Dado

$$E_n(x) = f|x_0, x_1, \dots, x_n, x| \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

El problema es que esta expresión contiene $f(x)$, precisamente el valor que queremos estimar.

Supongamos, sin embargo, que disponemos de un dato adicional:

$$(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$$

Con este dato podemos calcular una diferencia dividida de orden $n + 1$

$$f|x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}|$$

Esta diferencia dividida puede utilizarse como una **estimación** de la diferencia dividida desconocida que aparece en el error.

De esta manera podemos aproximar:

$$f|x_0, x_1, \dots, x_n, x| \approx f|x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}|$$

Entonces

$$E_n(x) \approx f|x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}| \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Debemos aclarar que esta expresión en general no representa una cota. La expresión utiliza información discreta adicional para **estimar** el término desconocido del error. La utilidad de esta estimación depende de que la diferencia dividida obtenida con el dato adicional resulte representativa del comportamiento local de la función en la región donde se realiza la interpolación.

¿Qué nos dice el análisis del error sobre la calidad de la interpolación?

La expresión del error permite sintetizar algunas conclusiones importantes

Aspecto	¿Qué nos indica?
Error en los nodos	$E_n(x_i)$. El polinomio reproduce exactamente los datos utilizados para construirlo.
Comportamiento de la función	El término $f^{(n+1)}(\xi)$ muestra que la calidad también depende del comportamiento de la función entre los datos conocidos.
Ubicación de los nodos	El producto $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ muestra que importa dónde se encuentran los nodos y la posición de x respecto de ellos.
Cantidad de nodos y grado	Incorporar más nodos permite construir un polinomio de mayor grado, pero esto modifica simultáneamente todos los términos que intervienen en el error.
Mayor grado $\neq$ menor error garantizado	Aumentar el grado del polinomio no garantiza, por sí solo, una mejor aproximación.
Interpolación $\neq$ calidad de aproximación	Pasar exactamente por los datos conocidos no garantiza representar con igual calidad el comportamiento de la función entre ellos.

Por lo tanto, al analizar una interpolación debemos distinguir dos cuestiones:

¿El polinomio reproduce los datos conocidos?

Y

¿Qué calidad tienen las estimaciones realizadas entre esos datos?

La primera pregunta corresponde a las **condiciones de interpolación**. La segunda requiere analizar el **error de interpolación**.

Esta distinción será importante al estudiar posteriormente cómo el grado del polinomio y la distribución de los nodos pueden afectar el comportamiento de la interpolación.