

## Capítulo 1. Introducción al Cálculo Numérico y análisis de errores

### Introducción al Cálculo Numérico

A lo largo de la formación matemática se estudian diferentes procedimientos para resolver problemas tales como ecuaciones, sistemas de ecuaciones, derivadas o integrales. En muchos casos estos procedimientos permiten obtener una solución mediante expresiones matemáticas que pueden considerarse exactas.

Por ejemplo, dada la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

es posible determinar analíticamente que sus soluciones son

$$x = \pm\sqrt{2}$$

La expresión  $\sqrt{2}$  representa exactamente una de las soluciones. Sin embargo, cuando necesitamos utilizarla en un cálculo debemos recurrir normalmente a alguna representación numérica:

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$$

y, dependiendo de nuestras necesidades, podríamos trabajar con

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

o con

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

En otros problemas, obtener una solución mediante procedimientos analíticos puede resultar difícil, poco conveniente o incluso no ser posible mediante una expresión cerrada sencilla. Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\cos(x) - x = 0$$

No disponemos de un procedimiento algebraico elemental que permita despejar  $x$ . Sin embargo, podemos determinar numéricamente una solución aproximada:

$$x \approx 0,739085$$

También existen situaciones en las que los propios datos disponibles son numéricos. Por ejemplo, podemos necesitar calcular una magnitud a partir de valores obtenidos experimentalmente sin disponer de una función matemática explícita que los describa. Estos problemas motivan el estudio del Cálculo Numérico.

### ¿Qué es el Cálculo Numérico?

El Cálculo Numérico es una rama de la matemática que estudia métodos para obtener soluciones numéricas de problemas matemáticos y analiza las propiedades y la calidad de las soluciones obtenidas.

Por lo tanto, su objetivo no consiste solamente en obtener un resultado, sino también en determinar en qué condiciones ese resultado puede considerarse adecuado para el problema que se intenta resolver.

Esta idea permite distinguir dos cuestiones que estarán presentes durante toda la asignatura:

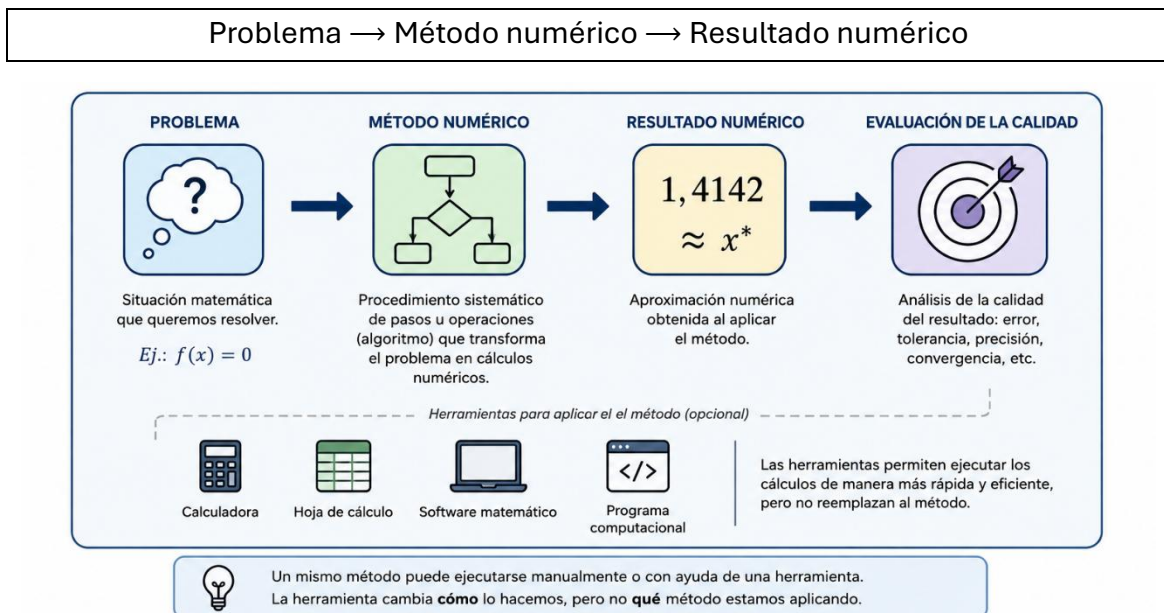
Obtener una solución y Evaluar la calidad de la solución

La primera conduce al estudio de los **métodos numéricos**. La segunda conduce al estudio de los **errores, la convergencia y otros criterios** que permiten evaluar la confiabilidad de los resultados.

### ¿Qué es un método numérico?

Un método numérico es un procedimiento sistemático, basado en operaciones matemáticas realizables numéricamente, que permite obtener una solución para un determinado problema matemático. Este procedimiento puede describirse mediante una secuencia ordenada de pasos u operaciones, es decir, mediante un **algoritmo**.

De manera general podemos representar su función como:



Por ejemplo, si necesitamos encontrar un valor de que satisfaga

$$f(x) = 0$$

podemos utilizar diferentes métodos numéricos para determinar una raíz de la función.

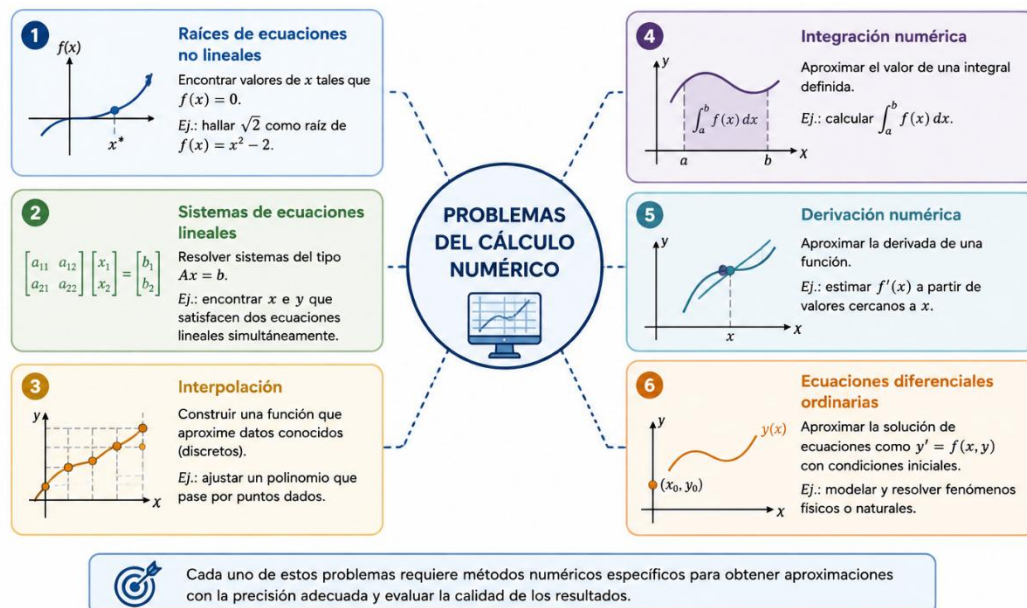
Los métodos numéricos no necesariamente siguen una misma forma de resolución. Algunos permiten obtener la solución después de una secuencia determinada de operaciones, mientras que otros generan una sucesión de aproximaciones que busca acercarse progresivamente a la solución. Estas formas de resolución darán lugar, más adelante, a la distinción entre **métodos directos e iterativos**.

Muchos métodos numéricos requieren realizar una cantidad considerable de cálculos o repetir determinadas operaciones. Por este motivo, aunque algunos de ellos pueden aplicarse manualmente para comprender su funcionamiento, en la práctica suelen utilizarse herramientas computacionales que permiten realizar estos cálculos de manera más rápida y eficiente.

Es importante distinguir, entonces, el método numérico de la herramienta utilizada para aplicarlo. Un mismo método puede ejecutarse manualmente o con ayuda de una calculadora, una hoja de cálculo, un software matemático o un programa desarrollado para tal fin.

### ¿Qué problemas estudiaremos?

El Cálculo Numérico comprende una amplia variedad de problemas. Durante la asignatura nos concentraremos particularmente en algunos de ellos.



- **Raíces de ecuaciones no lineales.** Resolver una ecuación no lineal implica, en muchos casos, determinar uno o más valores de una variable que

satisfacen una determinada condición. Matemáticamente, el problema puede expresarse de la forma:

$$f(x) = 0$$

Resolverla significa encontrar uno o más valores de  $x$ , denominados raíces, para los cuales la función se hace cero.

Para algunas ecuaciones es posible obtener estas raíces mediante procedimientos analíticos conocidos. En otros casos, obtenerlas de esta manera resulta imposible o impracticable. Esto no significa que el problema no tenga solución: podemos buscar **numéricamente** valores de  $x$  que satisfagan la ecuación con la precisión requerida.

Durante la asignatura estudiaremos métodos numéricos que permiten localizar y aproximar raíces de ecuaciones no lineales, así como analizar la calidad de las soluciones obtenidas.

- **Sistemas de ecuaciones lineales.** Muchos problemas requieren determinar simultáneamente varias cantidades desconocidas relacionadas entre sí. Estas relaciones pueden expresarse mediante un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

Cuando el número de ecuaciones e incógnitas aumenta, su resolución manual puede requerir una cantidad considerable de operaciones.

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse de manera compacta utilizando matrices y vectores:

$$Ax = b$$

donde  $A$  contiene los coeficientes del sistema,  $x$  representa las incógnitas y  $b$  los términos independientes.

Los procedimientos matemáticos para resolver sistemas de ecuaciones son anteriores al desarrollo de las computadoras. Sin embargo, el uso de herramientas computacionales permitió abordar de manera práctica sistemas de dimensiones cada vez mayores, frecuentes en problemas científicos y de ingeniería. A medida que aumenta el número de ecuaciones e incógnitas, la cantidad de operaciones necesarias y los recursos requeridos para resolverlos pueden crecer considerablemente. Por esta razón, resulta especialmente importante disponer de métodos numéricos adecuados a las características y dimensiones del sistema.

- **Interpolación.** En muchas situaciones no se dispone de una función matemática que describa directamente un fenómeno, sino de un conjunto de datos obtenidos mediante mediciones, observaciones o cálculos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

Si necesitamos conocer el valor correspondiente a un punto situado entre los datos disponibles, puede ser necesario estimarlo a partir de la información conocida.

La interpolación permite construir una función que reproduzca los valores conocidos y utilizarla para estimar valores intermedios. También puede utilizarse cuando se conoce la función original, pero resulta conveniente sustituirla, en un determinado intervalo, por una función más sencilla de evaluar u operar.

Durante la asignatura estudiaremos métodos numéricos de interpolación que permiten construir estas aproximaciones y analizar la calidad de las estimaciones obtenidas.

- **Integración numérica.** La integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

permite determinar una cantidad acumulada en un intervalo y aparece en numerosos problemas científicos y de ingeniería.

En algunos casos, su valor puede obtenerse de manera analítica. En otros, este cálculo puede resultar difícil o impracticable, o puede ocurrir que la función no se conozca mediante una expresión matemática y solo se disponga de un conjunto de datos.

Los métodos de integración numérica permiten aproximar el valor de una integral definida a partir de evaluaciones de la función o de los datos disponibles.

Durante la asignatura estudiaremos métodos numéricos para realizar estas aproximaciones y analizar la calidad de los resultados obtenidos.

- **Derivación numérica.** La derivada de una función permite estudiar su tasa de variación y constituye una herramienta fundamental para describir el comportamiento de numerosos fenómenos. Cuando se conoce una expresión analítica de la función, su derivada puede obtenerse aplicando las reglas conocidas del cálculo diferencial.

Sin embargo, puede ocurrir que obtener analíticamente la derivada resulte difícil o poco conveniente o, especialmente, que no se disponga de una expresión matemática de la función, sino solamente de valores conocidos en determinados puntos.

Los métodos de derivación numérica permiten aproximar el valor de una derivada utilizando valores de la función o datos disponibles en puntos próximos.

Durante la asignatura estudiaremos procedimientos para obtener estas aproximaciones y analizar la calidad de los resultados obtenidos.

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias.** Numerosos fenómenos científicos y de ingeniería se describen mediante relaciones entre una magnitud y una o más de sus derivadas. Estas relaciones pueden expresarse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, un problema de primer orden puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Si además se conoce el valor de la variable en un instante inicial,

$$y(t_0) = y_0$$

el problema consiste en determinar cómo evoluciona  $y$  a partir de esa condición.

En algunos casos es posible obtener una solución analítica de la ecuación diferencial. En otros, su obtención puede resultar difícil o impracticable. Los métodos numéricos permiten aproximar la solución a partir de la condición inicial, obteniendo valores de la variable para distintos valores de  $t$ .

Durante la asignatura estudiaremos métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y analizar la calidad de los resultados obtenidos.

Los problemas presentados son diferentes, pero comparten una característica: su resolución mediante métodos numéricos conduce, en general, a resultados cuya calidad debe ser evaluada. Por ello, no basta con obtener una solución numérica; también necesitamos establecer qué tan confiable es y si resulta adecuada para el problema considerado.

### **De obtener una solución a evaluar su calidad**

Al presentar los distintos problemas que abordaremos durante la asignatura hemos señalado reiteradamente que no solo interesa obtener una solución numérica, sino también analizar la calidad del resultado obtenido.

Pero

*¿qué significa realmente que una solución numérica tenga una determinada calidad?*

Consideremos nuevamente la ecuación

$$\cos(x) - x = 0$$

Supongamos que mediante un método numérico obtenemos como resultado:

$$x \approx 0,7391$$

Hemos obtenido una solución numérica, pero todavía queda una pregunta fundamental:

*¿Es suficientemente buena esta aproximación?*

Podríamos haber obtenido, por ejemplo:

0,7                      0,74                      0,739                      0,7391                      0,739085

Todos estos valores pueden considerarse aproximaciones de la misma solución, pero evidentemente no proporcionan el mismo grado de aproximación.

Por lo tanto, obtener una solución numérica no es suficiente. También necesitamos establecer qué tan próxima se encuentra a la solución buscada y si resulta suficientemente adecuada para el problema que estamos resolviendo.

Esto nos conduce a una pregunta fundamental del Cálculo Numérico:

*¿Cómo evaluamos la calidad de una aproximación?*

Para comenzar a responder esta pregunta necesitamos estudiar el concepto de error.

### Error y Aproximación

En el lenguaje cotidiano, la palabra *error* suele asociarse con una equivocación. En Cálculo Numérico tiene un significado diferente.

Cuando utilizamos una aproximación, aceptamos que el valor empleado puede diferir del valor que consideramos verdadero. Esa diferencia no implica necesariamente que el procedimiento sea incorrecto: forma parte del trabajo con cantidades aproximadas.

Por ejemplo, sabemos que:

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

Si para un determinado cálculo utilizamos

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

estamos utilizando deliberadamente una aproximación. No estamos afirmando que 1,41 sea exactamente igual a  $\sqrt{2}$ . Estamos aceptando que la aproximación puede resultar suficiente para un determinado propósito.

Por lo tanto, inicialmente podemos entender el error como la **diferencia existente entre un valor y su aproximación**.

Esta idea será fundamental durante toda la asignatura. Los métodos numéricos nos permitirán obtener soluciones, pero necesitaremos establecer criterios que permitan determinar si esas soluciones poseen la calidad requerida para el problema que estamos resolviendo.

A partir de aquí será necesario responder una nueva pregunta:

*¿Cómo podemos medir que tan próxima se encuentra una aproximación del valor verdadero?*

Y esa pregunta da paso al estudio del **error verdadero, error absoluto y error relativo**.

### **Error verdadero**

Si conocemos un valor verdadero  $x_v$  y disponemos de una aproximación  $x_a$ , podemos definir el error verdadero como la diferencia entre ambos:

$$e_v = x_v - x_a$$

El signo del error permite establecer si la aproximación se encuentra por encima o por debajo del valor verdadero. Sin embargo, cuando interesa conocer solamente la magnitud de esa diferencia, utilizamos su valor absoluto:

$$E_v = |x_v - x_a|$$

denominado **error absoluto verdadero**.

Para el ejemplo anterior, el valor verdadero es:

$$x_v = \sqrt{2}$$

Mientras que una de las posibles aproximaciones consideradas fue:

$$x_a = 1,41$$

Por lo tanto, el error absoluto verdadero es:

$$E_v = |x_v - x_a| = |\sqrt{2} - 1,41|$$

Observe que, para obtener un valor numérico de este error, necesitamos a su vez, representar  $\sqrt{2}$  numéricamente. Si utilizamos:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

Este valor también es una aproximación, pero posee una precisión considerablemente mayor que 1,41. **En este ejemplo lo utilizaremos deliberadamente como valor de referencia** para poder cuantificar el error de la aproximación que queremos analizar.

Así:

$$E_v \approx |1,41421356 - 1,41|$$

$$E_v \approx 0,00421$$

Ahora sabemos cuánto se diferencia nuestra aproximación del **valor tomado como referencia**.



Esto nos permite afirmar, antes de continuar nuestro desarrollo, algo muy importante:

$$\text{valor exacto} \neq \text{valor numérico de referencia}$$

Pero aparece una nueva pregunta: ¿Un error absoluto de 0,00421 es grande o pequeño?

La respuesta depende de la magnitud con la que estamos trabajando.

### La magnitud del error también importa

Consideremos dos mediciones que presentan el mismo error absoluto de 1 cm.

Si estamos midiendo una longitud de varios kilómetros, esa diferencia puede resultar prácticamente despreciable. En cambio, si estamos midiendo una pieza de pocos centímetros, el mismo error puede ser considerable.

Por lo tanto, el error absoluto nos indica **cuánto difieren dos valores**, pero no permite por sí solo determinar qué tan importante es esa diferencia respecto de la magnitud considerada.

Para poder realizar esta comparación utilizamos el **error relativo verdadero**:

$$\varepsilon_v = \left| \frac{x_v - x_a}{x_v} \right|$$

Este error también puede expresarse porcentualmente:

$$\varepsilon_v(\%) = \left| \frac{x_v - x_a}{x_v} \right| \times 100$$

De esta manera disponemos de dos medidas complementarias:

| Medida                | Nos permite responder                                                              |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Error absoluto</b> | ¿Cuánto difiere la aproximación del valor verdadero?                               |
| <b>Error relativo</b> | ¿Qué tan importante es esa diferencia respecto de la magnitud del valor verdadero? |

### Cuando no conocemos el valor verdadero

Hasta ahora hemos podido calcular el error porque conocíamos el valor verdadero o disponíamos deliberadamente de un valor de referencia con una precisión mucho mayor que la aproximación que queríamos analizar.

Sin embargo, esta situación no es la habitual cuando utilizamos Cálculo Numérico para resolver un problema. En muchos casos, **la solución verdadera es precisamente el valor que estamos intentando determinar.**

Supongamos, por ejemplo, que queremos encontrar una raíz de:

$$f(x) = 0$$

Consideremos, a modo ilustrativo, la siguiente sucesión de aproximaciones a una solución para esta función:

$$x_1 = 1,5 \qquad x_2 = 1,42 \qquad x_3 = 1,414 \qquad x_4 = 1,4142$$

Si quisiéramos calcular el error verdadero de  $x_4$ , necesitaríamos conocer:

$$E_v = |x_v - x_4| = |x_v - 1,4142|$$

Pero  $x_v$  es justamente la solución que estamos buscando.

Por lo tanto, aparece una dificultad:

*¿Cómo podemos evaluar la calidad de una aproximación si no conocemos el valor verdadero?*

No existe una única forma universal de responder esta pregunta. Los mecanismos utilizados para estimar, acotar o controlar el error dependen del problema y del método numérico empleado.

Algunos métodos permiten estudiar el error a partir de sus propias características matemáticas; otros proporcionan información que puede utilizarse durante el proceso de cálculo. Estas formas particulares de evaluar el error serán estudiadas junto con los métodos correspondientes.

Un caso especialmente importante es el de los **métodos iterativos**, que generan una sucesión de aproximaciones a la solución. En ellos podemos utilizar la información proporcionada por las propias iteraciones para observar cómo evoluciona el proceso. Esto nos conduce al concepto de **error absoluto aproximado**.

### **Error absoluto aproximado**

Algunos métodos numéricos generan una **sucesión de aproximaciones**:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

Cada aplicación del procedimiento definido por el método se denomina **iteración** y produce una nueva aproximación a la solución buscada. Así  $x_i$ , representa la aproximación obtenida en la iteración  $i$ .

En estos casos disponemos de una información que sí podemos observar: **cómo cambian las aproximaciones a medida que avanza el proceso.**

Consideremos, por ejemplo, la siguiente sucesión:

| Iteración | Aproximación |
|-----------|--------------|
| 1         | 1,50000      |
| 2         | 1,42000      |
| 3         | 1,41400      |
| 4         | 1,41420      |
| 5         | 1,41421      |

En la tabla se observa que se han realizado cinco iteraciones y, por lo tanto, se han obtenido cinco aproximaciones sucesivas. A medida que avanza el proceso, los valores parecen acercarse y estabilizarse alrededor de un determinado valor.

Este comportamiento permite introducir una idea fundamental para comprender el funcionamiento de muchos métodos numéricos: la **convergencia**.

### Convergencia

Cuando las aproximaciones generadas por un método se acercan progresivamente a la solución buscada, decimos que el método **converge** hacia esa solución.

Si representamos la solución mediante  $x^*$ , podemos expresar esta idea como:

$$x_i \rightarrow x^* \text{ cuando } i \rightarrow \infty$$

Si un método converge hacia  $x^*$ , a medida que avanzan las iteraciones sus aproximaciones se acercan a la solución. Como consecuencia, también tienden a encontrarse cada vez más próximas entre sí, es decir:

$$|x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$$

Esta relación nos proporciona una información que podemos utilizar cuando desconocemos el valor verdadero. Aunque no podemos medir directamente la distancia entre  $x_i$  y la solución  $x^*$ , **sí podemos medir cuánto cambió la aproximación respecto de la iteración anterior.**

Esta diferencia se denomina **error absoluto aproximado**:

$$E_a = |x_i - x_{i-1}|$$

### Convergencia en métodos iterativos

Muchos métodos numéricos generan una sucesión de aproximaciones que se acercan progresivamente a la solución buscada.



#### Idea principal

La sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$  tiende a un valor  $x^*$  (solución) a medida que aumenta el número de iteraciones.

#### Notación

$x_i$  : aproximación obtenida en la iteración  $i$ .

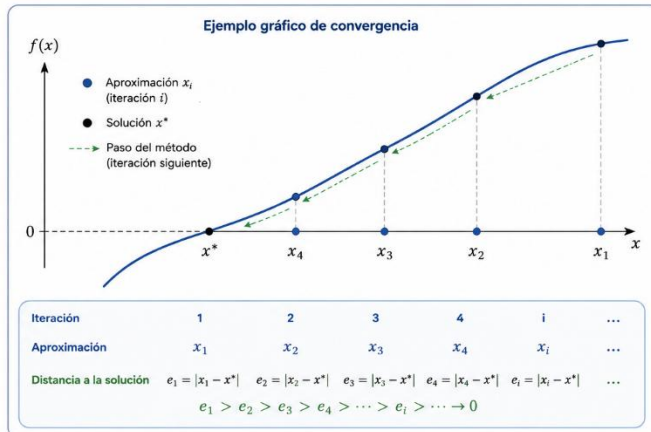
$x^*$  : solución (valor al que tiende la sucesión).

$e_i = |x_i - x^*|$  : error absoluto de la iteración  $i$ .



#### Importante

Que las aproximaciones se acerquen no garantiza por sí sola que el método converja. Es necesario analizar otras condiciones del método.



Decimos que el método **converge** a  $x^*$  si las aproximaciones se acercan indefinidamente a ese valor, es decir,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x^*$$

El objetivo del método es hacer que el error  $e_i$  sea tan pequeño como se requiera.

Por ejemplo, para las aproximaciones anteriores:

| Iteración ( $i$ ) | Aproximación ( $x_i$ ) | Error Absoluto Aproximado<br>$E_a =  x_i - x_{i-1} $ |
|-------------------|------------------------|------------------------------------------------------|
| 1                 | 1,50000                | ---                                                  |
| 2                 | 1,42000                | 0,08000                                              |
| 3                 | 1,41400                | 0.00600                                              |
| 4                 | 1,41420                | 0,00020                                              |
| 5                 | 1,41421                | 0,00001                                              |

Ahora podemos observar no solo que las aproximaciones parecen estabilizarse, sino que también podemos **cuantificar cuánto cambia una aproximación respecto de la anterior**.

A diferencia del error verdadero ( $E_v = |x_v - x_a|$ ), el error aproximado no compara la aproximación con el valor verdadero —que en este caso desconocemos—, sino con la aproximación obtenida en la iteración anterior.

### Precaución

Que el error aproximado disminuya,

$$|x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$$

**no demuestra, por sí solo, que el método esté convergiendo hacia la solución buscada.**

Las condiciones que permiten establecer la convergencia no son universales: dependen del método numérico utilizado y de las características del problema al que se aplica. Estas condiciones serán estudiadas al abordar cada método en particular.

Por lo tanto, la disminución del error aproximado debe interpretarse como una información útil para seguir la evolución de un proceso con comportamiento convergente, y no como una demostración de convergencia por sí misma.

### Error relativo aproximado

El error absoluto aproximado permite conocer cuánto cambió una aproximación respecto de la obtenida en la iteración anterior. Sin embargo, al igual que ocurría con el error absoluto verdadero, esta diferencia por sí sola no permite establecer qué tan importante resulta el cambio respecto de la magnitud de la aproximación considerada.

Por esta razón, podemos expresar el cambio entre dos aproximaciones sucesivas de manera relativa. El **error relativo aproximado** se define como:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right|$$

Observe que utilizamos como referencia  $x_i$ , es decir, **la aproximación más reciente disponible**, ya que el valor verdadero es desconocido.

El error relativo aproximado también puede expresarse porcentualmente:

$$\varepsilon_a(\%) = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| \times 100$$

Consideremos nuevamente las aproximaciones utilizadas anteriormente. Para la quinta iteración:

$$x_4 = 1,41420$$

$$x_5 = 1,41421$$

El error absoluto aproximado en la quinta iteración es:

$$E_a = |x_5 - x_4| = |1,41421 - 1,41420| = 0,00001$$

Mientras que el error relativo aproximado porcentual resulta:

$$\varepsilon_a(\%) = \left| \frac{1,41421 - 1,41420}{1,41421} \right| \times 100$$

$$\varepsilon_a(\%) \approx 0,000707\%$$

De esta manera, mientras el **error absoluto aproximado** indica cuánto cambió la aproximación entre dos iteraciones, el **error relativo aproximado** permite interpretar ese cambio en relación con la magnitud de la aproximación más reciente.

### Relación entre las medidas de error

Hasta aquí hemos utilizado distintas formas de expresar el error. Estas medidas no representan conceptos independientes, sino que responden a **dos cuestiones diferentes**.

Por una parte, podemos distinguir los errores según los valores que estamos comparando: si conocemos el valor verdadero, podemos comparar la aproximación con ese valor; si trabajamos con aproximaciones sucesivas, podemos comparar la aproximación actual con la obtenida en la iteración anterior.

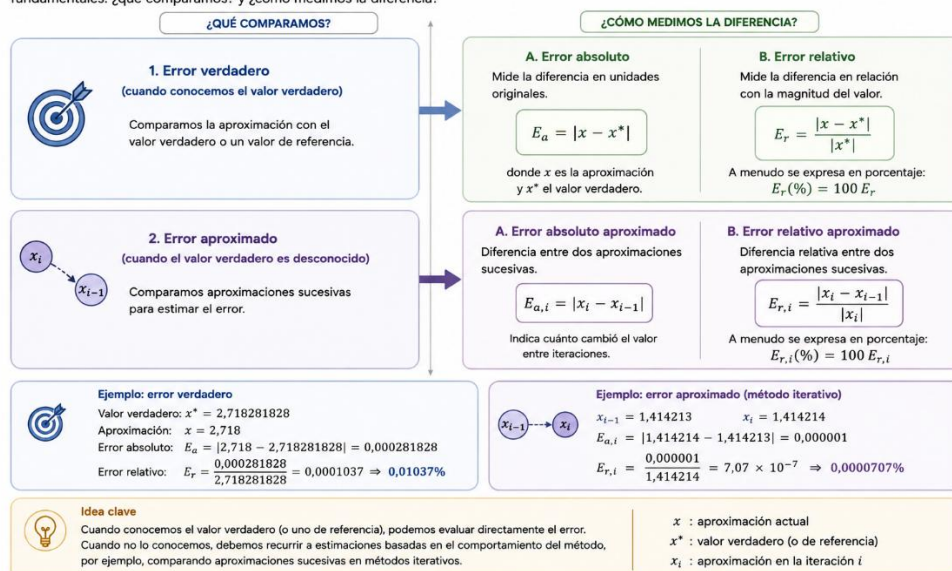
Por otra parte, la diferencia puede expresarse de manera **absoluta**, indicando directamente cuánto difieren los valores, o de manera **relativa**, considerando esa diferencia respecto de la magnitud del valor utilizado como referencia.

Estas relaciones pueden sintetizarse de la siguiente manera:

|                   | Error absoluto                                               | Error relativo                                                                  |
|-------------------|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Verdadero</b>  | Mide cuánto difiere la aproximación del valor verdadero.     | Expresa esa diferencia en relación con la magnitud del valor verdadero.         |
| <b>Aproximado</b> | Mide cuánto cambia una aproximación respecto de la anterior. | Expresa ese cambio en relación con la magnitud de la aproximación más reciente. |

### Tipos de errores en Cálculo Numérico

Para evaluar la calidad de una solución numérica necesitamos comparar valores. Esto da lugar a dos preguntas fundamentales: ¿qué comparamos? y ¿cómo medimos la diferencia?



Así, la elección de una medida de error depende tanto de qué información se encuentra disponible como de qué aspecto de la diferencia necesitamos analizar.

### **Del error aproximado al criterio de parada**

En los métodos iterativos, cada nueva iteración genera una nueva aproximación y permite calcular el error aproximado respecto de la iteración anterior. Cuando el proceso presenta un comportamiento convergente, esperamos que estas diferencias tiendan a disminuir a medida que avanzan las iteraciones.

Supongamos, por ejemplo, que obtenemos sucesivamente:

$$\varepsilon_a = 2,4\%, \quad 0,8\%, \quad 0,15\%, \quad 0,02\%$$

Podemos observar que el error aproximado está disminuyendo. Sin embargo, esta información todavía no nos indica en qué momento debemos dejar de realizar nuevas iteraciones.

¿Debemos detenernos cuando el error sea menor que 1%? ¿Menor que 0,1%?

¿Deberíamos continuar hasta alcanzar 0,01%?

Esto conduce a una nueva pregunta:

*¿Cuánto debe disminuir el error aproximado para considerar que la aproximación obtenida es suficientemente adecuada?*

Para responderla necesitamos establecer previamente **qué nivel de error estamos dispuestos a aceptar**. Esta idea da lugar al concepto de **tolerancia**.

#### Tolerancia y criterio de parada

En un método iterativo podemos continuar generando nuevas aproximaciones mientras el proceso lo permita. Sin embargo, en la práctica no tiene sentido realizar iteraciones indefinidamente. Necesitamos establecer cuándo la aproximación obtenida resulta suficientemente adecuada para el problema que estamos resolviendo.

Para ello se define una **tolerancia**, es decir, un valor que representa el máximo error aproximado que estamos dispuestos a aceptar.

Si utilizamos el error relativo aproximado porcentual, podemos representar la tolerancia mediante  $\xi$  y establecer como condición:

$$\varepsilon_a(\%) \leq \xi$$

Mientras

$$\varepsilon_a(\%) > \xi$$

el proceso continúa generando nuevas aproximaciones.

Cuando:

$$\varepsilon_a(\%) \leq \xi$$

se satisface el **criterio de parada** establecido y el proceso puede finalizar. Por ejemplo, si se establece:

$$\xi = 0,1\%$$

Y durante las iteraciones se obtienen los siguientes errores aproximados;

| Iteración | Error relativo aproximado |
|-----------|---------------------------|
| 2         | 2,4 %                     |
| 3         | 0,8 %                     |
| 4         | 0,15 %                    |
| 5         | 0,02 %                    |

En las primeras iteraciones el error aproximado supera la tolerancia establecida. En la quinta iteración:

$$0,02\% < 0,1\%$$

por lo que se satisface el criterio de parada.

### **Tolerancia y error no significan lo mismo**

Es importante distinguir ambos conceptos. El **error aproximado** es un valor que calculamos a partir de las aproximaciones obtenidas y nos proporciona información sobre la evolución del proceso.

La **tolerancia**, en cambio, es un valor establecido previamente que expresa el nivel de error que estamos dispuestos a aceptar.

Podemos sintetizar esta diferencia de la siguiente manera:

**Error aproximado** → valor que obtenemos

**Tolerancia** → límite que establecemos

El criterio de parada surge precisamente de comparar ambos

$$\varepsilon_a(\%) \leq \xi$$

### **¿Cómo se establece la tolerancia?**

Llegados a este punto aparece una nueva cuestión. En el ejemplo anterior establecimos:

$$\xi = 0,1\%$$



Pero podríamos haber elegido:

1%

0,01%

0,001%

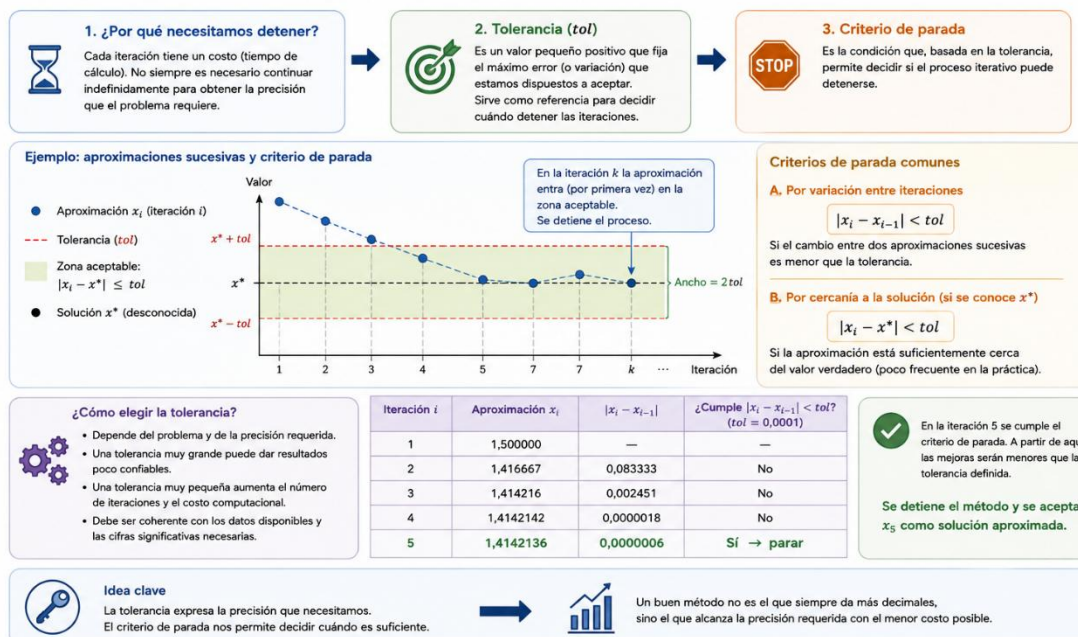
Entonces, **¿cómo decidimos qué tolerancia utilizar?**

La respuesta depende de la precisión requerida por el problema. No todas las situaciones necesitan resultados con el mismo grado de precisión y, en general, exigir una tolerancia menor implica realizar más iteraciones y, por lo tanto, un mayor esfuerzo computacional.

Por esta razón, al aplicar un método numérico debemos buscar un equilibrio entre **la precisión requerida y el esfuerzo necesario para alcanzarla.**

### Tolerancia y criterio de parada en métodos iterativos

En los métodos iterativos se genera una sucesión de aproximaciones que se acercan a la solución buscada. Para decidir cuándo detener el proceso necesitamos establecer un criterio objetivo.



### Precisión y representación de los valores numéricos

Al establecer una tolerancia hemos introducido una idea importante: no todos los problemas requieren el mismo nivel de precisión.

En términos generales, hablar de la precisión de un resultado supone considerar **con qué grado de detalle numérico podemos expresar de manera confiable la cantidad que estamos representando.**

La precisión no interviene únicamente al decidir cuando detener un método iterativo. También está presente en la forma en que representamos, comunicamos y utilizamos los valores numéricos.

Consideremos nuevamente:

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

Podemos representar este valor mediante distintas aproximaciones:

1,4

1,41

1,414

1,4142

Todas representan el mismo valor, pero no expresan el mismo grado de precisión. En este caso, al conservar progresivamente más dígitos obtenemos aproximaciones cada vez más próximas al valor verdadero. Podría parecer entonces razonable concluir:

**Cuantos más dígitos tenga un número, mayor será su precisión.**

Sin embargo, esta conclusión no es válida en general. Supongamos que una longitud ha sido determinada como:

$$L = 12,3 \text{ cm}$$

Si la información disponible solamente permite conocer la longitud hasta las décimas de centímetro, escribir posteriormente:

$$L = 12,30000 \text{ cm}$$

no hace que conozcamos mejor la longitud. Los nuevos dígitos no proceden de una medición más precisa ni aportan nueva información sobre la cantidad. Los nuevos ceros no surgieron de una medición más precisa ni de nueva información sobre la cantidad: simplemente fueron agregados a su representación.

Del mismo modo, si mediante un determinado procedimiento obtenemos:

$$x \approx 1,41$$

Escribir simplemente:

$$x \approx 1,410000$$

no hace que la aproximación esté más cerca del valor verdadero.

Por lo tanto

más dígitos escritos  $\nRightarrow$  mayor precisión

La precisión de un valor depende de qué información sobre la cantidad representan realmente esos dígitos, y no simplemente de cuántos aparecen escritos.

Podemos verlo todavía con mayor claridad si conocemos información sobre el error. Supongamos que una longitud se informa como:

$$L = 4325,3528 \text{ m}$$

pero sabemos que su error es aproximadamente:

$$E \approx 0,8 m$$

Si existe una incertidumbre cercana a un metro, informar milésimas o diezmilésimas de metro transmite una precisión que los datos realmente **no poseen**. Esos últimos dígitos están escritos, pero no aportan información confiable sobre la cantidad.

Esto muestra que, al trabajar con valores aproximados, no interesa solamente cuántos dígitos escribimos, sino cuáles de ellos contienen información significativa sobre el valor que estamos representando.

Surge entonces una nueva pregunta:

*¿Cómo podemos identificar los dígitos que realmente aportan información sobre la precisión de un valor aproximado?*

Para responderla introducimos el concepto de **cifras significativas**.

### **Cifras significativas**

Las cifras significativas son los dígitos de un número que aportan información relevante acerca de la precisión con la que se conoce o representa una cantidad.

Por ejemplo 23,4 posee tres cifras significativas. Los tres dígitos expresan información sobre el valor representado.

Sin embargo, determinar las cifras significativas de un número no siempre consiste simplemente en contar sus dígitos.

- Consideremos el siguiente valor: 0,0023  
Aunque aparecen varios ceros en su escritura, estos indican únicamente la posición decimal del número. Los dígitos que aportan información sobre su precisión son: 2 y 3. Por lo tanto, posee **dos cifras significativas**.
- En cambio, en: 0,00230  
El último cero puede aportar información adicional: indica que el valor ha sido expresado hasta una posición decimal más precisa. En este caso se consideran **tres cifras significativas**:

Estas situaciones hacen necesario establecer algunos criterios para reconocer correctamente las cifras significativas de un número.

### Criterios para identificar cifras significativas

Como hemos visto, no todos los dígitos que aparecen escritos en un número cumplen necesariamente la misma función. Algunos aportan información sobre el valor y la precisión con que se expresa una cantidad, mientras que otros son necesarios únicamente para indicar su posición decimal.

A partir de esta idea podemos establecer algunos criterios para identificar cuáles son las cifras significativas de un número.

- **Dígitos distintos de cero.** Los dígitos distintos de cero se consideran **siempre significativos**, ya que forman parte de la información con la que se expresa el valor.

Por ejemplo: 347 posee tres cifras significativas, el 3, el 4 y el 7.

Del mismo modo: 3,47 también posee tres cifras significativas. La posición de la coma modifica la magnitud del número, pero no hace que estos dígitos dejen de aportar información sobre el valor representado.

- **Ceros situados entre cifras significativas.** Los ceros que se encuentran entre dígitos significativos también son significativos.

Consideremos: 405. El cero ocupa una posición que forma parte del valor representado. Si lo elimináramos estaríamos representando diferentes valores, en nuestro ejemplo:  $405 \neq 45$ . Por lo tanto, 405 posee tres cifras significativas.

Lo mismo ocurre con 3,007 que posee cuatro cifras significativas. Los dos ceros interiores forman parte de la información con la que se expresa el número.

- **Ceros situados a la izquierda del primer dígito distinto de cero.** Los ceros que aparecen antes del primer dígito distinto de cero no son significativos. Su función es indicar la posición decimal del número, pero no aportan información adicional sobre la precisión con la que se expresa.

Por ejemplo: 0,0023 puede escribirse en notación científica como:

$$2,3 \times 10^{-3}$$

Los ceros iniciales han desaparecido, mientras que los dígitos que contienen la información significativa continúan siendo 2 y 3. Por lo tanto, posee dos cifras significativas.

Algo similar ocurre con 0,000507 que posee tres cifras significativas: 5, 0 y 7. Observe que los ceros iniciales no son significativos, pero el cero situado entre 5 y 7 sí lo es.

- **Ceros finales en números decimales.** Los ceros situados al final de un número y a la derecha de la coma decimal pueden ser significativos, porque pueden comunicar información sobre la precisión con la que se expresa la cantidad.

Consideremos 2,3 y 2,30. Desde el punto de vista de su valor numérico:

$$2,3 = 2,30$$

Sin embargo, ambas escrituras no necesariamente comunican la misma información. Al escribir 2,30, se está expresando el valor hasta las centésimas, por lo que el cero final forma parte de la información

proporcionada. Por esta razón 2,3 posee dos cifras significativas, mientras que 2,30 posee tres cifras significativas.

Es importante recordar que esto **no significa que agregar ceros arbitrariamente aumente la precisión real de una cantidad**. Escribir:

$$2,3 \rightarrow 2,30000$$

no produce nueva información. Los ceros finales expresan mayor precisión solamente cuando esa precisión está respaldada por la medición, el cálculo o la información disponible.

- **Ceros finales en números enteros.** En números enteros que terminan en cero puede aparecer una dificultad adicional.

Consideremos 1500. A partir de esta escritura, no siempre podemos determinar si los ceros finales representan información sobre la precisión del valor o simplemente indican su magnitud.

Por ejemplo, el mismo valor puede expresarse como:

$$1,5 \times 10^3,$$

$$1,50 \times 10^3,$$

o

$$1,500 \times 10^3.$$

Estas expresiones representan el mismo valor numérico, pero comunican diferente cantidad de cifras significativas:

| Expresión           | Cifras significativas |
|---------------------|-----------------------|
| $1,5 \times 10^3$   | 2                     |
| $1,50 \times 10^3$  | 3                     |
| $1,500 \times 10^3$ | 4                     |

La **notación científica** permite, por lo tanto, eliminar la ambigüedad y expresar claramente cuántas cifras significativas posee un valor.

### De identificar cifras a determinar cuáles son correctas

Hasta aquí hemos aprendido a determinar cuántas cifras significativas se expresan en un número. Sin embargo, esto no nos permite todavía establecer si esas cifras representan correctamente el valor que intentamos aproximar.

Por ejemplo, los números 1,41421 y 1,99999 poseen ambos seis cifras significativas. Pero si pretendemos utilizarlos como aproximaciones de:

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$$

resulta evidente que no poseen la misma calidad como aproximaciones.

Por lo tanto, tener  $n$  cifras significativas **no** significa necesariamente tener  $n$  cifras significativas correctas.

Esto nos conduce nuevamente al problema que dio origen al estudio del error:

*¿Cómo podemos establecer cuántas cifras significativas de una aproximación pueden considerarse correctas?*

Para responder esta pregunta debemos volver a relacionar las **cifras significativas con el error**.

**¿Cómo identificarlas?**

Observemos el número: 0,0045600

Ceros a la izquierda (no significativos)

0, 0, 0

Dígitos distintos de cero (significativos)

4, 5, 6

Ceros finales a la derecha (significativos en este caso)

0, 0

Cifras significativas: 4 5 6 0 0 (5 cifras)

La cantidad de cifras significativas depende del origen del dato y de cómo fue obtenido.

**Reglas generales**

- Todos los dígitos distintos de cero son significativos.
- Los ceros entre dígitos distintos de cero son significativos.
- Los ceros a la izquierda del primer dígito distinto de cero NO son significativos.
- Los ceros finales a la derecha pueden ser significativos o no, dependiendo del contexto.

Cuando hay duda, es preferible conservar los ceros finales hasta tener más información sobre el dato o el problema.

**Ejemplos**

|          |            |
|----------|------------|
| 257      | → 3 cifras |
| -0,0317  | → 3 cifras |
| 20,305   | → 5 cifras |
| 1,007    | → 4 cifras |
| 0,00456  | → 3 cifras |
| 0,000120 | → 3 cifras |

| Significativos (medidos) | No significativos (contados)                            |
|--------------------------|---------------------------------------------------------|
| 12,300 → 5 cifras        | 1200 → 2 cifras (necesarias solo para indicar el orden) |
| 0,5000 → 4 cifras        |                                                         |

**Ejemplos variados**

Orden de magnitud con dos cifras

$3,2 \times 10^4$

2 cifras significativas

Los ceros de  $10^n$  solo indican el orden de magnitud (no cuentan como cifras significativas).

Ceros finales significativos

15,200

5 cifras significativas

El cero final fue obtenido por medición (resolución del instrumento).

Ceros a la izquierda no significativos

0,000789

3 cifras significativas

Los ceros iniciales solo ubican el punto decimal.

Cero entre dígitos significativos

1,05

3 cifras significativas

El cero entre 1 y 5 si es significativo.

Entero sin punto decimal (¿cuántas cifras?)

250

Al menos 2 cifras significativas

Puede tener 2 o 3. Depende de cómo se haya obtenido el dato.

Decimal con ceros finales

7,300

4 cifras significativas

El cero final es significativo porque está después del punto decimal.

**¿Para qué sirven?**

Las cifras significativas permiten:

- Comunicar la precisión de un resultado.
- Evitar dar una falsa impresión de exactitud.
- Tomar decisiones coherentes en los cálculos.

**Importante**

Reportar demasiadas cifras puede ser engañoso: sugiere una precisión que realmente no tenemos.

**Ejemplo**

Si medimos una longitud como 12,3 cm (precisión de 0,1 cm), no tiene sentido reportarla como 12,3456789 cm. Las cifras adicionales no son confiables.

## Cifras significativas correctas y error

Saber que un número está expresado con determinada cantidad de cifras significativas no nos informa, por sí solo, cuántas de ellas representan correctamente el valor que estamos aproximando.

Para establecerlo necesitamos recuperar una idea estudiada anteriormente: **el error**.

Consideremos nuevamente:

$$x_v = \sqrt{2} \approx 1,41421356$$

Y dos posibles aproximaciones:

$$x_{a1} = 1,41 \quad | \quad x_{a2} = 1,414$$

Ambas se encuentran próximas al valor verdadero, pero la segunda conserva correctamente una mayor cantidad de información sobre él.

Podemos comprobarlo mediante sus errores relativos:

$$\varepsilon_v = \left| \frac{x_v - x_a}{x_v} \right|$$

A medida que el error relativo disminuye, podemos exigir que una mayor cantidad de cifras de la aproximación represente correctamente al valor verdadero.

Surge entonces una relación fundamental:

*¿Qué tan pequeño debe ser el error relativo para poder afirmar que una aproximación posee al menos  $n$  cifras significativas correctas?*

¿De dónde surge el límite?

Pensemos primero en una sola cifra significativa.

Si queremos conservar correctamente un dígito mediante redondeo, el máximo error admisible debe ser **menor que la mitad de una unidad de la posición que queremos conservar**.

Por ejemplo, si trabajamos con unidades 7,0 y vamos incrementando los dígitos a 7,499... se redondea a 7. Pero al alcanzar 7,5 el redondeo cambia a la siguiente unidad, es decir 8,0.

Por eso aparece la idea de media unidad: 0,5. Si queremos conservar una porción decimal, esa media unidad se desplaza una posición: 0,05.

De manera similar, para agregar otra posición, desplazamos a 0,005.

Por lo tanto, exigir más cifras significativas significa admitir errores progresivamente menores: 0,5; 0,05; 0,005; 0,0005; ...

Observe que estos valores expresan límites absolutos asociados a posiciones determinadas del número. Sin embargo, como vimos anteriormente, un mismo error absoluto no tiene la misma importancia para números de diferente magnitud.

Por ejemplo, un error de 0,05 no representa lo mismo respecto de un valor cercano a 1 que respecto de un valor cercano a 1000.

Por esta razón, si queremos establecer un criterio que pueda utilizarse independientemente de la magnitud del número, necesitamos expresar esta condición en términos **relativos**.

#### Cifras significativas y error relativo

La idea de admitir como máximo media unidad en la posición correspondiente a la última cifra significativa puede expresarse mediante un límite para el error relativo.

Si deseamos trabajar con al menos  $n$  cifras significativas correctas, se utiliza como criterio general:

$$\xi(\%) = 0,5 \times 10^{2-n}$$

donde:

- $n$  representa la cantidad de cifras significativas que se desea considerar correctas
- $\xi$  representa el límite de error relativo porcentual asociado a ese nivel de precisión

Por ejemplo, si deseamos trabajar con tres cifras significativas:  $n = 3$ , entonces

$$\xi(\%) = 0,5 \times 10^{2-3} = 0,5 \times 10^{-1} = 0,05\%$$

De manera similar:

| Cifras significativas (n) | Límite de error relativo porcentual |
|---------------------------|-------------------------------------|
| 1                         | (5%)                                |
| 2                         | (0,5%)                              |
| 3                         | (0,05%)                             |
| 4                         | (0,005%)                            |
| 5                         | (0,0005%)                           |

La tabla permite observar una relación importante: cada cifra significativa adicional exige reducir diez veces el límite de error admitido.

$$5\% \rightarrow 0,5\% \rightarrow 0,05\% \rightarrow 0,005\% \rightarrow \dots$$

Esto permite relacionar cuantitativamente dos ideas que hasta ahora habíamos tratado por separado:

$$\boxed{\text{Cantidad de cifras significativas requeridas}} \leftrightarrow \boxed{\text{límite de error admitido}}$$

¿Qué error debemos comparar con este límite?

En este punto debemos recuperar una distinción realizada anteriormente. Si conocemos el valor verdadero, podemos calcular el **error relativo verdadero**:

$$\varepsilon_v(\%) = \left| \frac{x_v - x_a}{x_v} \right| \times 100$$

En ese caso podemos evaluar directamente la calidad de la aproximación respecto del valor verdadero.

Sin embargo, en muchos problemas numéricos el valor verdadero es desconocido. Si estamos utilizando un **método iterativo**, disponemos en cambio del error relativo aproximado:

$$\varepsilon_a(\%) = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| \times 100$$



Podemos entonces utilizar el límite  $\xi$  como criterio de parada:

$$\varepsilon_a \leq \xi$$

De esta manera, si hemos establecido previamente la cantidad de cifras significativas con la que deseamos trabajar, podemos determinar una tolerancia asociada y utilizarla para decidir cuándo detener el proceso iterativo.

**Importante.** El error relativo aproximado mide el cambio entre dos aproximaciones consecutivas y no la distancia entre la aproximación y el valor verdadero. Por esta razón, satisfacer el criterio debe interpretarse dentro de las condiciones de convergencia y características del método utilizado.

### **Precisión, exactitud y calidad de una aproximación**

A lo largo de esta unidad hemos utilizado los conceptos de **error**, **tolerancia** y **cifras significativas** para analizar diferentes aspectos de una aproximación. Esto nos permite ahora precisar dos términos que suelen utilizarse de manera cotidiana como si fueran equivalentes: **precisión** y **exactitud**.

- **Exactitud.** La **exactitud** se refiere a qué tan próximo se encuentra un valor aproximado respecto del valor verdadero o de un valor de referencia aceptado.

Por ejemplo, si

$$x_v = \sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

y tenemos dos aproximaciones que son comparadas con el valor verdadero:  $x_1 = 1,41$  y  $x_2 = 1,4142$ ; entonces la segunda aproximación se encuentra más próxima al valor verdadero y, por lo tanto, es más exacta.

El concepto de exactitud se encuentra directamente relacionado con el error verdadero. En términos generales, cuanto menor sea el error respecto del valor verdadero, mayor será la exactitud de la aproximación.

- **Precisión.** La **precisión**, en cambio, se refiere al grado de detalle o resolución con el que un valor puede expresarse de manera confiable.

Por ejemplo, 1,410000 contiene más dígitos escritos que 1,41 pero si esos ceros fueron agregados arbitrariamente, no hemos obtenido nueva información ni aumentado la precisión real de la aproximación.

### Precisión y exactitud no son lo mismo

Una aproximación puede expresarse con muchas cifras y, sin embargo, encontrarse alejada del valor verdadero.

Consideremos nuevamente:

$$x_v = \sqrt{2} \approx 1,41421356$$

Las aproximaciones  $x_1 = 1,41$  y  $x_2 = 1,99999$  permiten observar esta diferencia.  $x_2$  está expresado con mayor cantidad de cifras significativas, pero se encuentra mucho más alejado del valor verdadero. **Expresar un resultado con mayor precisión no garantiza que sea más exacto.** Por lo tanto, la calidad de una aproximación no debe evaluarse simplemente por la cantidad de dígitos que presenta.

### Exactitud y precisión: ideas diferentes

**Exactitud** se refiere a cuán cerca está un resultado del **valor verdadero**.  
**Precisión** se refiere a qué tan **consistentes** (reproducibles) son los resultados entre sí.  
 Un resultado puede ser preciso y no exacto, exacto y no preciso, o ambas cosas a la vez.

**Leyenda**

- Valor verdadero (ideal)
- × Resultados obtenidos
- Dispersión de los resultados

**1. Alta exactitud y alta precisión (ideal)**

Los resultados están muy cerca del valor verdadero y entre sí.

➤ Ejemplo: medir la longitud de una pieza con un instrumento calibrado y estable.

- Error pequeño.
- Muy confiable.

**2. Alta precisión pero baja exactitud**

Los resultados son muy consistentes entre sí, pero están alejados del valor verdadero.

➤ Ejemplo: instrumento descalibrado que siempre se desvía de la referencia.

- Error grande (sesgo).
- Reproducible, pero incorrecto.

**3. Baja precisión pero alta exactitud**

Los resultados, en promedio, están cerca del valor verdadero, pero presentan gran variación.

➤ Ejemplo: mediciones afectadas por ruido o condiciones variables.

- Error promedio pequeño (sin sesgo).
- Poco consistentes.

**4. Baja exactitud y baja precisión**

Los resultados están alejados del valor verdadero y además muy dispersos.

➤ Ejemplo: mal instrumento y condiciones variables.

- Error grande (sesgo + dispersión).
- Poco confiable.

**Relación con el error**

| Situación                       | Error (respecto al valor verdadero) | Dispersión (entre resultados) |
|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| Alta exactitud y alta precisión | Pequeño                             | Pequeña                       |
| Alta precisión y baja exactitud | Grande (sesgo)                      | Pequeña                       |
| Baja precisión y alta exactitud | Pequeño (en promedio)               | Grande                        |
| Baja exactitud y baja precisión | Grande (sesgo)                      | Grande                        |

**¿Por qué es importante distinguirlas?**

La **exactitud** nos garantiza que estamos midiendo (o calculando) el valor correcto.

La **precisión** nos garantiza que los resultados son consistentes y reproducibles.

Para tomar decisiones confiables necesitamos instrumentos o métodos que ofrezcan tanto **exactitud** como **precisión**.

**Idea clave:**  
 Un número con muchas cifras no es necesariamente más exacto ni más preciso.  
 Lo importante es qué tan cerca está del valor verdadero y qué tan consistentes son los resultados.

**Ejemplo:**  
 12,3456 puede no ser más exacto que 12,3  
 si ambos provienen de mediciones con la misma precisión.

### ¿Y cómo intervienen las cifras significativas?

Las cifras significativas permiten comunicar el nivel de precisión con el que se expresa un valor, indicando qué dígitos aportan información relevante sobre la cantidad representada.

Pero debemos recuperar aquí la distinción que realizamos anteriormente:

cifras significativas expresadas  $\neq$  cifras significativas correctas.

Un número puede estar escrito con muchas cifras significativas y no ser una buena aproximación del valor verdadero.

Para hablar de cifras significativas correctas necesitamos incorporar información sobre el error. Es precisamente la relación entre cifras significativas y error relativo la que nos permite establecer un criterio cuantitativo de calidad.

De esta manera, los conceptos estudiados pueden relacionarse:

| Precisión             | Nivel del detalle confiable con que expresamos el resultado |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------|
| Exactitud             | Proximidad del resultado al valor verdadero                 |
| Cifras significativas | Forma de expresar información sobre la precisión            |
| Error                 | Permite cuantificar la diferencia entre valores             |

### Calidad de una aproximación

Por lo tanto, hablar de la calidad de una aproximación numérica implica considerar más de un aspecto. No basta con obtener un resultado con muchos dígitos. Debemos preguntarnos:

- ¿Qué tan próximo se encuentra de la solución buscada?
- ¿Con qué nivel de precisión puede expresarse de manera confiable?
- ¿Qué error estamos dispuestos a aceptar para el problema que estamos resolviendo?

Estas preguntas relacionan los conceptos de exactitud, precisión, error, tolerancia y cifras significativas, y permiten interpretar adecuadamente los resultados producidos por los métodos numéricos.

### **Redondeo y truncamiento**

Hasta aquí hemos visto que un resultado numérico puede contener más dígitos de los que necesitamos o podemos considerar significativos para el problema que estamos resolviendo.

Esto plantea una situación frecuente en Cálculo Numérico:

*¿Qué hacemos cuando debemos representar o utilizar un valor con una cantidad menor de cifras que las disponibles?*

Existen dos procedimientos habituales para reducir la cantidad de dígitos con los que representamos un número: el **truncamiento** y el **redondeo**.

Ambos producen una aproximación del valor original, pero lo hacen de manera diferente.

- **Truncamiento.** El truncamiento consiste en conservar los dígitos hasta una determinada posición y eliminar los restantes, sin modificar el último dígito conservado.

Por ejemplo, consideremos:  $x = 3,14159265 \dots$ . Si queremos expresarlo con cuatro cifras significativas mediante truncamiento:  $x = 3,141$

Los dígitos posteriores simplemente se eliminan.

Como consecuencia, el valor obtenido ya no coincide exactamente con el original. Se ha introducido un error:

$$E_t = |3,141559265 - 3,141|$$

$$E_t \approx 0,00059265$$

Este ejemplo permite observar algo importante: reducir la cantidad de cifras con las que representamos un número puede introducir un nuevo error en el cálculo.

- **Redondeo.** El redondeo también reduce la cantidad de dígitos utilizados, pero antes de eliminar los restantes considera su valor para decidir si debe modificarse la última cifra conservada.

Consideremos nuevamente:  $x = 3,14159265 \dots$  y supongamos que queremos conservar cuatro cifras significativas. La cuarta cifra significativa es 1 y la siguiente cifra es 5. Por lo tanto, aplicando el criterio usual del redondeo:

$$E_r = 3,142$$

El error introducido es:

$$E_t = |3,141559265 - 3,142|$$

$$E_t \approx 0,00040735$$

En este caso particular, el valor redondeado se encuentra más próximo al original que el valor obtenido mediante truncamiento.

### Comparación

Podemos observar ambos procedimientos sobre el mismo valor:

| Procedimiento                          | Resultado    | Error absoluto |
|----------------------------------------|--------------|----------------|
| Valor considerado                      | (3,14159265) | —              |
| Truncamiento a 4 cifras significativas | (3,141)      | (0,00059265)   |
| Redondeo a 4 cifras significativas     | (3,142)      | (0,00040735)   |

La diferencia fundamental es que el truncamiento elimina directamente los dígitos posteriores a la posición elegida, mientras que el redondeo utiliza el primer dígito descartado para decidir el valor de la última cifra conservada.

### ¿Por qué importa esto en Cálculo Numérico?

Los métodos numéricos suelen requerir numerosas operaciones. Si durante ellas utilizamos representaciones con una cantidad limitada de cifras, los pequeños errores introducidos al truncar o redondear **pueden incorporarse a operaciones posteriores.**

Por ejemplo, supongamos que durante un cálculo utilizamos:

$$\pi \approx 3,14$$

En lugar de

$$\pi \approx 3,14159265$$

La diferencia puede parecer pequeña. Sin embargo, si ese valor interviene repetidamente en otras operaciones, el error introducido puede afectar los resultados posteriores.

Esto conduce a una idea importante:

**Los errores introducidos durante un cálculo no necesariamente permanecen aislados; pueden propagarse a través de las operaciones posteriores.**

Por esta razón, en Cálculo Numérico no solo interesa conocer el error del resultado final, sino también comprender cómo se originan y cómo pueden evolucionar los errores durante el proceso de cálculo.

El término truncamiento también aparecerá posteriormente al estudiar diferentes métodos numéricos. Sin embargo, no siempre tendrá exactamente el significado de “eliminar cifras de un número”.

Cuando truncamos, estamos reduciendo la cantidad de cifras utilizadas para representar un valor.

En cambio, algunos métodos numéricos aproximan un procedimiento matemático que, en su formulación completa, involucraría una cantidad mayor —o incluso infinita— de términos, intervalos o información. Al limitar ese procedimiento se introduce lo que denominaremos **error de truncamiento del método**.

No necesitamos desarrollar todavía cómo se calcula ese error. Lo estudiaremos cuando aparezca en los métodos correspondientes.

### Propagación de errores

Los valores aproximados que utilizamos durante un cálculo pueden contener errores provenientes de mediciones, aproximaciones previas, redondeos o de los propios métodos numéricos.

Cuando uno de estos valores interviene en nuevas operaciones, su error también puede afectar los resultados obtenidos a partir de él. A este fenómeno lo denominamos propagación del error.

Consideremos un ejemplo sencillo. Supongamos que conocemos  $x = 10$  pero durante un cálculo utilizamos la aproximación  $x_a = 10,1$ . El error absoluto inicial es:

$$E_x = |10 - 10,1| = 0,1$$

Ahora utilicemos ese valor para calcular:

$$y = 2x$$

Con el valor verdadero obtendríamos:

$$y = 2(10) = 20$$

Mientras que utilizando la aproximación:

$$y = 2(10,1) = 20,2$$

El error del nuevo resultado es:

$$E_y = |20 - 20,2| = 0,2$$

El error absoluto, que inicialmente era 0,1 pasó a ser 0,2. El error inicial se ha propagado a través de la operación.

¿Los errores siempre aumentan?

No. Propagación no significa necesariamente amplificación. Dependiendo de las operaciones realizadas podría interpretarse intuitivamente como que “el error se hace cada vez mayor”. Consideremos ahora:

$$y = \frac{x}{10}$$

Utilizando nuevamente  $x = 10$  y  $x_a = 10,1$ , obtenemos:

$$y = 1$$

e

$$y_a = 1,01$$

Por lo tanto:

$$E_y = |1 - 1,01| = 0,01$$

El error absoluto ahora es menor que el error inicial. Esto muestra que **propagar un error no significa necesariamente amplificarlo**. Dependiendo de las operaciones realizadas y del problema considerado, un error puede aumentar, disminuir o manifestarse de diferente manera en el resultado.

### **Error absoluto y error relativo durante la propagación**

En el primer ejemplo,  $x = 10$  y  $x_a = 10,1$ . Con estos valores teníamos:

$$E_x = 0,1$$

Su error relativo es:

$$\varepsilon_x = \frac{0,1}{10} = 0,01 = 1\%$$

Al multiplicar por 2:

$$y = 20, y_a = 20,2$$

El error absoluto pasó a  $E_y = 0,2$ , pero el error relativo resulta:

$$\varepsilon_y = \frac{0,2}{20} = 0,01 = 1\%$$

Por lo tanto, aunque el error absoluto se duplicó, el error relativo permaneció igual. Esto refuerza una idea estudiada anteriormente: para analizar el efecto de un error no siempre basta con observar únicamente su magnitud absoluta; también debemos considerar su relación con la magnitud del valor involucrado.

### Cuando intervienen varios valores aproximados

La situación puede resultar más interesante cuando una operación utiliza más de un valor que contiene error.

Supongamos:  $x = 10$  e  $y = 5$  pero utilizamos  $x_a = 10,1$  e  $y_a = 4,9$ . Si calculamos:

$$z = x + y$$

El valor verdadero es  $z = 15$

Con las aproximaciones obtendremos:  $z_a = 10,1 + 4,9 = 15$

En este caso  $E_z = 0$

Los errores de ambas aproximaciones se compensaron. Pero si hubiéramos utilizado  $x_a = 10,1$  e  $y_a = 5,1$  obtendríamos:  $z_a = 10,1 + 5,1 = 15,2$ . Por lo tanto:

$$E_z = 0,2$$

Ahora los errores se reforzaron. Esto permite introducir una idea importante:

*El efecto de los errores sobre un resultado depende tanto de su magnitud como de las operaciones mediante las cuales los valores se combinan.*

Por esta razón, no podemos asumir simplemente que todos los errores se sumarán, ni tampoco que se compensarán.

### Un caso especialmente problemático: restar valores muy próximos

Consideremos:

$$x = 1,234567$$

$$y = 1,234123$$

Su diferencia es:

$$x - y = 0,000444$$

Supongamos ahora que, por trabajar con una representación limitada, utilizamos:

$$x_a = 1,235$$

$$y_a = 1,234$$

Entonces:

$$x_a - y_a = 0,001$$

Cada valor individual parece una aproximación razonablemente próxima al original. Sin embargo, al restarlos, el resultado obtenido 0,001 difiere considerablemente de 0,000444

¿Qué ocurrió?

Gran parte de los primeros dígitos de ambos números eran iguales: 1,234...

Al realizar la resta, esos dígitos se cancelan y el resultado depende precisamente de los dígitos posteriores, que eran los que conocíamos con menor detalle.

Por eso, al restar cantidades muy próximas, **los errores que parecían pequeños respecto de los valores originales pueden resultar grandes respecto del resultado de la resta.**

Este fenómeno se conoce como **cancelación o pérdida de cifras significativas.**

Esto significa que:

valores individualmente precisos no necesariamente producen resultado igualmente preciso.

La operación realizada también importa.

¿Por qué es importante en Cálculo Numérico?

Los métodos numéricos pueden requerir muchas operaciones sucesivas. Cada una puede trabajar con valores que ya contienen errores provenientes de etapas anteriores.

Por lo tanto, durante este proceso, los errores pueden propagarse, combinarse, compensarse o amplificarse.

Esto explica por qué dos procedimientos matemáticamente equivalentes pueden no producir resultados numéricos de igual calidad cuando se realizan utilizando una cantidad limitada de cifras.



### Propagación del error en operaciones elementales

Los ejemplos anteriores muestran que el error presente en los datos puede trasladarse al resultado de una operación. Sin embargo, este efecto no se manifiesta de la misma manera en todas las operaciones.

Analicemos algunos casos sencillos.

- **Suma y resta.** Supongamos que trabajamos con dos valores aproximados:

$$x_a = x + \Delta x$$

$$y_a = y + \Delta y$$

Donde  $\Delta x$  y  $\Delta y$  representan los errores presentes en cada valor.

Si realizamos una suma:

$$z = x + y$$

utilizando los valores aproximados obtenemos

$$z_a = (x + \Delta x) + (y + \Delta y)$$

y reorganizando

$$z_a = (x + y) + (\Delta x + \Delta y)$$

El error del resultado depende entonces de los errores que acompañaban a los valores originales. Estos errores pueden reforzarse o compensarse parcialmente dependiendo de sus signos. Por esta razón, si únicamente conocemos sus magnitudes, una forma conservadora de estimar el máximo error absoluto posible es:

$$E_z \leq E_x + E_y$$

Una idea similar se aplica a la resta. Esto permite establecer una primera observación:

En **sumas y restas**, los errores absolutos de los valores involucrados resultan especialmente relevantes para analizar el error del resultado.

- **Multiplicación y división.** Consideremos ahora:

$$z = xy$$

Si  $x$  e  $y$  contienen pequeños errores, ambos afectan al producto obtenido. Pero en este caso resulta especialmente útil analizar qué proporción representa cada error respecto de la magnitud de su propio valor.

Es decir, adquieren importancia los errores relativos:

$$\varepsilon_x = \frac{E_x}{|x|} \text{ y } \varepsilon_y = \frac{E_y}{|y|}$$

Para errores suficientemente pequeños, el error relativo del producto puede estimarse aproximadamente a partir de los errores relativos de los factores:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

si buscamos considerar una situación desfavorable en la que sus efectos se acumulen. Una relación semejante puede utilizarse para la división.

Por lo tanto, en **productos y cocientes**, resulta especialmente útil analizar cómo se combinan los errores relativos de los valores involucrados.

## Una síntesis

Podemos resumir estas ideas de manera general:

| Operación                 | Error especialmente útil para analizar su propagación |
|---------------------------|-------------------------------------------------------|
| Suma y resta              | Error absoluto                                        |
| Multiplicación y división | Error relativo                                        |

Estas relaciones no significan que el error resultante siempre sea exactamente la suma de los errores individuales. Los errores pueden tener diferentes signos y, en determinadas situaciones, compensarse parcialmente. Las expresiones anteriores permiten principalmente **estimar o acotar su posible efecto sobre el resultado**.

## Cuando el problema no está solamente en los datos

Hasta ahora hemos considerado errores que ya estaban presentes en los valores utilizados o que fueron introducidos al reducir la cantidad de cifras mediante redondeo o truncamiento.

Sin embargo, cuando los métodos numéricos se ejecutan mediante una computadora aparece otra cuestión fundamental:

*¿Puede una computadora representar exactamente cualquier número real?*

La respuesta es **no**.

## Representación finita de los números

Una computadora dispone de una cantidad finita de memoria para representar cada número. Por esta razón, muchos números reales no pueden almacenarse exactamente y deben ser representados mediante una aproximación.

Por ejemplo, números como:

$$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots$$

o

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

poseen una expansión decimal que no puede almacenarse completamente utilizando una cantidad finita de dígitos.

Pero hay algo todavía más interesante: **la computadora no representa internamente los números reales utilizando el sistema decimal**, sino normalmente mediante una representación binaria de punto flotante.

Esto provoca que incluso algunos números que parecen sencillos en decimal tampoco puedan representarse exactamente.

Un ejemplo conocido es 0,1. Aunque en nuestro sistema decimal posee una representación finita, en binario requiere una expansión que no termina. Por lo tanto, la computadora almacena un valor muy próximo a 0,1, pero no necesariamente de manera exacta.

La diferencia es extremadamente pequeña, pero existe.

#### Error de redondeo computacional

Cuando un número no puede representarse exactamente con la cantidad de dígitos disponibles, el sistema debe almacenar una aproximación.

La diferencia entre el valor que se desea representar y el valor efectivamente almacenado constituye una fuente de **error de redondeo**.

En la mayoría de los cálculos cotidianos este error es tan pequeño que resulta irrelevante. Sin embargo, los métodos numéricos pueden realizar una gran cantidad de operaciones, y los errores introducidos en unas operaciones pueden propagarse hacia las siguientes.

Por esta razón:

más operaciones no implica necesariamente un resultado más exacto

Un procedimiento numérico debe considerar no solamente la aproximación introducida por el propio método, sino también los efectos derivados de trabajar con **aritmética finita**.

Supongamos que una computadora pudiera almacenar solamente una cantidad muy limitada de cifras y necesitáramos representar:

$$\frac{1}{3}$$

Podríamos almacenar, por ejemplo 0,3333

El número almacenado ya contiene un pequeño error:  $\frac{1}{3} - 0,3333$ .

Si posteriormente ese valor interviene en muchas operaciones, ese error puede propagarse. Es decir, reaparece exactamente el fenómeno que acabamos de estudiar:

Representación → Error → Operaciones → Propagación

Esto permite comprender por qué el estudio del error es particularmente importante en Cálculo Numérico: **los métodos se aplican habitualmente mediante computadoras, pero las computadoras también trabajan con aproximaciones.**

### Fuentes de error en Cálculo Numérico

A lo largo de esta unidad hemos visto que los errores presentes en un resultado numérico pueden tener distintos orígenes. Identificarlos resulta importante porque no todos se producen por la misma causa ni pueden controlarse de la misma manera.

Podemos reconocer tres fuentes principales.

- **Errores asociados a los datos.** Los datos utilizados para resolver un problema no siempre son exactos. Pueden provenir de mediciones, observaciones experimentales o valores previamente aproximados.

Por ejemplo, si una longitud se informa como:  $L = 12,3 \text{ cm}$ , el valor utilizado ya posee una precisión limitada antes de comenzar cualquier cálculo.

Por lo tanto, un método numérico no puede recuperar información que no estaba presente en los datos originales. Los errores o incertidumbres presentes en ellos pueden propagarse hacia los resultados posteriores.

- **Errores de redondeo.** Las computadoras representan los números utilizando una cantidad finita de información. Como consecuencia, algunos valores no pueden almacenarse exactamente y deben reemplazarse por representaciones aproximadas. Estas diferencias producen **errores de redondeo.**

Además, durante una secuencia de operaciones, los resultados intermedios también pueden requerir redondeos. Los pequeños errores introducidos de esta manera pueden propagarse y, en determinadas situaciones, amplificarse.

- **Errores de truncamiento del método.** Otra fuente de error surge de los propios métodos numéricos.

En muchas situaciones, un método reemplaza un procedimiento matemático exacto por otro que puede realizarse mediante una cantidad finita de operaciones.

Por ejemplo, una expresión que requeriría infinitos términos puede aproximarse utilizando solamente una cantidad limitada de ellos. De manera semejante, una derivada, una integral o la solución de una ecuación diferencial pueden aproximarse mediante procedimientos numéricos que sustituyen el problema original por uno computacionalmente realizable.

La diferencia introducida por esta aproximación se denomina **error de truncamiento del método**.

Es importante distinguirlo del truncamiento de cifras estudiado anteriormente: **truncar cifras** significa limitar los dígitos utilizados para representar un número, mientras que **Error de truncamiento del método** surge al reemplazar un procedimiento matemático por una aproximación numérica finita.

Las características y formas de estimar estos errores dependen del método utilizado y serán estudiadas en las unidades correspondientes.

### Una mirada conjunta

Podemos sintetizar las principales fuentes de error de la siguiente manera:

| Fuente                         | ¿Dónde se origina?                                                       | Ejemplo                                                              |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <b>Datos</b>                   | En la información utilizada para plantear el problema                    | Una magnitud obtenida mediante medición                              |
| <b>Redondeo</b>                | En la representación finita y las operaciones realizadas con los números | Representar $(1/3)$ mediante una cantidad limitada de cifras         |
| <b>Truncamiento del método</b> | En la aproximación matemática realizada por el método numérico           | Sustituir un proceso infinito por una cantidad finita de operaciones |

Un resultado numérico puede estar afectado simultáneamente por **más de una de estas fuentes**, y los errores introducidos pueden propagarse durante el proceso de cálculo.

### **Cierre de la unidad: obtener un resultado no es suficiente**

Al comenzar esta unidad planteamos que el Cálculo Numérico permite obtener soluciones aproximadas para problemas que no siempre pueden resolverse de manera analítica o cuya resolución exacta puede resultar impracticable.

Pero también planteamos una segunda cuestión:

*¿Qué tan buena es la solución obtenida?*

A lo largo de la unidad hemos construido diferentes herramientas para comenzar a responder esta pregunta.

Cuando conocemos un valor verdadero o de referencia, podemos evaluar directamente la diferencia mediante el **error verdadero**, expresándolo de manera absoluta o relativa.

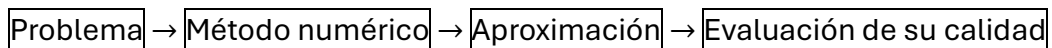
Cuando el valor verdadero es desconocido, no existe una única forma universal de evaluar la calidad de una aproximación. Los mecanismos utilizados dependen del problema y del método numérico aplicado.

En los métodos iterativos podemos observar la evolución de las aproximaciones sucesivas mediante el **error aproximado**. Una **tolerancia** permite establecer qué nivel de error estamos dispuestos a aceptar y utilizar esa condición como criterio de parada.

Las **cifras significativas** permiten expresar información acerca de la precisión con la que representamos un valor y, mediante su relación con el error relativo, pueden utilizarse para establecer determinados requisitos de precisión.

También hemos visto que obtener y representar una aproximación implica considerar los efectos del **redondeo**, el **truncamiento** y la **propagación de errores** durante las operaciones.

Por lo tanto, el proceso general que presentamos al comienzo de la unidad puede ahora completarse:



Y esta última etapa no constituye un paso accesorio. Forma parte del propio proceso de resolución numérica.

Podemos expresar entonces una de las ideas centrales de la asignatura:

**Un resultado numérico no está completo solamente porque hemos obtenido un número. También necesitamos comprender qué representa, con qué precisión podemos utilizarlo y qué información tenemos acerca de su error.**

Los conceptos estudiados en esta unidad constituyen una base general para analizar resultados numéricos, pero no agotan el estudio del error.

Cada familia de métodos posee características particulares que permitirán analizar su comportamiento y la calidad de las aproximaciones obtenidas. Al estudiar raíces de ecuaciones, sistemas de ecuaciones lineales, interpolación, integración, derivación y ecuaciones diferenciales, retomaremos estas ideas y estudiaremos cómo se manifiestan y controlan los errores en cada caso.

## Del problema al resultado: evaluar la calidad de una solución numérica

El Cálculo Numérico no termina cuando obtenemos un número. También debemos analizar qué tan bueno es ese resultado.



### ¿Qué factores intervienen en la calidad de la solución?



### ¿Cómo se relacionan estos factores?



### Idea clave

Un resultado numérico no está completo solamente porque hemos obtenido un número. También necesitamos comprender qué representa, con qué precisión podemos utilizarlo y qué información tenemos acerca de su error.



### Objetivo del Cálculo Numérico

Obtener soluciones aproximadas y ANALIZAR SU CALIDAD para que podamos usarlas con confianza en la toma de decisiones y en la resolución de problemas reales.



### Recordatorio final:

No existe un método "mejor" en todas las situaciones. El mejor método es el que, para un problema dado, alcanza la precisión requerida con el menor costo computacional y con la mayor confiabilidad posible.





