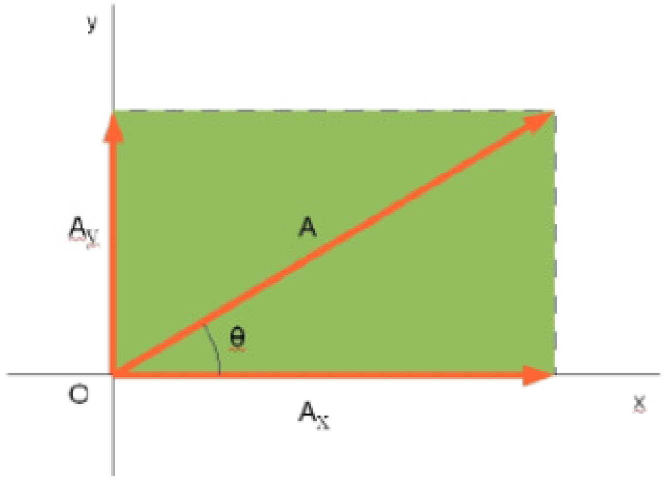
Vectores

Una magnitud *escalar* está determinada completamente por un único número con las unidades apropiadas y no tiene dirección, ni sentido. Una magnitud *vectorial* está determinada completamente por un número con las unidades apropiadas (módulo), una dirección y un sentido

Elementos de un vector

- En (0,0) tenemos el **punto de aplicación**.
- Intensidad o **módulo** (siempre es un número positivo) = |A|
- **Dirección** (orientación en el espacio de la recta que lo contiene.
- **Sentido** (indicado por la punta de la flecha).



Un vector se representa gráficamente mediante una flecha cuya dirección y sentido son los del vector y cuya longitud, en una escala adecuada, es proporcional al módulo.

Para calcular el ángulo θ y A podemos recurrir a lo que sabemos de trigonometría.

$$\theta = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{Ay}{Ax} \qquad |A| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

Analíticamente pueden representarse el vector V:

Como par ordenado: $\vec{v} = (2, 3)$ donde 2 y 3 son las componentes del vector o bien

En forma binomial o canónica: $\vec{v} = 2\,i + 3\,j$ donde i y j son los versores

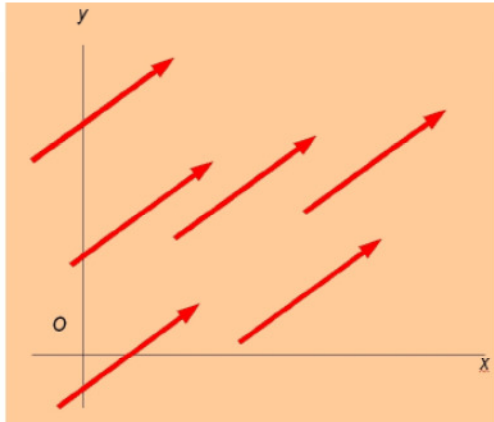
Módulo o intensidad: Módulo de $\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

Los versores son vectores unitarios sobre los ejes. i = (1,0) par el eje x j = (0,1) para el eje y

Operaciones con vectores

- **Igualdad de dos vectores**

Dos vectores son iguales, si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Se dice que son equipolentes.

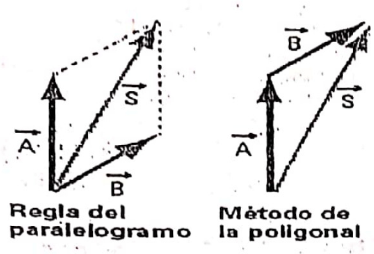


- **Suma de vectores**

Si compramos un kilo de uva y dos kilos de manzanas, habremos comprado 3 kilos de fruta. Si la clase dura tres horas y se ocupa 1 hora en la explicación teórica, el intervalo es de 15 minutos quedan 1 hora 45 minutos para la parte práctica. De estos ejemplos es claro que para sumar o restar magnitudes escalares (como la masa y el tiempo) basta con sumar o restar los números de la cantidades correspondientes.
Sin embargo no sucede lo mismo con las magnitudes vectoriales.
Si al atravesar un río de corriente rápida sujetamos el timón transversalmente a la corriente e imprimimos a la lancha una velocidad de 3 m/s, pero la velocidad de la corriente de agua es 4 m/s, la lancha, vista desde tierra se mueve oblicuamente, ¿cuál es módulo de su velocidad?, ¿en qué dirección exacta se mueve? Es claro que esta información no se obtiene sumando algebraicamente los números. Para responder a estar preguntas debemos aprender a sumar vectores.

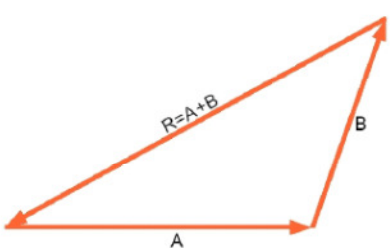
La suma de dos vectores es otro vector.

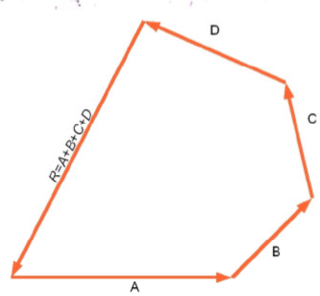
Existen dos métodos básicos equivalentes: el **método gráfico** que se basa en construcciones geométricas en escala y el **método analítico** que trabaja con las proyecciones de los vectores sobre un par de ejes perpendiculares.



Método gráfico para la suma de vectores

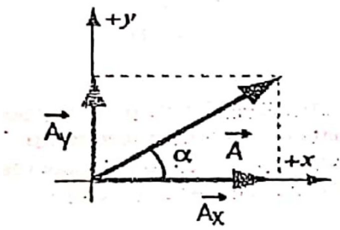
Para sumar dos vectores gráficamente se aplica la llamada **regla del paralelogramo**: el vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores dados.
Otra manera de obtener gráficamente el vector suma, que resulta de mucha utilidad para sumar más de dos vectores, es mediante el **método de la poligonal** que consiste en poner los vectores a sumar uno a continuación de otro: el vector suma es el vector que une el origen del primer vector con el extremo del último:





Ejemplos: Suma de 2 vectores. Suma de varios vectores (método gráfico)

Descomposicion de vectores

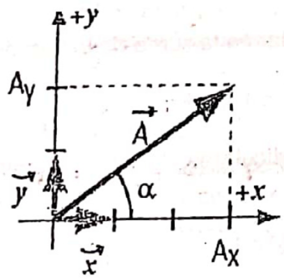


Observamos que el vector $\overline{A}$ es la diagonal del paralelogramo (rectángulo) de lados A_x y A_y.

Un vector puede expresarse como la suma de dos vectores. En la figura el vector $\vec{A}$ se ha descompuesto según las direcciones perpendiculares de los ejes x e y. Podemos decir que el vector $\vec{A}$ es la suma vectorial de los vectores

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

podemos escribir entonces $\vec{A} = A_x\,\breve{\imath} + A_y\,\breve{\jmath}$ donde los números A_x y A_y son las componentes del vector $\vec{A}$. Pueden ser positivos o negativos o nulos.



Las componentes del vector $\overline{A}$ están relacionadas con su módulo y el ángulo que éste forma con uno de los ejes (convencionalmente se elige relacionarlo con el eje *x*.). Los vectores $\overline{A}$, $\overline{Ax}$ y $\overline{Ay}$ forman un triángulo rectángulo, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras puede determinarse el módulo del vector y, con funciones trigonométricas, hallarse el ángulo que forma con el eje *x*. Conocidas las componentes queda determinado en qué cuadrante está el vector y utilizando la función arcotangente y trabajando con los módulos de las componentes se puede ubicar el ángulo agudo entre el vector y la dirección horizontal.

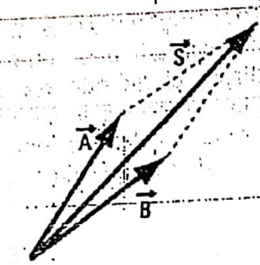
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}6 \qquad \alpha = arctg\frac{|A_y|}{|A_x|} = arctg\frac{2}{3} = 33{,}7^\circ$$

Si, inversamente, se conoce el módulo del vector $\overline{A}$ y el ángulo α, se pueden calcular sus componentes como:

$$A_x = \left|\bar{A}\right|\cos\alpha = 3{,}6\cdot\cos 33{,}7^\circ = 3 \qquad A_y = \left|\bar{A}\right| sen\alpha = 3{,}6\cdot sen 33{,}7^\circ = 2$$

Suma analítica de vectores

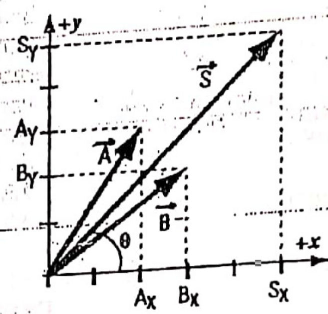
Consideremos dos vectores cualesquiera con origen en el mismo punto. Si se toma un par de ejes cartesianos ortogonales arbitrarios y se descomponen ambos vectores según estos ejes, cada vector se expresará en función de sus componentes. La componente *x* del vector suma se calcula, entonces, como la suma de las componentes *x* de los vectores dados. Un cálculo similar permite calcular la componente y del vector suma. El vector suma quedará de este modo expresado en componentes ortogonales y si se lo necesita, es posible calcular su módulo y su dirección utilizando el teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.



$$\bar{S} = \bar{A} + \bar{B}$$
$$\bar{S} = S_x\breve{x} + S_y\breve{y}$$

donde

$$S_x = A_x + B_x$$
$$S_y = A_y + B_y$$



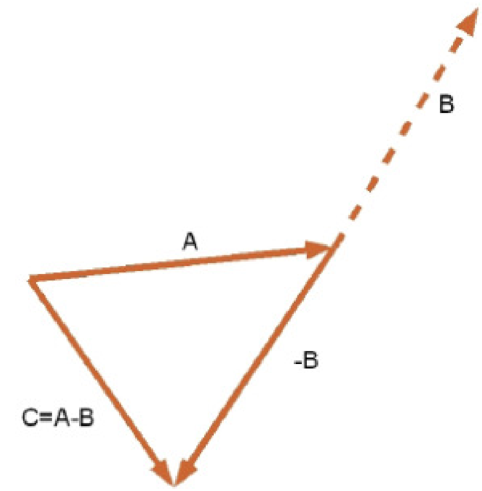
$$\vec{S} = (2\breve{x} + 3\breve{y}) + (3\breve{x} + 2\breve{y})$$
$$\vec{S} = 5\breve{x} + 5\breve{y}$$

donde

$$S_x = 2 + 3$$
$$S_y = 3 + 2$$
$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^{\,2} + S_y^{\,2}} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07$$
$$\theta = arctg\frac{S_y}{S_x} = 45^\circ$$

- **Diferencia de vectores**

Es un caso especial de la suma. Se hace $\vec{A} + (-\vec{B})$

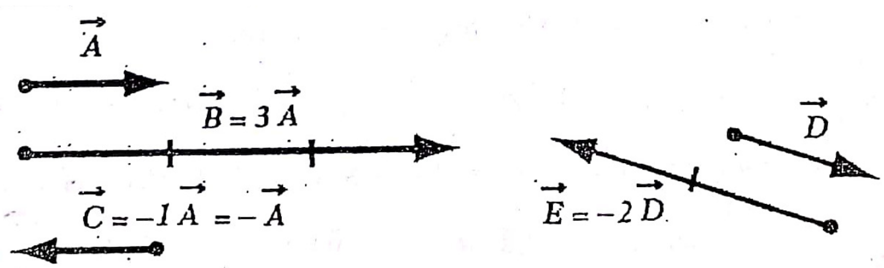


- **Multiplicación o división de un vector por un escalar**

El resultado de la multiplicación o de la división es un vector. El módulo del vector se multiplica o divide por el escalar.

Si el escalar es positivo, la dirección y sentido del resultado son los mismos que los del vector original. Si el escalar es negativo, la dirección del resultado es la misma que la del vector original, pero su sentido es opuesto.

Las unidades del vector resultado son el producto de las unidades del escalar y el vector. En caso de que el escalar no tenga unidades serán las unidades del vector original.

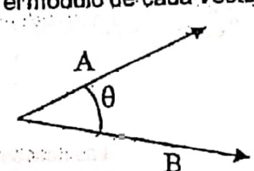


Observemos que si se multiplica un vector por el número −1 se obtiene el vector opuesto:

- **Producto escalar entre dos vectores**

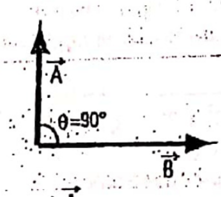
Consideremos dos vectores cualesquiera A y B. Llamamos producto escalar de A por B, y lo denotamos A • B, al escalar que resulta de multiplicar el módulo de cada vector por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. En símbolos:

$$A \bullet B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos\theta$$



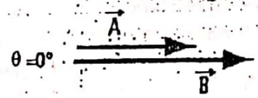
Si los vectores están dados en su forma binomial, el producto escalar es la suma de los productos de componente por componente de cada vector.

$A = a\, i + b\, j \qquad B = c\, i + d\, j$ entonces $\qquad A \bullet B = a \,.\, c + b \,.\, d$



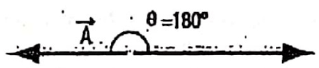
Si los vectores son perpendiculares, $\theta = 90°$, entonces el producto escalar se anula porque

$A \bullet B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos 90° = 0$



Si los vectores tiene igual dirección y sentido, el producto escalar es

$A \bullet B \quad A.B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos 0° = |A| \,.\, |B|$



Si los vectores tienen igual dirección pero sentidos opuestos, $\quad A \bullet B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos 180° = -\,|A| \,.\, |B|$