3.3 Inducción matemática

INTRODUCCIÓN

Enlaces

¿Cuál es la fórmula de la suma de los n primeros enteros positivos impares? Las sumas de los primeros impares positivos, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, son

$$1 = 1, \qquad 1 + 3 = 4, \qquad 1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16, \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

A partir de estos valores, es razonable suponer que la suma de los n primeros enteros impares es n^2. Necesitamos un método para *demostrar* que esta suposición es correcta, si es que realmente lo es.

La inducción matemática es una técnica extremadamente importante que se puede utilizar para demostrar enunciados de este tipo. Como veremos en esta sección y en capítulos siguientes, la inducción matemática se usa para demostrar resultados sobre una gran variedad de objetos distintos. Por ejemplo, se emplea para demostrar propiedades acerca de la complejidad de los algoritmos, estudiar si son correctos ciertos tipos de programas de ordenador o teoremas sobre grafos y árboles, así como un amplio abanico de identidades y desigualdades.

En esta sección describiremos cómo se puede utilizar la técnica de inducción matemática y por qué es una técnica válida de demostración. Es muy importante dejar claro que la inducción matemática sólo se puede aplicar en la demostración de resultados que se han obtenido de alguna otra forma. *No* es una herramienta para descubrir fórmulas o teoremas.

Hay varios ejemplos interesantes de inducción matemática que pueden ayudarnos a recordar cómo funciona este principio. Uno de éstos tiene que ver con un grupo de personas formando una cola. Alguien le susurra un secreto al oído a la primera persona de la cola, y cada persona le cuenta el secreto a la siguiente persona de la cola inmediatamente después de escucharlo. Sea $P(n)$ la proposición que afirma que la persona n conoce el secreto. Entonces, $P(1)$ es verdadera, puesto que alguien le ha contado el secreto a la primera persona de la cola; $P(2)$ es verdadera, pues la primera persona reveló el secreto a la segunda; $P(3)$ es verdadera porque la segunda persona le cuenta el secreto a la tercera, y así sucesivamente. Esto se ilustra en la Figura 1. (Obviamente, se ha supuesto que cada persona transmite el secreto sin modificarlo, ¡lo que no suele ser cierto en la vida normal!).

Otra forma de ilustrar el principio de inducción matemática es considerar una fila infinita de fichas de dominó colocadas de pie, etiquetadas con los números 1, 2, 3, ..., n. Sea $P(n)$ la proposición que afirma que la ficha n se cae. Si cae la primera ficha, es decir, si $P(1)$ es verdadera, y si siempre que la ficha n se caiga también se cae la $(n + 1)$, es decir, si $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ es verdadera, entonces se caerán todas las fichas. Esto se ilustra en la Figura 2.

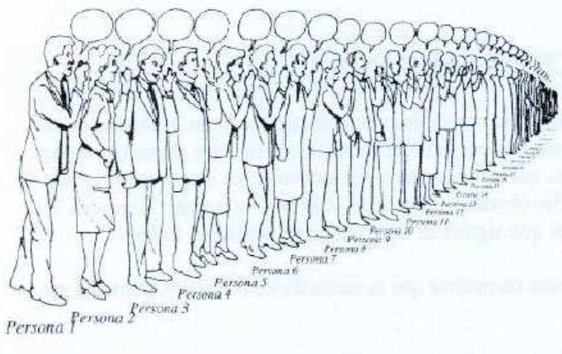

Figura 1. Personas transmitiendo un secreto.

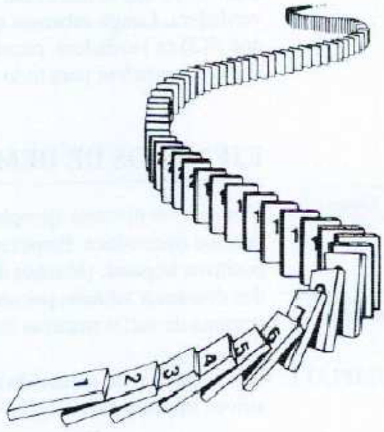

Figura 2. Ilustración usando fichas de dominó de cómo funciona la técnica de inducción matemática.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Muchos teoremas afirman que $P(n)$ es verdadera para todos los enteros positivos n, donde $P(n)$ es una función proposicional o predicado como, por ejemplo, la sentencia $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ o la propiedad $n \leq 2^n$. La inducción matemática es una técnica para demostrar esta clase de teoremas. En otras palabras, la inducción matemática se utiliza para demostrar proposiciones de la forma $\forall n\, P(n)$, donde el dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Una demostración por inducción de que $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n consiste en dos pasos:

PASO BASE: Se muestra que la proposición $P(1)$ es verdadera.

PASO DE INDUCCIÓN: Se muestra que la implicación $P(k) \to P(k+1)$ es verdadera para todo entero positivo k.

Aquí, la sentencia $P(k)$ para un entero positivo fijo k se denomina **hipótesis de inducción.** Cuando se completan los dos pasos de una demostración por inducción matemática, hemos demostrado que $P(n)$ es verdadera para todos los enteros positivos n; esto es, hemos visto que $\forall n\, P(n)$ es verdadera.

Expresado como regla de inferencia, esta técnica de demostración se puede enunciar como sigue:

$$[P(1) \wedge \forall k\, (P(k) \to P(k+1))] \to \forall n\, P(n).$$

Debido a la importancia de la inducción matemática, vale la pena explicar en detalle los pasos de una demostración utilizando esta técnica. Lo primero que tenemos que hacer para demostrar que $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n es mostrar que $P(1)$ es verdadera. Esto no es más que mostrar que la sentencia particular obtenida al sustituir n por 1 en $P(n)$ es verdadera. Luego, debemos demostrar que $P(k) \to P(k+1)$ es verdadera para todo entero positivo k. Para demostrar que esta implicación es verdadera para todo entero positivo k, necesitamos mostrar que $P(k+1)$ no puede ser falsa cuando $P(k)$ es verdadera. Esto se puede hacer suponiendo que $P(k)$ es verdadera y mostrando que *bajo esta hipótesis* $P(k+1)$ debe ser también verdadera.

Observación: ¡En una demostración por inducción matemática *no* se supone que $P(k)$ es verdadera para todos los enteros positivos! Sólo se muestra que *si se supone* que $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es también verdadera. Por tanto, una demostración por inducción no es un caso de razonamiento circular.

Cuando se usa la inducción matemática para demostrar un teorema, vemos primero que $P(1)$ es verdadera. Luego sabemos que $P(2)$ es verdadera, puesto que $P(1)$ implica $P(2)$. Luego sabemos que $P(3)$ es verdadera, puesto que $P(2)$ implica $P(3)$. Continuando del mismo modo, vemos que $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n.

EJEMPLOS DE DEMOSTRACIONES POR INDUCCIÓN

Enlaces

Vamos a ver diversos ejemplos que ilustran cómo se demuestran teoremas mediante la técnica de inducción matemática. Empezaremos demostrando una fórmula para la suma de los n primeros enteros positivos impares. (Muchos de los teoremas que demostramos por inducción en esta sección se pueden demostrar también por otros métodos. No obstante, en general, vale la pena intentar demostrar un teorema de varias maneras distintas, puesto que alguna de ellas puede en ocasiones fallar).

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 1 Usa el método de inducción matemática para demostrar que la suma de los n primeros enteros positivos impares es n^2.

Solución: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que la suma de los n primeros enteros positivos impares es n^2. En primer lugar, debemos completar el caso base: debemos verificar que $P(1)$ es verdadera. Luego, llevaremos a cabo el paso de inducción, esto es, debemos mostrar que $P(k+1)$ es verdadera cuando se supone que $P(k)$ es verdadera.

PASO BASE: $P(1)$ afirma que la suma del primer entero impar es 1^2. Esto es cierto, puesto que el primer entero positivo impar es 1.

PASO DE INDUCCIÓN: Para completar el paso de inducción debemos demostrar que la proposición $P(k) \to P(k+1)$ es verdadera para todo entero positivo k. Para hacer esto, supongamos que $P(k)$ es verdadera para un entero positivo k, esto es,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2.$$

[Observa que el k-ésimo entero positivo impar es $(2k-1)$, ya que este entero se obtiene sumando 2 un total de $k-1$ veces a 1]. Debemos demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, suponiendo que $P(k)$ es verdadera. Ten en cuenta que $P(k+1)$ es la sentencia que afirma que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Por tanto, suponiendo que $P(k)$ es verdadera, se sigue que

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) &= [1 + 3 + \cdots + (2k-1)] + (2k+1)\\ &= k^2 + (2k+1)\\ &= k^2 + 2k + 1\\ &= (k+1)^2.\end{aligned}$$

Esto muestra que $P(k) \to P(k+1)$. Observa que hemos usado la hipótesis de inducción $P(k)$ en la segunda igualdad para reemplazar la suma de los primeros k enteros positivos impares por k^2.

Puesto que $P(1)$ es verdadera y que $P(k) \to P(k+1)$ también lo es para todo entero positivo k, el principio de inducción matemática muestra que $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n. ◀

En el Ejemplo 2 utilizamos el principio de inducción para demostrar una desigualdad.

EJEMPLO 2 Usa el método de inducción para demostrar la desigualdad

$$n < 2^n$$

para todo entero positivo n.

Solución: Sea $P(n)$ la proposición «$n < 2^n$».

PASO BASE: $P(1)$ es verdadera, puesto que $1 < 2^1 = 2$.

PASO DE INDUCCIÓN: Suponemos que $P(k)$ es verdadera para el entero positivo k. Esto es, suponemos que $k < 2^k$. Necesitamos demostrar que $P(k+1)$ es verdadera. Tenemos que ver que $k + 1 < 2^{k+1}$. Sumando 1 en ambos lados de la desigualdad $k < 2^k$, y teniendo en cuenta que $1 \leq 2^k$, tenemos

$$k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Hemos demostrado que $P(k+1)$ es verdadera, es decir, que $k + 1 < 2^{k+1}$, basándonos en la suposición de que $P(k)$ es verdadera. Se ha completado el paso de inducción.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, se ha demostrado que $n < 2^n$ para todo n positivo. ◀

EJEMPLO 3 Utiliza el método de inducción para demostrar que $n^3 - n$ es divisible por 3 siempre que n sea un entero positivo.

Solución: Para construir la demostración, definamos $P(n)$ como la sentencia «$n^3 - n$ es divisible por 3».

PASO BASE: $P(1)$ es verdadera, puesto que $1^3 - 1 = 0$ es divisible por 3.

PASO DE INDUCCIÓN: Suponemos que $P(k)$ es verdadera, esto es, que $k^3 - k$ es divisible por 3. Debemos mostrar que $P(k + 1)$ es verdadera, esto es, tenemos que demostrar que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ es divisible por 3. Observa que

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1)\\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).\end{aligned}$$

Como los dos términos de esta suma son divisibles por 3 (el primero por la suposición del paso de inducción y el segundo porque es tres veces un entero), se sigue que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ también es divisible por 3. Esto completa el paso de inducción. Por tanto, por el principio de inducción matemática, $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo n entero positivo. ◀

A veces necesitamos demostrar que $P(n)$ es verdadera para $n = b, b + 1, b + 2, \ldots$, donde b es un entero diferente a 1. Para ello se puede utilizar el principio de inducción sin más que cambiar el paso base. Por ejemplo, consideremos el Ejemplo 4, que demuestra que una fórmula es válida para todos los enteros no negativos, por lo que necesitamos demostrar que $P(n)$ es verdadera para $n = 0, 1, 2, \ldots$

EJEMPLO 4 Usa el método de inducción para demostrar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

para todos los enteros n no negativos.

Solución: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que esta fórmula es correcta para el entero n.

PASO BASE: $P(0)$ es verdadera, puesto que $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

PASO DE INDUCCIÓN: Suponemos que $P(k)$ es verdadera. Para llevar a cabo el paso de inducción usando esta suposición, se debe demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera, es decir,

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Utilizando la hipótesis de inducción $P(k)$, se sigue que

$$\begin{aligned}1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 2^{k+1}\\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}\\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1\\ &= 2^{k+2} - 1.\end{aligned}$$

Con esto se finaliza el paso de inducción, lo que completa la demostración. ◀

Como se ve en el Ejemplo 4, para demostrar que $P(n)$ es verdadera para $n = b, b + 1, b + 2, \ldots$ donde b es un entero diferente de 1, empleando el principio de inducción matemática, mostramos que $P(b)$ es verdadera (el paso base) y entonces demostramos que la implicación $P(k) \to P(k + 1)$ es verdadera para $k = b, b + 1, b + 2, \ldots$ (el paso de inducción). Ten en cuenta que b puede ser negativo, cero o positivo. Haciendo una analogía con el ejemplo de las fichas de dominó que se vio antes, imagina que empezamos derribando la ficha que está en la posición b (el paso base) y cada una de las fichas que cae va derribando la siguiente (el paso de inducción). Dejamos al lector el demostrar que esta forma de inducción es válida (véase el Problema 76).

La fórmula dada en el Ejemplo 4 es un caso especial de un resultado general para la suma de términos de una progresión geométrica (Teorema 1 de la Sección 3.2). Usaremos el principio de inducción matemática para proporcionar una demostración alternativa a esta fórmula.

EJEMPLO 5 **Suma de una progresión geométrica** Demuestra por inducción esta fórmula para la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica:

$$\sum_{i=0}^{n} ar^{j} = a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{n} = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}, \qquad \text{cuando } r \neq 1.$$

Solución: Para demostrar esta fórmula utilizando el principio de inducción, sea $P(n)$ la proposición que afirma que esta fórmula es correcta para la suma de los primeros $n + 1$ términos de una progresión geométrica.

PASO BASE: $P(0)$ es verdadera, puesto que

$$a = \frac{ar - a}{r-1}.$$

PASO DE INDUCCIÓN: Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Esto es, supongamos que

$$a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{k} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1}.$$

Para demostrar que esto implica que $P(k + 1)$ es verdadera, sumamos ar^{k+1} a ambos lados de la ecuación para obtener

$$a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{k} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + ar^{k+1}.$$

Reescribiendo el lado derecho de la ecuación, se ve que

$$\frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r-1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}.$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones, se tiene que

$$a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{k} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}.$$

Esto muestra que si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ debe ser también verdadera. Así, se completa el paso de inducción y se demuestra que la fórmula para la suma de los términos de una serie geométrica es correcta. ◀

Como se mencionó anteriormente, la fórmula del Ejemplo 4 es la fórmula del Ejemplo 5 para $a = 1$ y $r = 2$. El lector podrá verificar que poniendo estos valores de a y r en la fórmula general se obtiene la dada en el Ejemplo 4.

El siguiente ejemplo demuestra una importante desigualdad para la suma de los inversos de un conjunto de enteros positivos.

EJEMPLO 6 **Una desigualdad para los números armónicos** Los **números armónicos** H_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, se definen como

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}.$$

Por ejemplo:

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

Usamos la inducción matemática para demostrar que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

para todo número entero no negativo n.

Solución: Para llevar a cabo la demostración, consideremos la proposición $P(n)$ que afirma que $H_{2^n} \geq 1 + n/2$.

PASO BASE: $P(0)$ es verdadera, puesto que $= H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + 0/2$.

PASO DE INDUCCIÓN: Suponemos que $P(k)$ es verdadera, por lo que $H_{2^k} \geq 1 + k/2$. Hemos de demostrar que $P(k+1)$, que es la sentencia $H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1)/2$, tiene que ser verdadera bajo esta hipótesis de inducción. Se puede ver que

$$\begin{aligned}
H_{2^{k+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} && \text{definición de número armónico} \\
&= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} && \text{definición de número armónico} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} && \text{por hipótesis de inducción} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k \cdot \frac{1}{2^k+1} && \text{puesto que hay } 2^k \text{ términos mayores o iguales que } 1/2^{k+1} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{k+1}{2}.
\end{aligned}$$

Esto completa el paso de inducción de la demostración. Por tanto, la desigualdad para los números armónicos es válida para todos los enteros n no negativos. ◀

Observación: La desigualdad establecida muestra que la **serie armónica**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

es una serie infinita divergente. Éste es un ejemplo importante sobre el estudio de series infinitas

El Ejemplo 7 muestra cómo utilizar la inducción matemática para verificar una fórmula para el número de subconjuntos de un conjunto finito.

EJEMPLO 8 Demuestra que si n es un entero positivo,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2.$$

Solución: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que la suma de los n primeros enteros positivos es $n(n + 1)/2$. Debemos hacer dos cosas para demostrar que $P(n)$ es verdadera para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ Debemos ver que $P(1)$ es verdadera y que la implicación $P(k) \to P(k + 1)$ es verdadera para $k = 1, 2, 3, \ldots$

PASO BASE: $P(1)$ es verdadera, puesto que $1 = 1(1 + 1)/2$.

PASO DE INDUCCIÓN: Supongamos que $P(k)$ es verdadera, por lo que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = k(k + 1)/2.$$

Bajo esta hipótesis, se debe demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera, es decir, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = (k + 1)[(k + 1) + 1]/2 = (k + 1)(k + 2)/2$$

es también verdadera. Sumando $k + 1$ a ambos lados de la ecuación de $P(k)$ se obtiene

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) &= k(k + 1)/2 + (k + 1) \\ &= [(k/2) + 1](k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2)/2. \end{aligned}$$

Esta última ecuación muestra que $P(k + 1)$ es verdadera. Esto completa el paso de inducción y la demostración. ◀

EJEMPLO 9 Utiliza la inducción matemática para demostrar que $2^n < n!$ para todo entero positivo n mayor o igual que 4.

Solución: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que $2^n < n!$

PASO BASE: Para demostrar la desigualdad para $n \geq 4$ se requiere que el paso base sea $P(4)$. Observa que $P(4)$ es verdadera, puesto que $2^4 = 16 < 4! = 24$.

PASO DE INDUCCIÓN: Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Esto es, supongamos que $2^k < k!$ Debemos demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, esto es, tenemos que demostrar que $2^{k+1} < (k+1)!$ Multiplicando ambos lados de la desigualdad $2^k < k!$ por 2, tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^k &< 2 \cdot k! \\ &< (k+1) \cdot k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Esto demuestra que $P(k+1)$ es verdadera cuando $P(k)$ es verdadera, lo que completa el paso de inducción de la demostración. Por tanto, se ha demostrado que $2^n < n!$ es verdadera para todo entero n, $n \geq 4$. ◀

EJEMPLO 10 Usa la inducción matemática para demostrar la siguiente generalización de una de las leyes de De Morgan.

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j},$$

para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos del conjunto universal U y $n \geq 2$.

Solución: Sea $P(n)$ la identidad anterior para n conjuntos.

PASO BASE: La sentencia $P(2)$ establece que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Ésta es una de las leyes de De Morgan; fue demostrada en la Sección 1.7.

PASO DE INDUCCIÓN: Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Esto es,

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$$

siempre que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sean subconjuntos del conjunto universal U. Para llevar a cabo el paso de inducción se debe demostrar que si esta igualdad se cumple para k subconjuntos de U cualesquiera, debe ser también válida para $k+1$ subconjuntos de U. Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ son subconjuntos de U. Si suponemos que se cumple la hipótesis de inducción, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} \\ &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} \quad \text{por la ley de De Morgan} \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} \quad \text{por hipótesis de inducción} \\ &= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración por inducción. ◀

Material extraído de:

Rosen, Keneth. "Matemática discreta y sus aplicaciones". Traducción de Pérez Morales, José Manuel. McGraw-Hill/Interamericana de España. 2004. Quinta Edición. Capitulo 2.