3.2 Sucesiones y sumatorios

INTRODUCCIÓN

Las sucesiones se utilizan para representar listas ordenadas de elementos y se emplean en matemática discreta de muchas formas. Se pueden usar para representar soluciones de ciertas clases de problemas de recuento, como veremos en el Capítulo 6. Son también una estructura de datos importante en ciencias de la computación. Esta sección ofrece un repaso del concepto de función, así como de la notación utilizada para representar sucesiones y sumas de los términos de una sucesión.

Cuando los elementos de una sucesión infinita se pueden enumerar, este conjunto se llama contable o numerable. Concluiremos esta sección con unos comentarios sobre conjuntos numerables y no numerables. Demostraremos que el conjunto de los números racionales es numerable, pero que el conjunto de los números reales no lo es.

SUCESIONES

Una sucesión es una estructura discreta usada para representar listas ordenadas.

DEFINICIÓN 1 Una *sucesión* es una función de un subconjunto del conjunto de los enteros (generalmente, bien el conjunto $\{0, 1, 2, ...\}$, bien el conjunto $\{1, 2, 3, ...\}$) en un conjunto S. Utilizamos la notación a_n para denotar la imagen del entero n. Llamamos a a_n un *término* de la sucesión.

Empleamos la notación $\{a_n\}$ para describir la sucesión. (Observa que a_n representa un término individual de la sucesión $\{a_n\}$. Ten en cuenta también que la notación $\{a_n\}$ para una sucesión entra en conflicto con la notación de conjunto. No obstante, el contexto en el que usamos estos conceptos siempre nos aclarará cuándo estamos tratando con una sucesión y cuándo con un conjunto. Observa también que la elección de la letra a es arbitraria).

Describimos las sucesiones enumerando sus términos en orden creciente de subíndices.

EJEMPLO 1 Considera la sucesión $\{a_n\}$, donde

$$a_n = 1/n.$$

La lista de los términos de esta sucesión, comenzando por a_1, es decir,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ...,$$

comienza por

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$$ ◄

DEFINICIÓN 2 Una *progresión geométrica* es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ..., ar^n,$$

donde el *término inicial* a y la *razón* r de la progresión son números reales.

Observación: Una progresión geométrica es una analogía discreta de la función exponencial $f(x) = ar^x$.

EJEMPLO 2 Las sucesiones $\{b_n\}$, $b_n = (-1)^n$; $\{c_n\}$, $c_n = 2 \cdot 5^n$, y $\{d_n\}$, $d_n = 6 \cdot (1/3)^n$ son progresiones geométricas con término inicial y razón iguales a -1 y -1; 10 y 5, y 2 y 1/3, respectivamente. La lista de términos b_1, b_2, b_3, b_4, ... comienza por

$$-1, 1, -1, 1, ...;$$

la lista de términos c_1, c_2, c_3, c_4, ... comienza por

$$10, 50, 250, 1.250, ...,$$

y la lista de términos d_1, d_2, d_3, d_4, ... comienza por

$$2, 2/3, 2/9, 2/27, ...$$ ◄

DEFINICIÓN 3 Una *progresión aritmética* es una sucesión de la forma

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+nd,$$

donde el *término inicial* a y la *diferencia* d son números reales.

Observación: Una progresión aritmética es una analogía discreta de la función lineal $f(x) = dx + a$.

EJEMPLO 3 Las sucesiones $\{s_n\}$, con $s_n = -1 + 4n$, y $\{t_n\}$, con $t_n = 7 - 3n$, son dos progresiones geométricas con término inicial y diferencia iguales a -1 y 4, y 7 y -3, respectivamente. La lista de términos, comenzando por el término para $n = 0$, $s_0, s_1, s_2, s_3, ...$ comienza por

$$-1, 3, 7, 11, ...,$$

y la lista de términos $t_0, t_1, t_2, t_3, ...$ comienza por

$$7, 4, 1, -2, ...$$ ◀

En ciencias de la computación se usan frecuentemente las sucesiones de la forma $a_1, a_2, ..., a_n$. Estas sucesiones finitas a veces se llaman también **cadenas.** Una cadena también se puede denotar como $a_1a_2 \cdots a_n$. (Recuerda que en la Sección 1.1 se introdujeron las cadenas de bits, que no son más que sucesiones finitas de bits). La **longitud** de una cadena S es el número de términos de la cadena. La **cadena vacía,** denotada por λ, es la cadena que no tiene términos. La cadena vacía tiene longitud cero.

EJEMPLO 4 La cadena *abcd* es una cadena de longitud cuatro. ◀

SUCESIONES ESPECIALES DE ENTEROS

Un problema común en matemática discreta es encontrar una fórmula o regla general para construir los términos de una sucesión. A veces sólo se conocen unos pocos términos de la sucesión que resuelve un problema; el objetivo es identificar esta sucesión. Incluso aunque los términos iniciales de una sucesión no determinen la sucesión completa (después de todo, hay infinitas sucesiones que coinciden en un conjunto finito de términos iniciales), conocer algunos de los primeros términos puede ayudar a formular una conjetura acerca de la sucesión. Una vez construida esta conjetura, se puede intentar verificar si tenemos o no la sucesión correcta.

Cuando intentamos deducir una fórmula o regla válida para los términos de una sucesión a partir de sus términos iniciales, hay que buscar un patrón común en estos términos. También se puede intentar determinar cómo se ha generado un término a partir de los que le preceden. Hay muchas preguntas que se podrían formular; algunas de las más útiles son:

- ¿Hay grupos de términos del mismo valor?
- ¿Se pueden obtener los términos a partir de otros anteriores sumando una cantidad fija o una cantidad que depende de la posición del término en la sucesión?
- ¿Se pueden obtener los términos a partir de otros previos multiplicando por una cantidad particular?
- ¿Se pueden obtener los términos combinando otros previos de alguna forma?
- ¿La relación de términos es cíclica?

EJEMPLO 5 Obtén una fórmula para cada una de las sucesiones con los cinco primeros términos siguientes: (a) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16; (b) 1, 3, 5, 7, 9; (c) 1, -1, 1, -1, 1.

Ejemplos adicionales

Solución: (a) Podemos reconocer que los denominadores de los términos son potencias de 2. La sucesión con $a_n = 1/2^{n-1}$ se ajusta a estos términos. La sucesión propuesta es una progresión geométrica con $a = 1$ y $r = 1/2$.

(b) Podemos observar que cada término se obtiene sumando 2 al anterior. La sucesión puede ser aquella dada por el término $a_n = 2n - 1$, que es una progresión aritmética con $a = 1$ y $d = 2$.

(c) Los términos son 1 y -1 alternativamente. La sucesión con $a_n = (-1)^{n+1}$ es una posible candidata. La sucesión propuesta es una progresión geométrica con $a = -1$ y $r = -1$. ◀

Los Ejemplos 6 y 7 ilustran cómo analizar las sucesiones para obtener cómo se construyen los términos.

EJEMPLO 6 ¿Cómo se pueden generar los términos de una sucesión si los diez primeros términos son 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

Solución: Observa que el entero 1 aparece una vez, 2 aparece dos veces, 3 tres veces y 4 cuatro veces. Una regla razonable para generar esta sucesión es que el entero n aparezca n veces exactamente, por lo que los siguientes cinco términos de la sucesión serían 5, los siguientes seis serían 6 y así sucesivamente. La sucesión construida de esta forma se ajustaría a los términos iniciales dados. ◀

EJEMPLO 7 ¿Cómo se pueden generar los términos de una sucesión si los diez primeros términos son 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59?

Solución: Observa que cada uno de los primeros diez términos de esta sucesión se obtiene sumando 6 al término anterior. (Podemos darnos cuenta de este hecho viendo que la diferencia entre dos de ellos consecutivos es 6). Por tanto, el término n-ésimo se podría producir comenzando por 5 y sumando 6 un total de $n - 1$ veces; esto es, una suposición razonable es que el término n-ésimo es $5 + 6(n - 1) = 6n - 1$. (Esto es una progresión aritmética con $a = 5$ y $d = 6$). ◀

Otra técnica útil para hallar una regla de generación de términos de una sucesión es comparar los términos de una sucesión con los términos de otra sucesión de enteros bien conocida, tales como los de una progresión aritmética, una progresión geométrica, cuadrados perfectos, cubos perfectos, etc. Los diez primeros términos de algunas sucesiones que deberías recordar se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Algunas sucesiones útiles.

Término n-ésimo	*Primeros diez términos*
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

EJEMPLO 8 Conjetura una fórmula tan simple como puedas para a_n si los primeros diez términos de la sucesión $\{a_n\}$ son 1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

Solución: Para atacar el problema, en primer lugar examinamos la diferencia entre términos consecutivos, pero no vemos un patrón claro. Cuando calculamos el cociente entre dos términos consecutivos, para ver si cada término es o no múltiplo del primero, encontramos que esta razón no es constante, pero que es muy cercana a 3. Por tanto, es razonable sospechar que los términos de esta sucesión se generan a partir de una fórmula relacionada con 3^n. Comparando estos términos con los correspondientes de la sucesión $\{3^n\}$, nos damos cuenta de que el término n-ésimo es 2 unidades menor que la potencia correspondiente de 3. Vemos que $a_n = 3^n - 2$ para $1 \le n \le 10$, por lo que conjeturamos que esta fórmula se cumple para todo n. ◀

Veremos a lo largo de este texto que las sucesiones de números enteros aparecen en un amplio abanico de contextos dentro de la matemática discreta. Entre ellas están las sucesiones de números primos (Capítulo 2), el número de formas de ordenar n objetos discretos (Capítulo 4), el número de movimientos que hacen falta para resolver el famoso juego de la Torre de Hanoi con n discos (Capítulo 6) o el número de conejos que habitan en una isla transcurridos n meses (Capítulo 6).

También aparecen sucesiones de enteros en un conjunto sorprendentemente amplio de áreas fuera de la matemática discreta, como en biología, ingeniería, física, química, así como en juegos de lógica. El matemático Neil Sloane ha construido durante los últimos veinte años una colección extraordinariamente diversa de sucesiones diferentes de enteros (más de ocho mil). Sloane, junto con Simon Plouffe, ha producido la enciclopedia de sucesiones de números enteros *The Encyclopedia of Integer Sequences* ([SlPl95]). También está disponible en la web una extensa lista de sucesiones, a la que regularmente se añaden sucesiones nuevas. Además, hay un programa accesible a través de la web que se puede utilizar para encontrar sucesiones en la enciclopedia que concuerden con los términos iniciales que uno proporciona.

Enlaces

SUMATORIOS

Ahora presentaremos la notación **sumatorio.** Comenzamos describiendo la terminología utilizada para expresar la suma de los términos

$$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$$

de la sucesión $\{a_n\}$. Usamos la notación

$$\sum_{j=m}^{n} a_j \quad \text{o} \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j$$

para representar

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Aquí la variable j se llama **índice del sumatorio.** La elección de la letra j como variable es arbitraria, esto es, podríamos haber utilizado cualquier otra letra, como i o k. Por tanto, en la notación de sumatorio

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Aquí el índice del sumatorio recorre todos los enteros que comienzan por el **límite inferior** m y terminan en el **límite superior** n. La letra griega sigma mayúscula, Σ, se utiliza para denotar el sumatorio. A continuación damos algunos ejemplos de uso de esta notación.

EJEMPLO 9 Expresa la suma de los cien primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = 1/n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Ejemplos adicionales

Solución: El límite inferior del índice del sumatorio será 1 y el límite superior será 100. Escribimos esta suma como

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}.$$ ◀

EJEMPLO 10 ¿Cuál es el valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5} j^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25\\ &= 55.\end{aligned}$$ ◀

EJEMPLO 11 ¿Cuál es el valor de $\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$?

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{8} (-1)^k &= (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8\\ &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1\\ &= 1.\end{aligned}$$ ◀

A veces es útil cambiar el índice del sumatorio. Esto se hace cuando se necesita operar con dos sumas cuyos índices no concuerdan. Cuando se cambia el índice de una sumatorio, es importante hacer los cambios apropiados en los correspondientes sumandos. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 12 Supongamos que tenemos la suma

$$\sum_{j=1}^{5} j^2.$$

pero queremos que el índice varíe entre 0 y 4 en lugar de entre 1 y 5. Para conseguir esto, hacemos $k = j - 1$. El nuevo índice k irá desde 0 hasta 4, y el término j^2 se convierte en $(k + 1)^2$. Así,

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2.$$

Es fácil comprobar que ambas sumas son $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$. ◀

Ejemplos adicionales

Una suma que aparece con frecuencia es la de los términos de una progresión. El Teorema 1 nos da una fórmula para la suma de términos de una progresión geométrica.

TEOREMA 1 Si a y r son números reales y $r \neq 0$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1} & \text{si } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Demostración: Sea

$$S = \sum_{j=0}^{n} ar^j.$$

Para calcular S, primero multiplicamos ambos lados de la igualdad por r y luego operamos sobre la suma resultante como sigue:

$$\begin{aligned} rS &= r\sum_{j=0}^{n} ar^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1} - a) \\ &= S + (ar^{n+1} - a). \end{aligned}$$

Obtenemos esta igualdad cambiando el índice del sumatorio, haciendo $k = j + 1$.

De estas igualdades, se ve que

$$rS = S + (ar^{n+1} - a).$$

Despejando S se ve que si $r \neq 1$,

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}.$$

Si $r = 1$, entonces es claro que la suma es $(n + 1)a$. ◁

EJEMPLO 13 En muchos contextos aparecen sumatorios dobles (como en el análisis de bucles anidados en los programas informáticos). Un ejemplo de sumatorios dobles es

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij.$$

Para evaluar la doble suma, primero desarrollamos el sumatorio interno y continuamos posteriormente desarrollando el sumatorio externo:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i+2i+3i)$$
$$= \sum_{i=1}^{4} 6i$$
$$= 6+12+18+24 = 60.$$

Podemos utilizar la notación del sumatorio para sumar todos los valores de una función, o los términos de un conjunto indexado, en el que el índice del sumatorio cubriría todos los valores del conjunto. Así, escribimos

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

para representar la suma de los valores $f(s)$, para todos los elementos s de S.

EJEMPLO 14 ¿Cuál es el valor de $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$?

Solución: Como $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$ representa la suma de los valores de s para todos los miembros del conjunto $\{0, 2, 4\}$, se sigue que

$$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s = 0+2+4=$$

Ciertas sumas son muy utilizadas en matemática discreta, por lo que es útil tener una colección de fórmulas para ellas. En la Tabla 2 se proporciona una pequeña lista de las más comunes.

La primera de las fórmulas de esta tabla se ha obtenido del Teorema 1. Las tres siguientes nos dan la suma de los n primeros enteros, la de sus cuadrados y la de sus cubos. Estas fórmulas se pueden derivar de muchas formas diferentes (véanse, por ejemplo, los Problemas 21 y 22 al final de esta sección). Observa también que cada una de estas fórmulas, una vez que se conoce, puede demostrarse fácilmente usando la inducción matemática, técnica que se estudiará en la Sección 3.3. Las dos últimas fórmulas de la tabla se refieren a series infinitas, que se tratarán en breve.

El Ejemplo 15 ilustra la utilidad de la Tabla 2.

EJEMPLO 15 Obtén $\sum_{k=50}^{100} k^2$.

Tabla 2. Algunas sucesiones útiles.

Término n-ésimo	*Fórmula cerrada*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Material extraído de:

Rosen, Keneth. "Matemática discreta y sus aplicaciones". Traducción de Pérez Morales, José Manuel. McGraw-Hill/Interamericana de España. 2004. Quinta Edición. Capitulo 2.