Colección "ELECTRONICA GENERAL"

JOSE Mª ANGULO USATEGUI

Dr. Ingeniero Industrial.
Catedrático de "Arquitectura y Tecnología de Computadores" en la Facultad de Informática de la Universidad de Deusto.

ELECTRONICA DIGITAL MODERNA

Teoría y Práctica

DECIMOSEGUNDA EDICION
CORREGIDA Y AMPLIADA

editorial Paraninfo sa

1991

CAPITULO 3

El Algebra lógica o de Boole

INTRODUCCION

A mediados del pasado siglo, el filósofo y matemático George Boole desarrolló una teoría matemática completamente distinta a la que entonces se conocía y cuya expansión ha sido tan importante, que en la actualidad se utiliza para la resolución y análisis de la mayoría de las operaciones industriales complejas. Tanto los procesos de fabricación como los equipos se han ido complicando a causa del progreso general y la constante evolución, hasta el punto de necesitar automatizar el control de la mayor parte de sus fases.

El álgebra de Boole establece una serie de postulados y operaciones tendentes a resolver los automatismos o procesos a ejecutar, obteniendo un conjunto de ecuaciones que deberán ser traducidas y llevadas a cabo por elementos mecánicos, hidráulicos, neumáticos, eléctricos o electrónicos.

La teoría de Boole considera todos los elementos como biestables, es decir, que sólo tienen dos estados válidos posibles y que por otra parte son opuestos entre sí. Así, por ejemplo, el tratamiento que el álgebra de Boole permite a una lámpara es considerándola en sus dos únicos estados posibles: encendida o apagada; un interruptor sólo podrá estar conectado o desconectado; un transistor, conduciendo o bloqueado; un relé, activado o desactivado; y así sucesivamente. No se admiten estados intermedios. El que sólo existan dos estados válidos para cada elemento en esta estructura matemática ha llevado a llamarla álgebra binaria y también álgebra lógica, pues los razonamientos que en ella se emplean son de carácter intuitivo y lógico.

El álgebra de Boole es un sistema matemático usado en el diseño de circuitos lógicos, que permite representar mediante símbolos el objeto de un circuito lógico, de forma que su estado pueda ser equivalente a un circuito real.

El fin de un sistema matemático es, en principio, representar un grupo de objetos o fenómenos con símbolos, que definan las leyes que gobiernan sus funciones e interrelaciones, con un conjunto de estados y ecuaciones que se escriban de forma simbólica. De este modo, los símbolos del álgebra de Boole se usan para representar entradas y salidas de los elementos lógicos y los estados y ecuaciones se usan para definir puertas, inversores y circuitos lógicos más complejos. Una vez obtenida una ecuación básica, se puede simplificar para hallar el circuito cuyas interconexiones sean las más simples y eficientes.

El álgebra de Boole difiere de la clásica en que ésta última cuenta con relaciones cuantitativas, mientras que aquella cuenta con relaciones lógicas. En álgebra clásica usamos cantidades simbólicas tales como X, Y, A y B para representar números. En la resolución de problemas algebráicos interesa conocer el valor de A, o si X es mayor o menor que Y, u otra información relativa a la cantidad. En el álgebra de Boole sólo se busca conocer uno de los estados posibles que puede tener cualquier término lógico. Por ejemplo, cuando usamos el álgebra de Boole en sistemas digitales, nos interesa conocer si un término vale 1 ó 0. También se les llama "verdadero" y "falso" a los dos estados posibles en esta álgebra de tipo filosófico.

La obtención de las ecuaciones lógicas que resuelven los procesos se deduce utilizando varias operaciones, para cuya comprensión se requiere el estudio de "la teoría de conjuntos".

TEORIA DE CONJUNTOS. CONJUNTO Y CONJUNTO UNIVERSAL

Se llama conjunto a una reunión de elementos que se caracterizan todos ellos por poseer una propiedad común. Así, dentro de los diodos semiconductores, forma un conjunto el de los diodos de capacidad variable denominados "varicap"; otro conjunto lo pueden formar los diodos de Zener. En el caso del primer ejemplo, todos sus elementos tienen una característica común: se trata de diodos semiconductores que se emplean como condensadores variables y en el segundo ejemplo se trata de diodos que disponen de una tensión de referencia llamada de Zener.

Siguiendo con los ejemplos anteriores, se llama "conjunto universal" o "conjunto unidad" el que comprende la totalidad de los diodos semiconductores. Todo lo comentado se puede expresar gráficamente tal como aparece en la figura 3-1, en la que se ha representado el conjunto universal de diodos semiconductores "S", como el área que comprende a todos los puntos existentes en el interior de una superficie rectangular denominada "S" ó "1" y en su interior dos círculos, el "C" y el "Z", cuyos puntos representan los diodos varicap y los de Zener, respectivamente.

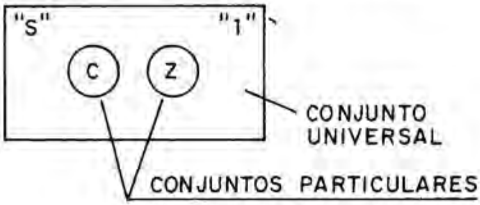


Fig. 3-1.– Representación de un conjunto universal con dos subconjuntos en él.

En las representaciones gráficas, cada conjunto se asimila a todos los puntos contenidos en el interior de una figura cualquiera y que normalmente suele ser circular o rectangular.

Otro ejemplo de análisis de conjuntos universales y particulares es el de los empleados de una empresa, cuya totalidad conforman el conjunto universal, mientras que las diferentes profesiones, categorías o trabajos que desempeñan permitirán establecer diversos conjuntos particulares o subconjuntos.

Eléctricamente, un conjunto particular cualquiera queda definido por un interruptor normalmente abierto, como se muestra en la figura 3-2.

Fig. 3-2.– Representación eléctrica de un conjunto cualquiera.

La posición del interruptor de la figura 3-2 significa la pertenencia o no al conjunto C del elemento que se está considerando. Si C representa el conjunto de diodos varicap y el diodo elegido no es de dicho tipo, el interruptor adoptará la posición de abierto, con lo que la tensión *V* presente en la entrada no podrá aparecer en la salida. Por el contrario, si el elemento analizado es un varicap, el interruptor estará cerrado y aparecerá tensión en la salida.

La representación eléctrica de un conjunto universal se muestra en la figura 3-3 y es un interruptor siempre cerrado, ya que al escoger cualquier elemento siempre pertenecerá al conjunto universal, puesto que por definición éste abarca a todos los elementos.

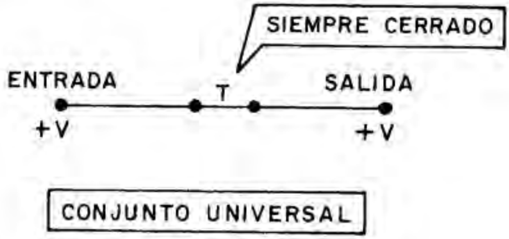


Fig. 3-3.– Representación eléctrica de un conjunto universal.

OTROS TIPOS DE CONJUNTOS

Además de los conjuntos universal y particular hay otros dos tipos: el vacío y el complementario.

El conjunto vacío es el que no posee ningún elemento. Por ejemplo, al analizar los diodos semiconductores, formarán un conjunto vacío aquellos diodos que posean sólo un electrodo, puesto que no hay ninguno que cumpla este requisito. Al conjunto vacío se le representa con un "0"

Eléctricamente, al conjunto vacío se le asemeja con un contacto siempre abierto (figura 3-4), ya que la tensión o la información en la entrada nunca podrá aparecer en la salida, pues, por definición, al elegir cualquier elemento del conjunto universal, nunca pertenecerá al vacío.

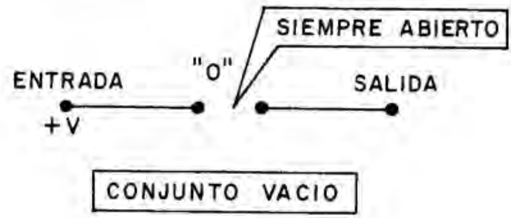


Fig. 3-4.– Representación eléctrica de un conjunto vacío.

Recibe el nombre de "conjunto complementario" de otro conjunto el que comprende a todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a dicho conjunto; también recibe el nombre de conjunto negado o inverso. En el caso de referirnos al ejemplo de una empresa, si se considera el conjunto universal formado por todos los empleados que trabajan en ella, existirá un conjunto particular que corresponderá al de los ingenieros que trabajan en ella. Pues bien, el conjunto complementario al de los ingenieros está constituido por el resto del personal que no es ingeniero, de forma que el conjunto universal queda dividido en dos conjuntos: el de los ingenieros y el complementario o de no ingenieros, que se representa como el primero, pero con una rayita por encima que expresa la negación, tal como se muestra en la figura 3-5.

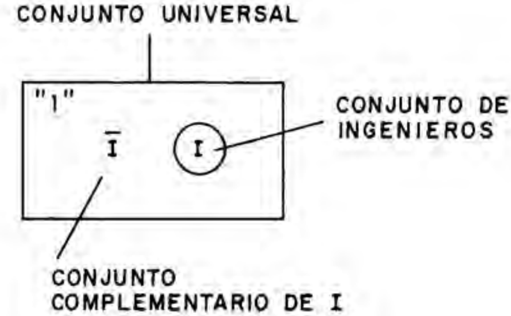


Fig. 3-5.– Representación dentro del conjunto universal de un conjunto particular y su complementario.

Eléctricamente, un conjunto complementario se simboliza por un contacto normalmente cerrado, ligado al normalmente abierto del conjunto al que complementa, según la figura 3-6.

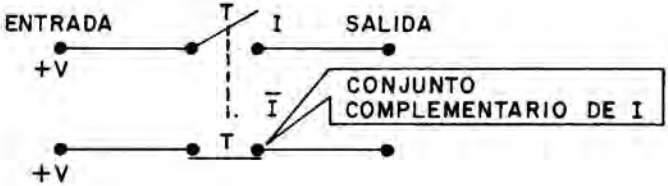


Fig. 3-6.– Representación de un conjunto y su complementario mediante interruptores eléctricos.

Al analizar un elemento del conjunto universal, si es ingeniero pertenece al conjunto I cerrándose el interruptor I que lo representa, lo cual conlleva la apertura del conjunto $\bar{I}$. En el caso de que el elemento considerado no perteneciese al conjunto de los ingenieros, el contacto I permanecería abierto y el $\bar{I}$ cerrado, por lo que la tensión positiva representada en la figura anterior y que informa de la pertenencia o no a los conjuntos del elemento de que se trate, pasaría por la rama de abajo, de la figura 3-6. Cualquier elemento podrá ser ingeniero o no serlo, por lo que la información sólo aparecerá en una de las dos salidas de la figura 3-6.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Existen tres operaciones fundamentales en la teoría de conjuntos:

- Operación reunión o suma.
- Operación intersección o producto.
- Operación inversión o negación.

De estas operaciones se deducen otras auxiliares también muy importantes y útiles.

"Operación suma o reunión de conjuntos"

Un conjunto es la suma de varios cuando está formado por todos los elementos de ellos. En el ejemplo de la empresa se habló del conjunto de los ingenieros I, si ahora también se considera el conjunto de los empleados que están casados (C), la operación suma o reunión de estos dos conjuntos el C más el I, da lugar a otro conjunto, compuesto por los elementos de ambos, como se ha representado en la figura 3-7.

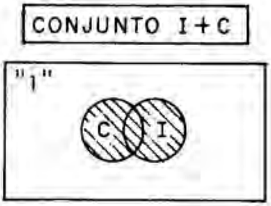


Fig. 3-7.– Representación mediante el área rayada de la suma de los conjuntos C e I.

En las ecuaciones lógicas esta operación se representa con el signo +, de la suma: I + C = S (suma de conjuntos).

La fórmula anterior se lee en la práctica: "el conjunto S es la suma del conjunto C más el conjunto I". Sin embargo, en sentido estricto en lugar de leerse más ha de leerse "o", es decir el conjunto S es igual al I o C. La letra o indica que el conjunto S está formado por los ingenieros o por los casados, luego un ingeniero pertenece al conjunto S, y un casado también y un ingeniero que esté casado igualmente (intersección de los dos círculos). Para pertenecer al conjunto suma basta que se cumpla una de las condiciones y no todas.

Eléctricamente se representa la suma de conjuntos, colocando los interruptores representativos de los sumandos en paralelo, puesto que con cerrarse uno de ellos es suficiente para que se produzca el paso de la información. Ver la figura 3-8.

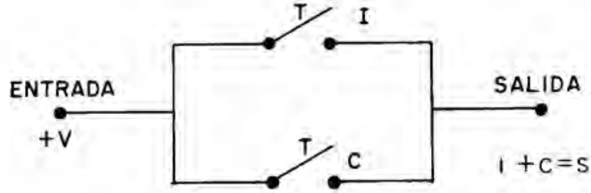


Fig. 3-8.– Representación eléctrica de la suma de conjuntos.

La "tabla de la verdad" es la representación gráfica simplificada de una ecuación lógica, con todas las combinaciones posibles de sus variables binarias (sólo pueden adoptar los valores 1 y 0) y el resultado de la operación final. En el caso de la ecuación I + C = S, la tabla de la verdad correspondiente se representa en la figura 3-9.

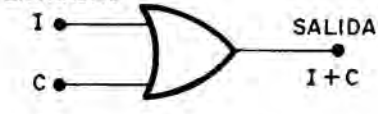
I	C	S = I + C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TABLA DE VERDAD

Fig. 3-9.– Tabla de la verdad de la ecuación I + C = S

De las cuatro combinaciones posibles y diferentes que pueden adoptar las variables de entrada I y C, la salida S valdrá 0, cuando I = 0 y C = = 0, es decir, cuando el elemento que se analiza no pertenezca ni al conjunto de los ingenieros ni al de los casados. En todos los demás casos, al cumplirse al menos uno de los dos conjuntos o variables de entrada, también se cumple o vale 1 la salida S, tal como ha quedado definida la operación suma.

En los esquemas lógicos, independientemente que se utilicen elementos eléctricos, electrónicos, neumáticos, etc., el símbolo que representa la realización de una operación suma de conjuntos es la de la figura 3-10.



SIMBOLO LOGICO DE LA OPERACION SUMA

Fig. 3-10.– Símbolo representativo de la suma de conjuntos.

Ejemplo: Realización de la suma de los conjuntos A, B y C.

1) Ecuación lógica: $S = A + B + C$

2) Representación eléctrica. Ver la figura 3-11.

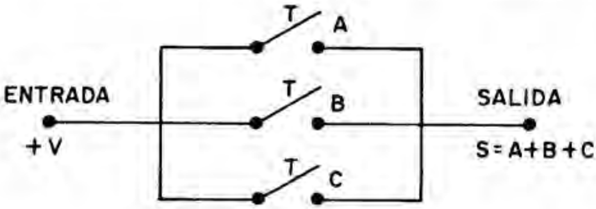


Fig. 3-11.– Representación eléctrica de la suma de los conjuntos A, B y C.

3) Representación gráfica mostrada en la figura 3-12.

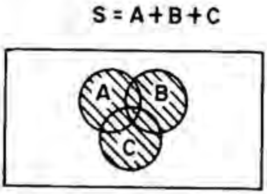


Fig. 3-12.– Representación gráfica de la suma de los conjuntos A, B y C.

4) Tabla de verdad resuelta en la figura 3-13 y en la que se debe tener en cuenta que el número de combinaciones posibles con n variables binarias es 2^n; luego, como en este ejemplo $n = 3$, la tabla de verdad está compuesta por 8 combinaciones diferentes.

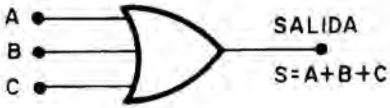
A	B	C	S=A+B+C
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

TABLA DE VERDAD

Fig. 3-13.– Tabla de verdad de la ecuación $S = A + B + C$.

5) Diagrama lógico de la operación, según la figura 3-14.

Fig. 3-14.– Símbolo lógico para la ecuación $S = A + B + C$.



"Operación producto o intersección de conjuntos"

El producto de varios conjuntos es otro, formado por los elementos comunes a ellos. En las ecuaciones esta operación se representa con el signo del producto y se lee "por" y también "y"

Siguiendo con el ejemplo utilizado por la explicación de la operación suma, a base de considerar el conjunto de los ingenieros y el de los casados existentes en una empresa, la representación gráfica del producto de ambos conjuntos es el área rayada de la figura 3-15.

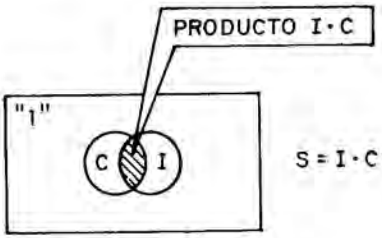
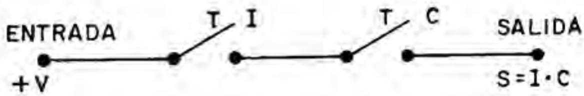


Fig. 3-15.– El área rayada representa la intersección o producto de los conjuntos I y C.

La representación eléctrica del producto de conjuntos supone colocar en serie los interruptores que lo representan, tal como aparece en la figura 3-16.

Fig. 3-16.– Representación eléctrica del producto de conjuntos.



De la figura 3-16 se deduce que la salida sólo dispondrá del nivel de tensión cuando los dos interruptores estén cerrados, o sea, el elemento considerado ha de pertenecer a la vez a los dos conjuntos.

La tabla de la verdad del producto de dos conjuntos se expone en la figura 3-17.

I	C	S = I · C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fig. 3-17.– Tabla de la verdad de la ecuación S = I . C.

El símbolo que representa la realización de una operación producto de conjuntos en los esquemas lógicos es el de la figura 3-18.

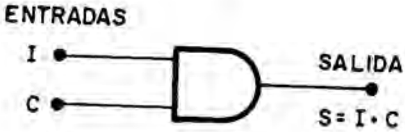


Fig. 3-18.– Símbolo lógico para representar el producto de conjuntos.

Ejemplo: Realización del producto de los conjuntos A, B y C.

1) Ecuación lógica P = A. B. C

2) Representación eléctrica, según figura 3-19.

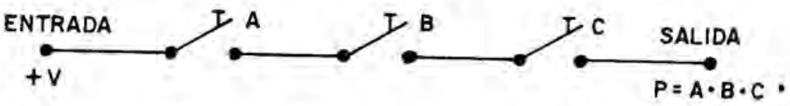


Fig. 3-19.– Representación eléctrica del producto de los conjuntos A, B y C.

3) Representación gráfica, según se muestra en la figura 3-20.

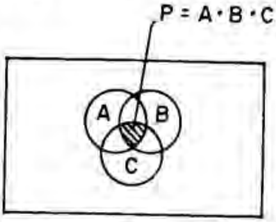


Fig. 3-20.– Representación gráfica del producto de los conjuntos A, B y C.

4) Tabla de verdad. Figura. 3-21.

A	B	C	P = A · B · C
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Fig. 3-21.– Tabla de verdad de la ecuación P = A. B. C.

5) Esquema lógico de la operación. Ver figura 3-22.

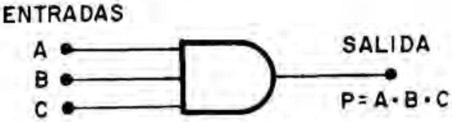


Fig. 3-22.– Representación simbólica del producto de tres conjuntos.

"Operación inversión"

Un conjunto es inverso, negado o complementario de otro conjunto, cuando está formado por los elementos del conjunto universal no contenidos en aquél, lo que representa gráficamente la figura 3-23.

Fig. 3-23.– Representación gráfica de un conjunto y su inverso.

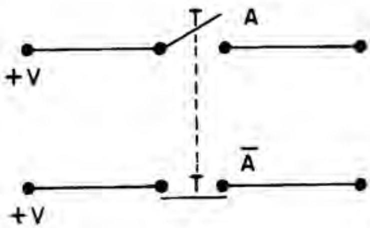


Fig. 3-24.– Representación eléctrica de un conjunto y de su inverso o complementario.

Como se dijo antes, la representación eléctrica de un conjunto inverso es la de un contacto normalmente cerrado. En la figura 3-24 se representa al conjunto A y su inverso o complementario $\overline{A}$.

La tabla de verdad correspondiente a los estados posibles que puede poseer un conjunto y los que corresponden a su inverso se muestra en la figura 3-25.

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Fig. 3-25.– Tabla de verdad de un conjunto y su complementario.

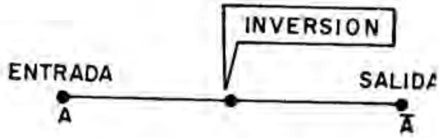


Fig. 3-26.– Representación simbólica de la inversión de un conjunto.

Generalmente, en los esquemas lógicos la inversión de un conjunto se representa mediante un pequeño círculo, tal como se aprecia en la figura 3-26.

La operación suma recibe frecuentemente el nombre de operación OR, dado que en inglés esta palabra significa "o", mientras que la operación producto se llama AND, que en inglés quiere decir "y". Finalmente, la operación inversión suele denominarse operación NO.

AXIOMAS PRACTICOS PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES LOGICAS

Partiendo de los conocimientos adquiridos sobre conjuntos y sus operaciones, se estudian seguidamente varios axiomas, que ayudarán a resolver las ecuaciones algebraicas.

1er axioma: El producto de "1" por un conjunto es igual a dicho conjunto. En la figura 3-27 se presenta la ecuación lógica seguida del esquema eléctrico y lógico.

$$A \cdot 1 = A$$

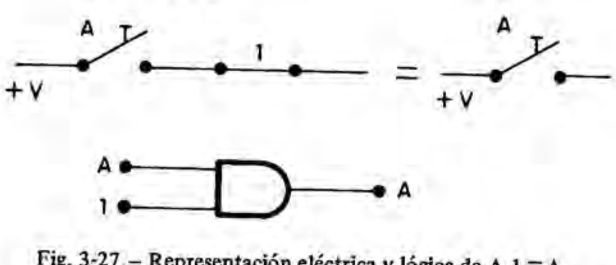


Fig. 3-27.– Representación eléctrica y lógica de A.1 = A.

2º axioma: Un conjunto más el conjunto unidad equivalen siempre al conjunto unidad. Figura 3-28.

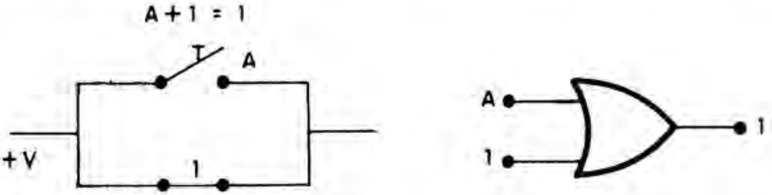


Fig. 3-28.– Representación eléctrica y lógica de la ecuación A + 1.

3er axioma: Un contacto siempre abierto (conjunto vacío) en serie con otros conjuntos, hace que el circuito siempre quede abierto y equivalga a un conjunto vacío. Figura 3-29.

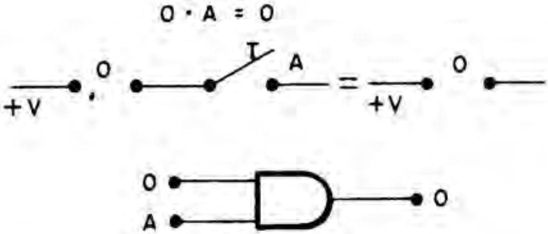


Fig. 3-29.– Representación lógica de 0.A = 0

4º axioma: Un conjunto vacío en paralelo con otro no tiene ninguna influencia en el resultado. Figura 3-30.

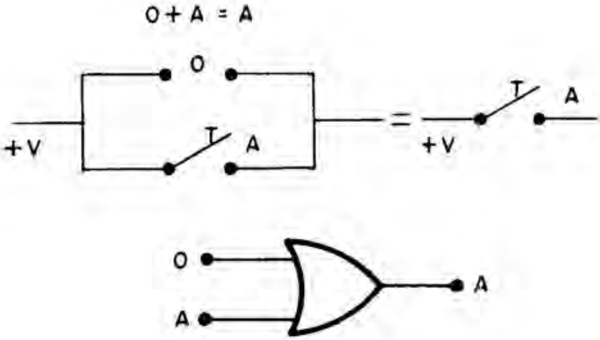


Fig. 3-30.– Representación eléctrica y lógica de 0 + A = A.

5º axioma: El producto de un conjunto por su complementario equivale a un conjunto vacío. Figura 3-31.

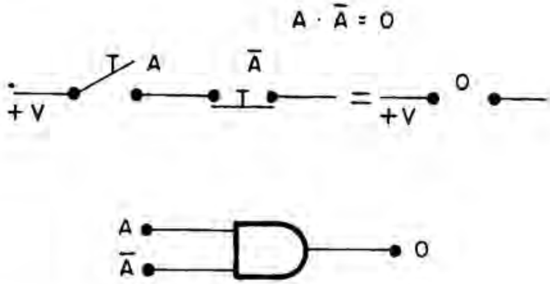


Fig. 3-31.– Representación eléctrica y lógica de $A.\overline{A} = 0$.

6º axioma: La suma de un conjunto con su complementario equivale al conjunto unidad. Figura. 3-32.

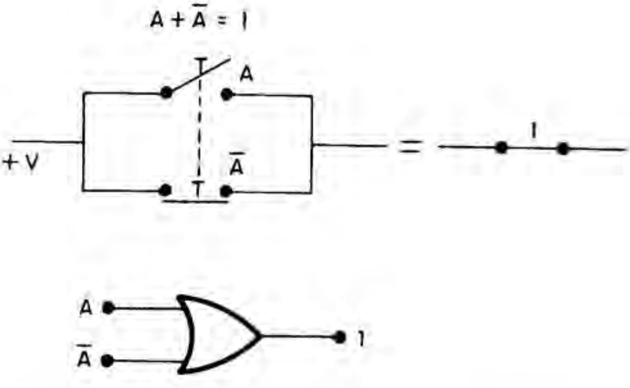


Fig. 3-32.– Representación eléctrica y lógica de $A + \overline{A} = 1$

En la figura 3-33 se resumen las principales simplificaciones y axiomas.

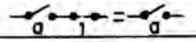
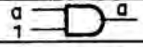
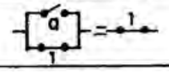
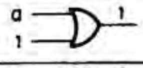
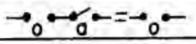
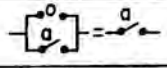
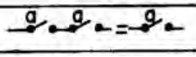
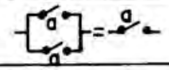
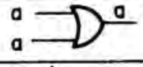
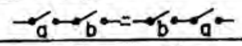
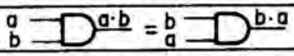
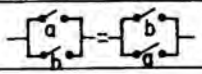
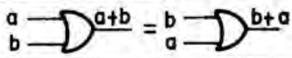
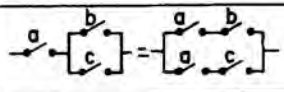
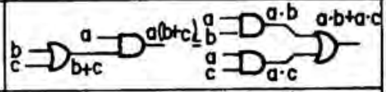
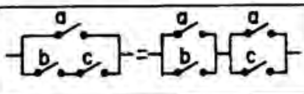
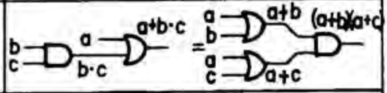
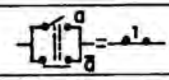
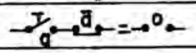
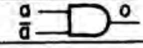
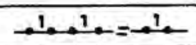
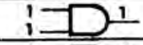
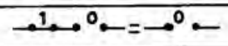
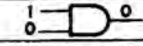
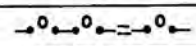
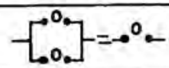
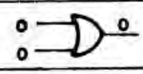
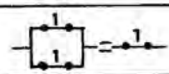
AXIOMA	REPRESENTACION ELECTRICA	REPRESENTACION ESQUEMATICA
$a \cdot 1 = a$		
$a + 1 = 1$		
$0 \cdot A = 0$		
$0 + a = a$		
$a \cdot a = a$		
$a + a = a$		
$a \cdot b = b \cdot a$		
$a + b = b + a$		
$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)=(A+C)+B$		
$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B)C = A(B \cdot C) = (A \cdot C)B$		
$a\,(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$		
$a + b \cdot c = (a+b) \cdot (a+c)$		
$a + \bar{a} = 1$		
$a \cdot \bar{a} = 0$		
$\bar{\bar{a}} = a$		
$a = b \quad \bar{a} = \bar{b}$		
$1 \cdot 1 = 1$		
$1 \cdot 0 = 0$		
$0 \cdot 0 = 0$		
$0 + 0 = 0$		
$1 + 1 = 1$		
$\bar{0} = 1$		
$\bar{1} = 0$		

Fig. 3-33.– Tabla resumen de los principales axiomas y simplificaciones lógicos.

OTRAS OPERACIONES LOGICAS

Además de la suma, el producto y la negación, existen otras operaciones derivadas de estas tres, de enorme aplicación práctica, como son las NOR, NAND y OR EXCLUSIVA.

"Operación NOR"

Produce el resultado inverso de la suma o reunión de varios conjuntos. La operación NOR (derivada del inglés, de la contracción de las palabras NO y OR) de los conjuntos A, B y C produce como resultado $\overline{A + B + C}$

La tabla de verdad correspondiente a la operación NOR de los conjuntos A, B y C se muestra en la figura 3-34.

A	B	C	$\overline{A+B+C}$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

TABLA DE VERDAD
OPERACION NOR

Fig. 3-34.– Tabla de verdad de una operación NOR de 3 variables.

El símbolo lógico utilizado en los esquemas es la contracción del símbolo de la operación suma seguido del de la negación para representar la operación NOR, tal como se muestra en la figura 3-35.

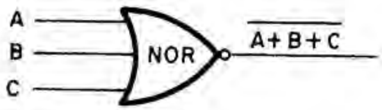


Fig. 3-35.– Símbolo lógico de la operación NOR.

"Operación NAND"

Produce el resultado inverso del producto de varios conjuntos. El nombre se deriva de la contracción, en inglés, de las palabras NO y

AND. Al realizar una operación NAND con los conjuntos A, B y C se obtiene $\overline{A.B.C}$ (producto negado).

La tabla de verdad de la operación NAND de A, B y C es la que se muestra en la figura 3-36.

El símbolo lógico de la operación NAND de las variables A, B y C se muestra también en la figura 3-36.

A	B	C	$\overline{A \cdot B \cdot C}$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

TABLA DE VERDAD
OPERACION NAND

Fig. 3-36.– Símbolo y tabla de verdad de una operación NAND.

"Operación 0 exclusiva"

Se trata de una operación derivada de la reunión, pero que sólo da salida 1 cuando existen un número impar de entradas que valgan 1.

La tabla de verdad de una operación 0 Exclusiva de dos variables A y B es la mostrada en la figura 3-37 y responde a la fórmula:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

A	B	O exclusiva $A \oplus B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Fig. 3-37.– Tabla de verdad de la función 0 Exclusiva.

El símbolo lógico de esta operación se muestra en la figura 3-38 y es parecido al de la operación suma.

Fig. 3-38.– Símbolo lógico de la operación 0 Exclusiva.

La función EOR para varios conjuntos es igual a 1, si es impar el número de ellos con valor 1. En caso de ser par, la función EOR es 0.

RESOLUCION LOGICA DE PROBLEMAS. PLANTEAMIENTO Y FASES OPERATIVAS

Es muy recomendable, a la hora de resolver problemas basados en el álgebra de Boole, seguir un proceso metódico dividido en 5 fases, que se explica a continuación. Hay una fase inicial, que no entra dentro de la mecánica general de resolución, y es la buena comprensión del enunciado del ejercicio, de forma que es preciso dedicar todo el tiempo necesario para entender claramente los objetivos del problema y apreciar las variables de entrada con que se cuenta, para lo cual conviene simular el problema como si se tratase de una "caja negra", tal como lo muestra la figura 3-39, cuyas únicas entradas sean las variables y las salidas sean los resultados buscados.

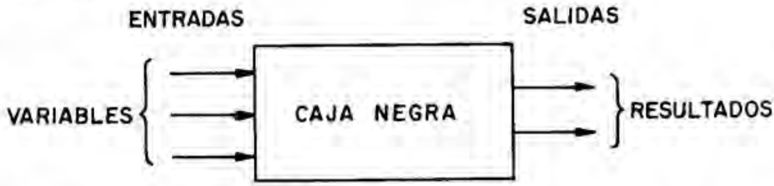


Fig. 3-39.– Simulación del problema como una caja negra con entradas y salidas únicamente.

Una vez comprendido el problema y determinadas las entradas y salidas, se recomienda seguir las siguientes fases de ejecución.

1ª fase: Formación de la tabla de verdad. Como todos los elementos, tanto entradas como salidas, son binarios, hay que establecer todas las combinaciones posibles de las entradas, y en cada una de ellas definir el estado que ha de tener la salida o salidas, según se deduce del análisis del problema.

2ª fase: Obtención de ecuaciones lógicas. Partiendo de la tabla de verdad se determinan las diferentes situaciones de las variables para obtener los resultados buscados. Por ejemplo, si en el automatismo de un motor M, gobernado por tres variables A, B y C, se obtiene de la tabla de verdad que estará activado en dos situaciones tales como:

1) Cuando A = 1, B = 0 y C = 1, $(A.\overline{B}.C)$

2) Cuando A = 0, B = 1 y C = 1, $(\overline{A}.B.C)$

La ecuación que activa el motor será:

$$M = A.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C. \quad (1)$$

3ª fase: Simplificación de las ecuaciones lógicas. La eliminación de variables dentro de una ecuación, que es en lo que consiste la simplificación, supone un ahorro económico derivado de la reducción de componentes y mano de obra de montaje. Así, en la ecuación (1) se puede sacar factor común de la variable C, que se repite en los dos miembros, con lo que la ecuación pasa a tener sólo 5 elementos:

$$M = C\,(A.\overline{B} + \overline{A}.B) \quad (2)$$

Además de intervenir menos órganos de acción en la ecuación (2), su montaje práctico será más simple.

Aunque el sacar factor común a todos los elementos que se repiten en una ecuación es una forma de simplificarla, también hay que tener en cuenta todos los axiomas analizados anteriormente. Más adelante se expondrá un método gráfico, denominado de Karnaugh, destinado a simplificar de forma mecánica las ecuaciones lógicas.

4ª fase: Representación eléctrica de las ecuaciones simplificadas. Aunque esta fase apenas tiene interés práctico, se recomienda realizarla, para tener una visión más intuitiva del funcionamiento del automatismo. Mediante interruptores eléctricos la comprensión del funcionamiento de la solución del problema es mucho más simple que con un diagrama lógico, para el que se necesita bastante experiencia a la hora de interpretarlo correctamente.

5ª fase: Finalmente, se pasan las ecuaciones simplificadas a un esquema lógico, cuyos símbolos representativos de las puertas o elementos que realizan operaciones con conjuntos se supone que serán sustituidos normalmente por componentes electrónicos.

A continuación se presentan varios problemas resueltos según el procedimiento explicado. Todos los ejemplos son de carácter combinacional, es decir, en ellos el resultado final depende exclusivamente de los estados de las variables de entrada.

1^er problema

Se desea gobernar una lámpara desde dos interruptores A y B, de forma que cada vez que varíe el estado de uno de ellos, la lámpara cambie de estado. Es decir, que si en un estado de los interruptores la lámpara está encendida, al cambiar A ó B, la lámpara se apague y si estaba apagada se encienda.

En un principio, si están abiertos los dos interruptores A y B, la lámpara está apagada.

1ª *fase:* Se establece la tabla de verdad, teniendo en cuenta que hay dos variables binarias de entrada, A y B, una salida, que es la lámpara L, y un estado definido por el enunciado, en el que si A = 0 y B = 0, L = 0. A partir de aquí, el cambio de una variable provoca la variación del estado de la lámpara. Ver figura 3-40.

A	B	L	
0	0	0	ESTADO INICIAL
1	0	1	SI CAMBIA A
0	1	1	SI CAMBIA B
1	1	0	SI CAMBIAN A y B

Fig. 3-40.– Tabla de verdad que define los estados de la lámpara.

Según la tabla de verdad, la lámpara se ilumina sólo en dos casos:

1) $A = 1$ y $B = 0$ $(A.\overline{B})$

2) $A = 0$ y $B = 1$ $(\overline{A}.B)$

2ª *fase:* Obtención de las ecuaciones lógicas. De la fase anterior se puede deducir que la lámpara se encenderá, bien cuando sucede $A.\overline{B}$, o bien, cuando la situación es $\overline{A}.B$, de donde se desprende la ecuación que resuelve el encendido de L y que equivaldrá a la suma o a la reunión de estas dos posibilidades.

$$L = A.\overline{B} + \overline{A}.B$$

3ª *fase:* Simplificación de la ecuación. Dado que en este caso, a simple vista no se encuentra en la ecuación ningún elemento que se pueda simplificar ni sacar factor común, se pasa a la fase siguiente. Téngase presente que la no simplificación de una ecuación no supone equivocación o error en el resultado final, sino sólo la elevación del coste económico en su realización.

4^a *fase:* Representación eléctrica de la ecuación. Figura 3-41

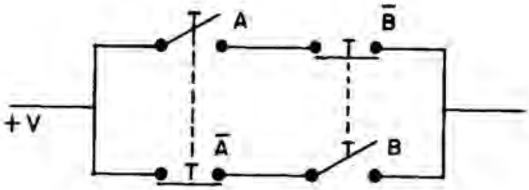


Fig. 3-41.– Representación eléctrica de la ecuación $L = A.\overline{B} + \overline{A}.B$.

5^a *fase:* Esquema lógico de la ecuación. Figura 3-42

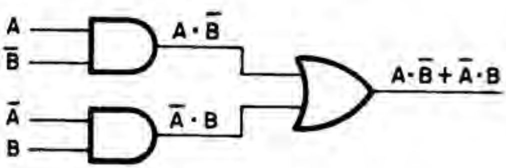


Fig. 3-42.– Representación lógica de la ecuación $L = A.\overline{B} + \overline{A}.B$

El esquema lógico que finalmente se ha obtenido resolverá el automatismo deseado y podrá ser montado mediante elementos eléctricos como en la figura 3-41, o también electrónicos, neumáticos, etc., capaces de desarrollar las operaciones booleanas que indica la ecuación.

2º problema

Se desea controlar dos motores M_1 y M_2 por medio de los contactos de tres interruptores A, B y C, de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

1) Si A está pulsado y los otros dos no, se activa M_1

2) Si C está pulsado y los otros dos no, se activa M_2

3) Si los tres interruptores están cerrados se activan M_1 y M_2

En las demás condiciones no mencionadas, los dos motores están parados.

1ª fase: Tabla de verdad que represente todas las posibilidades del sistema y el resultado correspondiente. Figura 3-43.

A	B	C	M_1	M_2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Fig. 3-43.– Tabla de verdad que rige a los motores M_1 y M_2.

En este problema particular se podía haber prescindido de la tabla de verdad para encontrar la ecuación lógica, pues su enunciado establecía con claridad las condiciones de activación de los dos motores.

2ª fase: Obtención de las ecuaciones lógicas. Bien de la tabla de verdad o directamente del enunciado del problema, se deducen las condiciones necesarias para la puesta en marcha de los motores. M_1 se activa cuando A está cerrado y B y C abiertos ($A.\overline{B}.\overline{C}$) o bien si A, B y C están cerrados (A.B.C), luego:

$$M_1 = A.\overline{B}.\overline{C}. + A.B.C. \qquad (1)$$

M_2 funcionará cuando C esté cerrado y los otros dos no ($\overline{A}.\overline{B}.C.$) o bien si los tres interruptores están cerrados (A.B.C); luego:

$$M_2 = \overline{A}.\overline{B}.C. + A.B.C \qquad (2)$$

3ª fase: Simplificación. En ambas ecuaciones se observa en principio una clara simplificación, que en la (1) consiste en sacar factor común A y en (2) C, quedando entonces dichas ecuaciones de la siguiente forma:

$$M_1 = A.\overline{B}.\overline{C}. + A.B.C. = A\,(\overline{B}.\overline{C}. + B.C.)$$

$$M_2 = \overline{A}.\overline{B}.C. + A.B.C. = C\,(\overline{A}.\overline{B}. + A.B.)$$

4ª fase: Representación eléctrica de las ecuaciones. Figura 3-44.

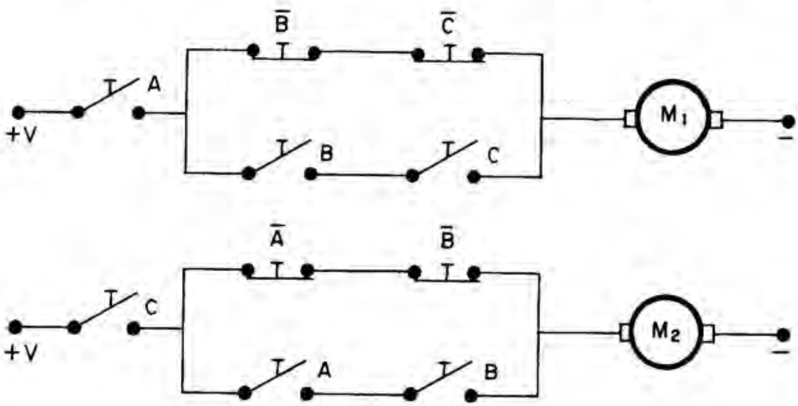


Fig. 3-44.– Representación eléctrica de las ecuaciones que gobiernan los motores M_1 y M_2

5ª fase: Representación lógica de las ecuaciones de M_1 y M_2. Figura 3-45.

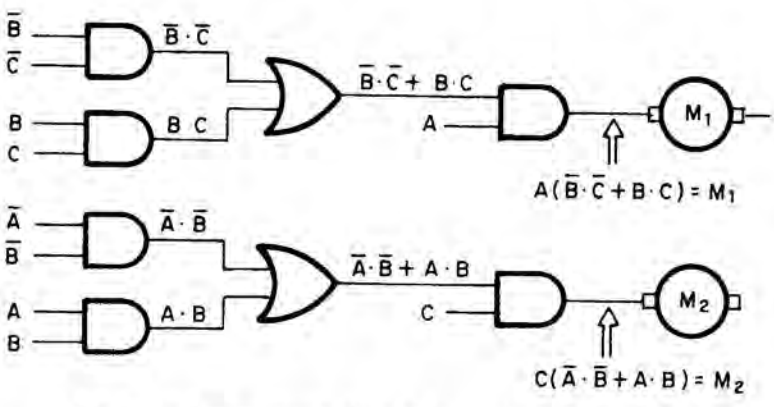


Fig. 3-45.– Representación lógica de las ecuaciones de M_1 y M_2.

3er problema

Se desea gobernar un motor, disponiendo para tal fin de un interruptor T, que produce la entrada de tensión, y otro que denominaremos

S, que pone en marcha el motor, a partir de una posición de reposo constante, la cual está determinada o detectada por un elemento R.

El motor se pone en marcha si está dado T y se cierra a la vez el interruptor S.

Sin embargo, para que se pare el motor, no basta con abrir el interruptor S, ya que en este caso, el motor continuará su marcha hasta llegar a la posición de reposo R, en donde se detendrá.

El esquema básico del principio del automatismo descrito en el problema se representa en la figura 3-46.

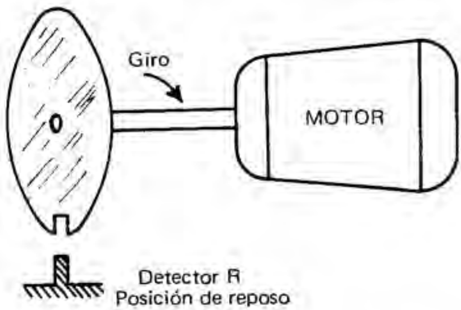


Fig. 3-46.– Esquema gráfico del principio del funcionamiento del automatismo.

1ª fase: Tabla de verdad, expuesta en la figura 3-47.

Fig. 3-47 – Tabla de verdad que responde al planteamiento del problema.

T	S	R	M
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Obsérvese que en la 5ª combinación de la figura 3-47, el motor está activado, puesto que aunque S = 0, aún no se ha alcanzado la posición de reposo, ya que R = 0.

De la tabla de verdad se obtiene la ecuación lógica:

$$\text{MOTOR} = T.\bar{S}.\bar{R} + T.S.R + T.S.\bar{R}$$

3ª fase: Simplificación de la ecuación:

a) Saco factor común T: $\text{MOTOR} = T(\bar{S}.\bar{R} + S.R + S.\bar{R})$

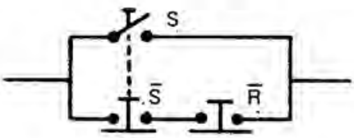
b) Dentro del paréntesis se saca factor común S

$$\text{MOTOR} = T\left[\bar{S}.\bar{R} + S(R + \bar{R})\right]$$

c) Como $R + \bar{R} = 1$, queda : $\text{MOTOR} = T(\bar{S}.\bar{R} + S)$

d) En el término dentro del paréntesis $(\bar{S}.\bar{R} + S)$, se puede eliminar $\bar{S}$, pues no influye en el resultado, como se aprecia en el esquema eléctrico de la figura 3-48.

Fig. 3-48.– El término $\bar{S}$ no influye en el resultado: se puede eliminar.



e) Finalmente, la ecuación simplificada será:

$$\text{MOTOR} = T(\bar{R} + S)$$

4ª fase: El diagrama eléctrico que responde a la ecuación simplificada se muestra en la figura 3-49.

5ª fase: El diagrama lógico del problema también se da en la figura 3-49.

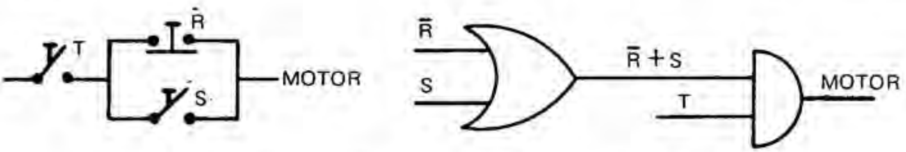


Fig. 3-49.– Diagramas eléctrico y lógico de la ecuación simplificada.

IMPORTANCIA DE LAS OPERACIONES NAND Y NOR

Las ecuaciones que resuelven los automatismos y problemas digitales contienen sumas, productos, negaciones, etc. Si para cada una de las operaciones especificadas se emplea un elemento diferente que la ejecute, serán precisos bastantes tipos. Mediante una correcta aplicación de los teoremas de Morgan, se puede realizar cualquier ecuación y, por tanto, resolver cualquier automatismo, usando exclusivamente un sólo tipo de operador: el NAND o el NOR. Esto supone una gran simplificación en los montajes, menores posibilidades de error y una mayor compenetración del técnico con el funcionamiento del módulo que utilice.

TEOREMAS DE MORGAN

Sirven para transformar sumas en productos, o viceversa, y tienen una gran importancia en las aplicaciones prácticas, pues permiten realizar todas las operaciones lógicas con una única función.

1er teorema

"La inversa de una suma lógica de dos o más variables equivale al producto lógico de los inversos de dichas variables".

$$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$$

La figura 3-50 sirve para comprobar gráficamente la veracidad de este teorema.

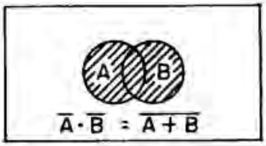


Fig. 3-50.– Comprobación de la igualdad $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

Se observa en la figura 3-50 que el área no rayada equivale al conjunto $\overline{A + B}$ y coincide con $\overline{A}.\overline{B}$.

También se puede comprobar el 1er teorema de Morgan mediante la tabla de verdad tal como se muestra en la figura 3-51, en la que se aprecia la coincidencia de las dos últimas columnas.

Fig. 3-51.– Tabla de verdad que comprueba la igualdad $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

En general, este teorema se puede aplicar para varias variables de la siguiente forma:

$$\overline{A + B + C + D + E} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}.\overline{E}$$

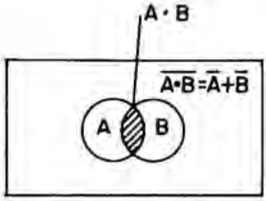
2º teorema

"La inversa de un producto lógico de varias variables equivale a la suma lógica de las inversas de dichas variables"

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Gráficamente se comprueba este teorema en la figura 3-52.

Fig. 3-52.– Comprobación gráfica de la igualdad $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$.



La intersección de A y B forman el conjunto A.B. luego el área no rayada constituye $\overline{A.B}$ que coincide con $\overline{A} + \overline{B}$.

La veracidad del 2º teorema se comprueba mediante la tabla de verdad de la figura 3-53, en la que se aprecia la coincidencia de las dos últimas columnas.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A · B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Fig. 3-53.– Tabla de verdad para la comprobación de que $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$.

En general, la aplicación del 2º teorema a varias variables se presenta de la siguiente forma:

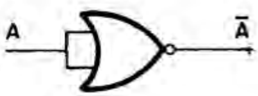
$$\overline{A.B.C.D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$$

RESOLUCION DE UNA ECUACION MEDIANTE OPERADORES NOR

A continuación se contempla la forma de realizar operaciones lógicas con operadores NOR exclusivamente.

"Realización de una inversión o negación con operadores NOR"

Si el operador NOR recibe una entrada común, la salida que se obtiene es la negación de dicha entrada. Para negar un conjunto se utiliza un NOR de una sola entrada. La figura 3-54 presenta un operador NOR realizando una inversión y la tabla de verdad a que responde.



A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Fig. 3-54.– NOR de una sola entrada y su correspondiente tabla de verdad.

En resumen, la suma negada (NOR) de una sola entrada da como resultado dicha entrada negada.

Cuando se usa lógica TTL y se deja sin conectar una entrada de una puerta, se comporta dicha entrada como si tuviese nivel lógico alto.

"Realización de una suma negada con NOR"

El operador NOR realiza directamente la suma negada, tal como se indica en la figura 3-55.

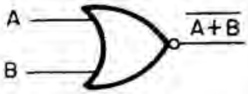


Fig. 3-55.– Realización directa de una suma negada con un NOR.

"Realización de una suma con NOR"

Cuando se desea obtener una suma, sin negar, de varias variables, al introducirlas a un primer NOR, de él sale la suma negada. Dicha salida, al introducirla como única entrada a un segundo operador NOR, consigue la suma de las variables dos veces negada, o, lo que es lo mismo, la suma sin negar, que era lo que se perseguía y se muestra en la figura 3-56.

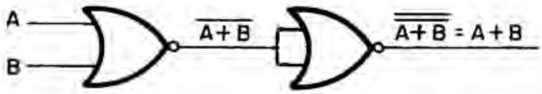


Fig. 3-56.– Obtención de una suma sin negar con operadores NOR.

En resumen, para obtener una suma sin negar se introducen las variables a un primer NOR y la salida de éste a otro.

"Realización de un producto con NOR"

Recuérdese que uno de los teoremas de Morgan expresaba lo siguiente:

$$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$$

De esta igualdad se desprende que la suma negada es igual al producto de las variables, cada una negada en particular.

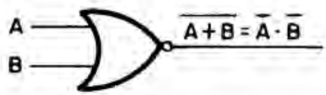


Fig. 3-57.– Utilización del NOR para obtener productos.

Otra forma de aplicar el teorema de Morgan se indica en la figura 3-58.

Fig. 3-58.– Otra forma de utilizar un NOR para productos.

Como regla se puede decir que para obtener el producto de dos variables hay que introducirlas negadas al NOR.

El cuadro de la figura 3-59 es el resumen de la resolución de operaciones lógicas con operadores NOR.

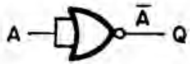
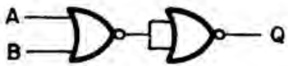
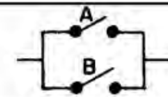
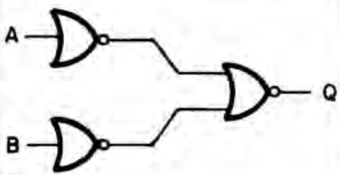
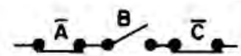
Diagrama lógico	Función	Operación	Ecuación	Diagrama Eléctrico
	Negación	La señal de salida siempre es inversa a la de entrada	$Q = \bar{A}$	
	NOR	Cuando ninguna entrada vale 0 , la salida $Q \neq 1$	$Q = \overline{A+B}$	
	O	Si alguna entrada vale 1 la salida $Q = 1$	$Q = A + B$	
	y	Si todas las entradas, en este caso A y B, valen 1, la salida $Q = 1$	$Q = A \cdot B$	
	y	La salida de un NOR es el producto de las entradas, negadas	$Q = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$	

Fig. 3-59.– Cuadro resumen para la resolución de operaciones lógicas con operadores NOR.

RESOLUCION DE UNA ECUACION CON OPERADORES NAND

Al igual que se ha expuesto la posibilidad de efectuar todas las operaciones de la teoría de conjuntos por medio de operadores NOR, se estudia a continuación la forma de realizarlas con operadores NAND.

"Realización de una inversión o negación con NAND"

Cuando sólo se aplica una señal de entrada a un operador NAND, la salida es la negación de dicha entrada. Figura 3-60.

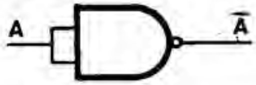


Fig. 3-60.– Realización de una negación mediante un operador NAND.

"Realización de un producto negado con NAND"

El operador NAND realiza directamente el producto negado, como se muestra en la figura 3-61.

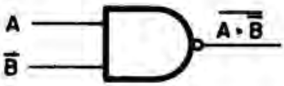


Fig. 3-61.– Realización directa por un NAND de un producto negado.

Con un solo operador NAND se obtiene el producto negado. Si este resultado actúa como única entrada en un segundo NAND, se obtendrá el producto sin negar. Figura 3-62.

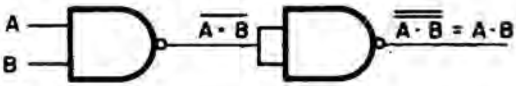


Fig. 3-62.– Obtención de un producto con dos operadores NAND.

"Realización de una suma con NAND"

Para hacer sumas con NAND se aplica el teorema de Morgan:

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Una operación NAND equivale a la suma de sus entradas negadas, tal como aparece en la figura 3-63.

Fig. 3-63.– Realización de una suma con NAND

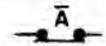
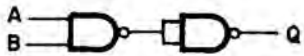
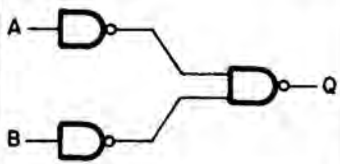
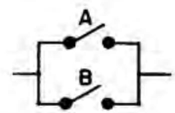
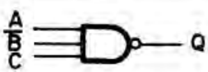
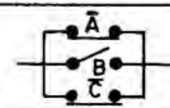
Diagrama Lógico	Función	Operación	Ecuación	Diagrama Eléctrico
	Negación	La señal de salida siempre es inversa a la de entrada	$Q = \overline{A}$	
	NO-Y NAND	La salida vale 0 sólo cuando las entradas valen 1	$Q = \overline{A \cdot B}$	
	y	La salida vale 1 cuando las entradas valen 1	$Q = A \cdot B$	
	O	La salida vale 0 sólo cuando todas las entradas valen 0	$Q = A + B$	
	O	La salida de una puerta NAND es la suma de las entradas negadas	$Q = \overline{A} + B + \overline{C}$	

Fig. 3-64.– Cuadro resumen de la utilización del operador NAND.

Para obtener la suma de dos conjuntos con un operador NAND hay que aplicar a sus entradas dichos conjuntos negados.

La figura 3-64 es un cuadro resumen de la resolución de las operaciones lógicas con operadores NAND.

REALIZACION DE ECUACIONES LOGICAS EMPLEANDO OPERADORES NOR O NAND

1er ejemplo

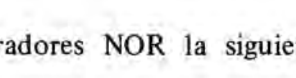
Resolver utilizando exclusivamente operadores NOR la siguiente ecuación:

$$S = A.B + A\,(\overline{D} + C)$$

La ecuación se puede considerar en un principio como suma de dos términos: el A.B y el A $(\overline{D} + C)$, los cuales, considerados por separado, pueden tomarse como productos, que en el caso del segundo está formado por un término A y otro $(\overline{D} + C)$.

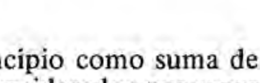
a) Obtención con módulos NOR del producto A.B. Figura 3-65.

Fig. 3-65.– Obtención de A.B con NOR.



b) Obtención de $\overline{\overline{D} + C}$. Figura 3-66.

Fig. 3-66.– Obtención con NOR de $\overline{\overline{D} + C}$



c) Obtención del término A $(\overline{D} + C)$. Figura 3-67.

Fig. 3-67.– Obtención de A $(\overline{D} + C)$.

d) Obtención del resultado final de la ecuación. Figura 3-68.

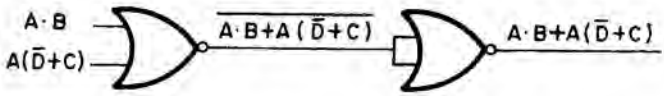


Fig. 3-68.– Obtención de A.B + A ($\overline{D}$ + C).

e) Expresión o diagrama completo con todos los operadores NOR utilizados. Figura. 3-69.

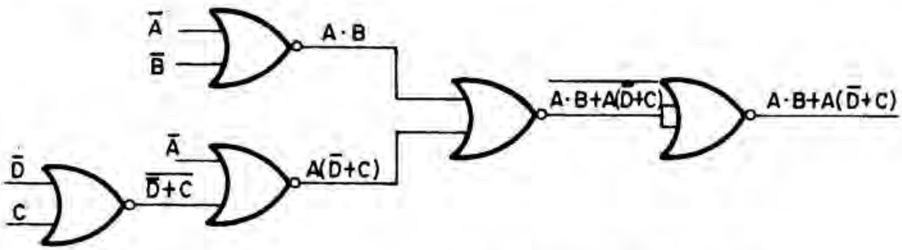


Fig. 3-69.– Diagrama lógico completo con NOR para A.B + A ($\overline{D}$ + C).

2º ejemplo

Resolver el mismo ejercicio anterior, pero usando sólo operadores NAND.

$$S = A.B + A\,(\overline{D} + C)$$

Ahora se irán aplicando las reglas estudiadas para los NAND.

a) Obtención de $\overline{A.B}$. Es una operación NAND directa, como se refleja en la figura 3-70.

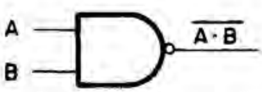


Fig. 3-70.– Obtención de $\overline{A.B}$ con operadores NAND.

b) Obtención de $\overline{A\,(\overline{D} + C)}$. Figura 3-71.

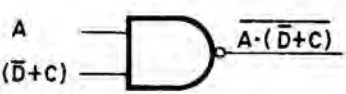


Fig. 3-71.– Obtención con NAND de $\overline{A \cdot (\overline{D} + C)}$.

c) Obtención de $\overline{D} + C$. Figura 3-72.

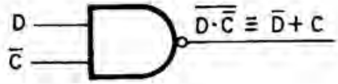


Fig. 3-72.– Obtención de $\overline{D} + C$.

d) Actuación del último operador NAND. Figura 3-73.

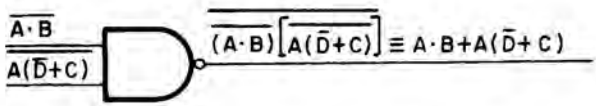


Fig. 3-73.– Actuación del último operador NAND.

e) Diagrama completo con todos los operadores NAND utilizados. Figura. 3-74

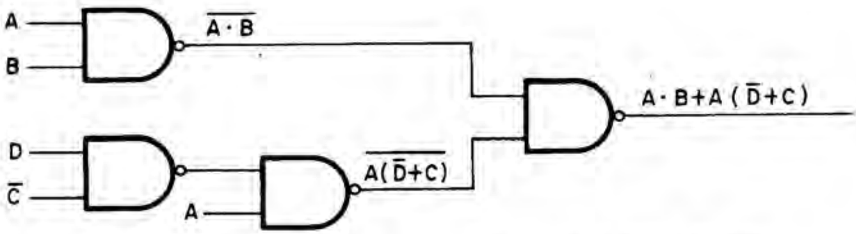


Fig. 3-74.– Diagrama lógico completo de la ecuación $A.B + A(\overline{D} + C)$.

DIAGRAMAS GRAFICOS DE KARNAUGH

Los diagramas de Karnaugh dan lugar a una técnica de tipo gráfico usada para la simplificación de las ecuaciones lógicas, que se basa en disponer las combinaciones posibles de una forma apta para su simplificación. La importancia de la reducción de términos en las ecuaciones que resuelven los circuitos electrónicos digitales, bien de automatismos industriales, bien de aplicación a las computadoras, se destaca por el menor empleo de componentes y materiales que origina.

Las simplificaciones que permiten los diagramas de Karnaugh se basan en la siguiente identidad:

$$A.B.C + A.B.\overline{C} = A.B(C + \overline{C}) = A.b$$

La ecuación anterior indica que si una variable, en este caso la C, aparece negada en un término y no negada en otro que tiene el resto de las variables iguales, puede eliminarse por completo. Los diagramas de Karnaugh ayudan mucho a la localización de estas variables que se pueden suprimir.

"Diagrama de Karnaugh para dos variables"

Supongamos que se desea realizar el producto de dos variables A y B, según la ecuación R = A. B. La tabla de verdad a que responde esta ecuación será la mostrada en la figura 3-75.

A	B	A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fig. 3-75.– Tabla de verdad de A.B.

Otra forma de representar los estados de la tabla de verdad es realizando un gráfico con 4 cuadrículas, una para cada combinación diferente. Figura 3-76.

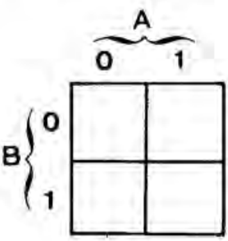


Fig. 3-76.– Gráfico de 4 cuadrículas que representa las 4 combinaciones del producto A.B.

En el gráfico anterior la variable A vale 1 en las dos cuadrículas de la segunda columna. Por otro lado, B vale 0 en las dos cuadrículas de la 1ª fila y 1 en las dos de la 2ª fila.

Con este criterio, la cuadrícula que corresponde a la primera fila y 1ª columna representará el resultado de $\overline{A}.\overline{B}$, correspondiente a la combinación en que A = 0 y B = 0, y que según la tabla de verdad el resultado se sabe que valdrá 0.

La cuadrícula correspondiente a la 2ª fila, 2ª columna, representa A.B, o sea, la combinación en que A = B = 1, luego en ella se colocará un 1 como resultado, etc.

Los resultados de las cuatro cuadrículas y la representación simplificada del diagrama de Karnaugh para el ejemplo anterior será el de la figura 3-77.

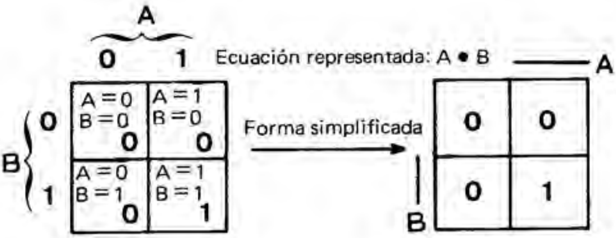
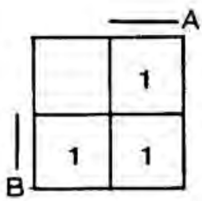


Fig. 3-77.– Representación del diagrama de Karnaugh para A.B, a la izquierda, y forma simplificada, a la derecha.

En la figura 3-77 se observa que en la representación simplificada del diagrama de Karnaugh se ha colocado una raya frente a las filas y columnas en las que la variable que se dibuja a su lado vale 1. También es normal no rellenar todas las cuadrículas, sino sólo aquellas en las que el resultado sea igual a 1. Veamos el diagrama de Karnaugh correspondiente a la ecuación: R = A + B, junto con la tabla de verdad, tal como se muestra en la figura 3-78.

Fig. 3-78.– Tabla de verdad y diagrama de Karnaugh para R = A + + B.

A	B	A+B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1



"Diagrama de Karnaugh para tres variables"

Con tres variables el número de combinaciones posibles es $2^3 = 8$ y para este caso se confeccionará un nuevo mapa de Karnaugh que tenga el doble de cuadrículas que el ya estudiado, para lo cual se abate este último hacia la derecha y se coloca en las columnas nuevas la variable C, con valor 1, como se representa en la figura 3-79.

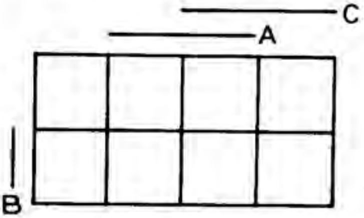


Fig. 3-79.– Diagrama de Karnaugh para tres variables.

Se puede comprobar que las ocho cuadrículas de la figura 3-79 representan las ocho combinaciones posibles y diferentes de las 3 variables. Como aplicación, en la figura 3-80 se muestra la tabla de verdad y el diagrama de Karnaugh para la ecuación $R = A.B.\overline{C}$.

A	B	C	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

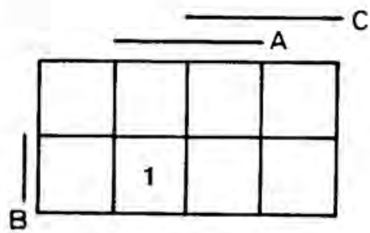


Fig. 3-80.– Tabla de verdad y diagrama de Karnaugh para la ecuación $R = A.B.\overline{C}$.

"Diagramas de Karnaugh para 4 y 5 variables"

Las dieciséis cuadrículas que tiene el diagrama de Karnaugh ($2^4 = 16$) para 4 variables se obtienen abatiendo hacia abajo el diagrama para 3 variables, como se muestra en la figura 3-81.

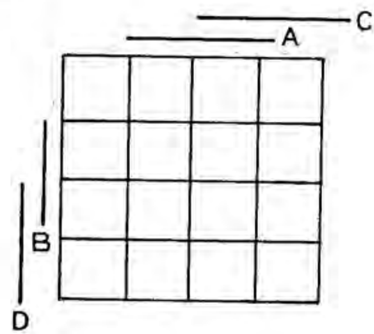


Fig. 3-81.– Diagrama de Karnaugh para 4 variables.

Como ejemplo de aplicación, en la figura 3-82 se presentan las cuadrículas que cumplen la ecuación R = A.B + C.D.

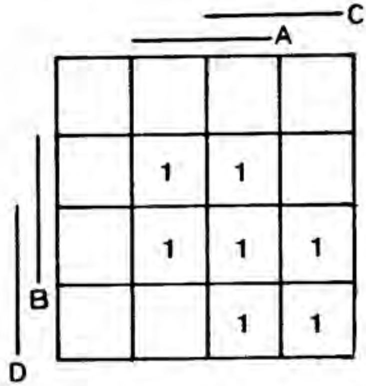


Fig. 3-82.– Representación de las cuadrículas que cumplen R = A.B + C.D.

Obsérvese en la figura 3-82 que hay una cuadrícula, concretamente la correspondiente a la 3ª fila y 3ª columna, que la cumple tanto el término A.B como el C.D, pero basta con poner un simple 1 en ella.

El diagrama de Karnaugh para 5 variables se obtiene abatiendo el de 4 hacia la derecha para obtener 32 cuadrículas (2^5). El diagrama de Karnaugh para 5 variables, junto con la cuadrícula que cumple la ecuación R = A.B.C.D.E, en la que se ha puesto un 1, se representa en la figura 3-83.

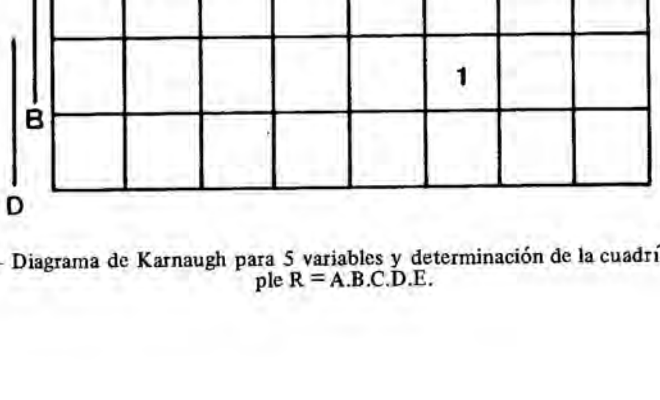


Fig. 3-83.– Diagrama de Karnaugh para 5 variables y determinación de la cuadrícula que cumple R = A.B.C.D.E.

"Ejemplos de representación de ecuaciones lógicas con los diagramas de Karnaugh"

1° ejemplo

Representar en un diagrama de Karnaugh para tres variables los resultados de la ecuación $R = A.\overline{B} + B.C$. Figura 3-84

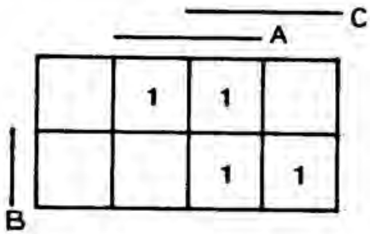


Fig. 3-84.– Representación de la ecuación $R = A.\overline{B} + B.C$ en el diagrama de Karnaugh.

2° ejemplo

Representar en un diagrama de Karnaugh para 4 variables los resultados de la ecuación $R = A.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$. Figura 3-85.

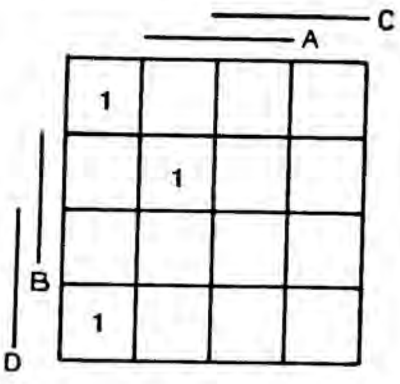


Fig. 3-85.– Representación de las cuadrículas que cumplen la ecuación $R = A.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$.

SIMPLIFICACION DE ECUACIONES MEDIANTE LOS DIAGRAMAS DE KARNAUGH

Como ya se indicó, el fundamento de la simplificación por Karnaugh se basa en la identidad:

$$A.B.C + A.B.\overline{C} = A.B$$

Se trata de encontrar parejas de términos iguales, a excepción de una variable, que en uno esté negada y en el otro no. Obsérvese que en todos los diagramas de Karnaugh, al pasar de una cuadrícula a la adyacente siguiendo una fila o una columna (no en diagonal) siempre cambia de estado una de las variables. Cambia incluso entre la última y la primera cuadrícula de cada fila o de cada columna.

Para la simplificación con Karnaugh se trata de agrupar cuadrículas adyacentes en las que se cumpla la ecuación, para ir eliminando variables. Las agrupaciones de cuadrículas con valor 1 se denominan "lazos" y alrededor de ellas se dibuja una línea que los contiene. Cada lazo formará un término en la versión simplificada de la ecuación. Existen unas reglas para confeccionar los lazos o agrupaciones de 1, de las que se exponen a continuación las más importantes.

1ª) Cada lazo debe contener el mayor número de 1 posible, debiendo constar de 8, 4, 2 o, en último caso, un simple 1, y entonces no habrá simplificación de dicho término.

2ª) Los lazos pueden quedar superpuestos y no importa que haya cuadrículas de valor 1 que correspondan a la vez a dos lazos diferentes.

3ª) No se pueden formar lazos entre parejas de 1 situados en diagonal.

4ª) Debe tratarse de conseguir el mínimo número de lazos y que, como se indicó anteriormente, cada lazo contenga el mayor número de 1.

5ª) La columna más a la derecha se considera adyacente con la de más a la izquierda, y la primera fila del diagrama de Karnaugh se considera adyacente a la última.

A menudo hay varias posibilidades para formar los lazos, debiéndose preferir aquella que tenga el menor número de lazos.

Cada lazo del diagrama representa un término de la ecuación simplificada final, y dicha ecuación reúne todos los términos o lazos mediante la operación OR o suma lógica.

Si en un lazo hay una variable que está en estado 1 en alguna cuadrícula y en estado 0 en otra, se elimina. Si una variable está con el mismo estado en todas las cuadrículas de un lazo, debe ser incluida en la expresión simplificada.

Algunos ejemplos aclararán el sistema de simplificación de Karnaugh.

1er ejemplo

Simplificar por Karnaugh la ecuación:

$$R = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C}$$

a) Las cuadrículas que cumplen la ecuación en un diagrama de Karnaugh para tres variables, se indican con un 1 en la figura 3-86.

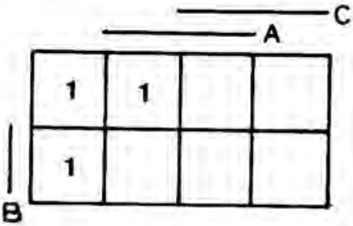


Fig. 3-86.– Indicación de las cuadrículas que cumplen la ecuación.

b) Se pueden realizar dos lazos de dos 1 cada uno, no importando que un 1 pertenezca a la vez a los dos lazos. Figura 3-87.

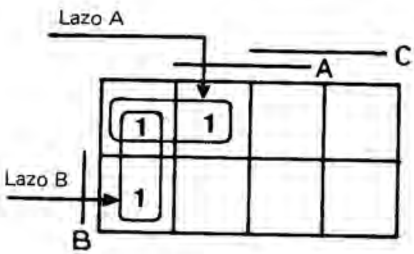


Fig. 3-87.– Formación de dos lazos A.

c) Para obtener la ecuación simplificada se suman las expresiones de los lazos, eliminando de ellos las variables que en una de las cuadrículas aparecen negadas y en la otra no. Así, el lazo A tiene las dos cuadrículas que lo componen con B = 0 y con C = 0; sin embargo, la variable A en una cuadrícula vale 1 y en la otra 0, por lo que se elimina, y el lazo A queda expresado como $\overline{B}.\overline{C}$. En el lazo B sus dos cuadrículas tienen a A = 0 y C = 0; sin embargo, en una de ellas B = 0 y en otra B = 1, así que se elimina B y dicho lazo queda expresado como $\overline{A}.\overline{C}$.

La ecuación simplificada es igual a la suma lógica de las expresiones de los lazos, o sea:

$$R = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} = \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{C}$$

2º ejemplo

Simplificar por Karnaugh la ecuación:

$$R = \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.C.D + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.C.D$$

a) Diagrama de Karnaugh de 4 variables resuelto para la ecuación. Figura 3-88.

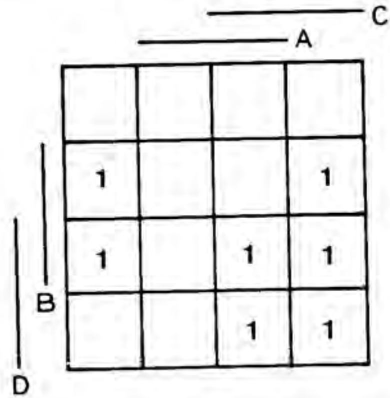


Fig. 3-88.– Diagrama de Karnaugh resuelto para la ecuación.

b) Se dibuja el menor número de lazos de 2, 4 y 8 unos y cada lazo con el mayor número de unos. Figura 3-89.

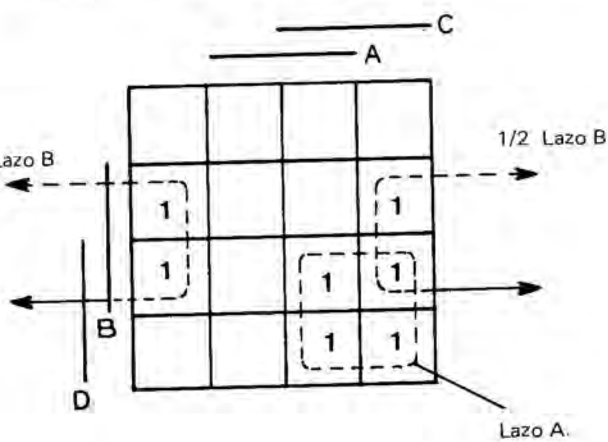


Fig. 3-89.– Confección de lazos en el diagrama de Karnaugh.

c) Expresión y suma de lazos para obtener la ecuación simplificada

$$\text{LAZO A:}\quad \underset{\text{Eliminada}}{\underset{\downarrow}{A}}\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad \underset{\text{Eliminada}}{\underset{\downarrow}{B}}\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad C = 1 \qquad D = 1$$

$$\boxed{\text{LAZO A} = C.D}$$

$$\text{LAZO B:}\quad A = 0 \qquad B = 1 \qquad \underset{\text{Eliminada}}{\underset{\downarrow}{C}}\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad \underset{\text{Eliminada}}{\underset{\downarrow}{D}}\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

$$\boxed{\text{LAZO B} = \overline{A}.B.}$$

La ecuación simplificada es la suma lógica de los lazos, o sea:

$$R = \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.C.D + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.C.D = C.D + \overline{A}.B$$

Problema

Diseñar un automatismo con puertas NOR que gobierne una máquina M desde 3 interruptores, A, B y C, de forma que se active M siempre que A y B estén pulsados y también si A está pulsado y los otros dos no.

1ª fase: Tabla de verdad. Figura 3-90

A	B	C	M	
0	0	0	0	
1	0	0	1	← $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
1	1	0	1	← $A \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	1	1	← $A \cdot B \cdot C$

Fig. 3-90.– Tabla de la verdad para el automatismo.

2ª fase: Obtención de la ecuación lógica mediante suma de los términos que se cumplen en la tabla de la verdad:

$$M = A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

3ª fase: Simplificación por Karnaugh.

En un diagrama de Karnaugh para 3 variables se colocan los 1 y se forman los lazos. Figura 3-91.

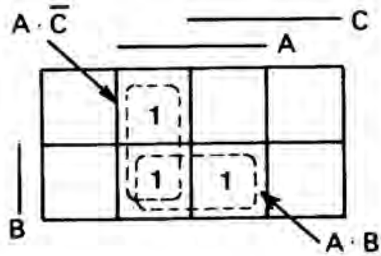


Fig. 3-91.– Colocación de 1 y formación de lazos.

4ª fase: Expresar la ecuación simplificada mediante puertas lógicas NOR. Figura 3-92.

$$M = A\ (\overline{C} + B)$$

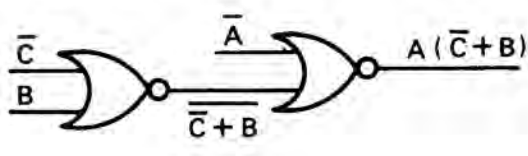


Fig. 3-92.– Expresión de la ecuación simplificada con operadores NOR.

METODO TABULAR DE QUINE-MC CLUSKEY

Cuando las ecuaciones tienen 5 o más variables es complicado utilizar los diagramas de Karnaugh, siendo el método de Quine-Mc Cluskey el más idóneo. Consiste este método en ordenar según el número de 1 que tengan las combinaciones de variables que cumplen la ecuación. A continuación se buscan las combinaciones que comparadas con los grupos adyacentes, con un 1 más o menos, difieren sólo en una variable, que en una combinación estará negada y en la otra sin negar, eliminándose la misma.

La simplificación de ecuaciones por el procedimiento de Quine-Mc Cluskey se lleva a cabo a través de una serie de operaciones que se explican a continuación, al mismo tiempo que se aplican a un caso práctico, consistente en simplificar la ecuación:

$$X = \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.C.D. + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.C.D \quad (1)$$

1ª fase: Todos los términos de la ecuación lógica, han de contener todas la variables. Los términos que carezcan de alguna variable, ésta se incluye realizando la operación AND del término por la variable más la variable negada, teniendo en cuenta que $(V + \overline{V}) = 1$.

En el caso de la ecuación (1), la aplicación de esta regla transforma la ecuación de la siguiente manera:

$$X = \overline{A}.B.\overline{C}\,(D + \overline{D}) + \overline{A}.C.D\,(B + \overline{B}) + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.C.D\,(B + \overline{B})$$

$$X = \overline{A}.B.\overline{C}.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.C.D + \overline{A}.\overline{B}.C.D + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.B.C.D. + A.\overline{B}.C.D \quad (2)$$

2ª fase: Se determina el "índice" de cada término, siendo dicho índice el número de variables sin negar, o de valor 1, que contenga el mismo. Así por ejemplo el término $\overline{A}.B.\overline{C}.D$ (0101), tiene como índice 2.

Tambien y para distinguir entre sí los diferentes términos aparte de por su índice, se asigna a cada uno el valor decimal que su código binario, correspondiente al estado de las variables, representa. Por ejemplo, $\overline{A}.B.\overline{C}.D$ (0101), tiene de índice 2 y le corresponde el valor decimal de 5.

Teniendo en cuenta los dos valores que se acaban de definir los términos de la ecuación (2) quedan definidos de la siguiente forma:

TERMINO	ESTADO DE LAS VARIABLES	INDICE	VALOR DECIMAL
$\overline{A}.B.\overline{C}.D$	0101	2	5
$\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D}$	0100	1	4
$\overline{A}.B.C.D$	0111	3	7
$\overline{A}.\overline{B}.C.D$	0011	2	3
$\overline{A}.B.C.\overline{D}$	0110	2	6
$A.B.C.D$	1111	4	15
$A.\overline{B}.C.D$	1011	3	12

3ª fase: Se hace una primera lista de los términos de la ecuación, clasificándoles por su índice. En el caso de la ecuación (2), dicha lista sería la siguiente:

INDICE	ESTADO VARIABLES	VALOR DECIMAL
1	0100	4
2	0101	5
2	0011	3
2	0110	6
3	0111	7
3	1011	11
4	1111	15

4ª fase: Se forma una segunda lista combinando los términos expresados en la lista anterior, siguiendo la regla que se indica:

"Los términos a combinar no deben diferir entre sí, más que en el estado de una de las variables, la cual será sustituida por un guión".

Aplicando esta regla al ejemplo de la ecuación (2), se obtiene la siguiente lista:

TERMINOS COMBINADOS (Valor decimal)	COMBINACION	INDICE COMBINACION
4,5	010 –	1
4,6	01–0	1
5,7	01–1	2
3,7	0–11	2
6,7	011–	2
3,11	–011	2
7,15	–111	3
11,15	1–11	3

5ª fase: Se forma una nueva lista, combinando parejas de términos de acuerdo con la misma regla de la fase anterior. Las nuevas combinaciones dispondrán por lo tanto de dos guiones, uno correspondiente a la lista anterior más el de la nueva variable que cambia de estado en la nueva lista.

Los términos que se repiten en las listas se eliminan.

PAREJA DE TERMINOS COMBINADOS	COMBINACION	INDICE
4,5 - 6,7	01 - -	1
4,6 - 5,7	01 - -	1 (Eliminada)
3,7 - 11,15	- - 11	2
3,11 - 7,15	- - 11	2 (Eliminada)

6ª fase: La ecuación simplificada se forma mediante la suma lógica de los términos no eliminados. En el ejemplo que se desarrolla dicha ecuación, teniendo en cuenta las combinaciones no eliminadas de la última lista (01 - - y - -11), será:

$$X = \bar{A}.B. + C.D$$

Se recomienda al lector, como ejercicio práctico, la comprobación del resultado obtenido mediante el método tabular de Quine-Mc Cluskey, utilizando los diagramas gráficos de Karnaugh.

EJERCICIOS TEORICOS DE AUTO-TEST

Poner una cruz en la respuesta correcta.

1) ¿Cuántos estados posibles existen en los elementos que trata el álgebra de Boole?

   a) Uno
   b) Dos
   c) Varios

2) Un conjunto unidad está formado por:

   a) El producto de los conjuntos particulares
   b) La reunión de los conjuntos vacíos
   c) Un conjunto particular y su complementario

3) En el conjunto suma de A y B, están contenidos:

   a) Todos los elementos de $\bar{A}$
   b) Todos los elementos de A
   c) Todos los elementos de $\bar{B}$

4) En el conjunto producto de A y B están contenidos:

a) Todos los elementos de $\overline{A}$
b) Todos los elementos de B
c) Todos los elementos que sean a la vez de A y B

5) La tabla de verdad sirve para:

a) Saber el estado de los conjuntos
b) Proporcionar todas las combinaciones de las variables y sus resultados
c) Combinar las variables para obtener resultado positivo

6) La operación NOR consiste

a) En la suma de conjuntos
b) En la suma negada de varios conjuntos
c) En el producto negado de varios conjuntos

7) ¿Cuántas combinaciones diferentes tienen 4 variables binarias?

a) 8
b) 16
c) 6

8) Las ecuaciones lógicas de un problema se obtienen:

a) De la tabla de verdad
b) Del diagrama eléctrico
c) Del diagrama lógico

9) La ventaja de utilizar operadores NOR y NAND estriba:

a) En que son económicos y sencillos
b) En que pueden realizar todas las operaciones lógicas
c) En que utilizándolos se reduce el número de componentes

10) La ventaja de la simplificación de las ecuaciones lógicas es que:

a) Reduce el costo económico y la mano de obra
b) Funciona mejor el automatismo
c) Se localizan más fácilmente los errores y averías

11) Los teoremas de Morgan:

a) Transforman y simplifican las operaciones lógicas
b) Transforman sumas en productos y viceversa
c) Comprueban los resultados de la tabla de la verdad

12) Una suma sin negar de 3 variables se puede realizar con:

a) 1 operador NOR
b) 2 operadores NOR
c) 3 operadores NOR

1^er^ problema

Se desea gobernar un motor desde 4 interruptores, A, B, C y D, de forma que entre en funcionamiento si están cerrados 3 de ellos y sólo 3. Hallar:

1) Tabla de verdad y ecuación que gobierna el motor
2) Esquema eléctrico del automatismo
3) Esquema lógico mediante puertas de la ecuación

2º problema

Resolver utilizando puertas NOR exclusivamente la siguiente ecuación:

$$F = A.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}\,(B + C)$$

3^er^ problema

Simplificar mediante el diagrama de Karnaugh la siguiente ecuación:

$$F = A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$$