1.8 Funciones

INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones asignamos a cada elemento de un conjunto un elemento particular de un segundo conjunto (que puede ser el mismo que el primer conjunto). Por ejemplo, supongamos que a un grupo de personas se les asigna una letra del conjunto $\{A, B, C, D, F\}$. Y supongamos que le asignamos a Adams la A, a Chou la C, a Goodfriend la B, a Rodríguez la A y a Stevens la F. Esta asignación se ilustra en la Figura 1.

La asignación anterior es un ejemplo de función. El concepto de una función es extremadamente importante en matemática discreta. Las funciones se usan en definiciones de estructuras discretas tales como sucesiones o cadenas. Las funciones también se utilizan para representar cuánto tiempo tarda un ordenador en resolver un problema de un tamaño determinado. Las funciones recursivas, que son funciones que se definen en términos de ellas mismas, se utilizan frecuentemente en ciencias de la computación. Se estudiarán en el Capítulo 3. En esta sección se repasarán los conceptos básicos relacionados con funciones que se necesitan en matemática discreta.

DEFINICIÓN 1 Sean A y B conjuntos. Una *función* f de A en B es una asignación de exactamente un elemento de B a cada elemento de A. Escribimos $f(a) = b$ si b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a de A. Si f es una función de A en B, escribimos $f\colon A \to B$.

Las funciones se pueden especificar de muchas maneras diferentes. A veces declaramos explícitamente las asignaciones, como en la Figura 1. Otras veces damos una fórmula, como $f(x) = x + 1$. Otras usamos un programa de ordenador para especificar la función.

Nota: Una función $f\colon A \to B$ se define a veces en términos de la relación de A en B definida en la Sección 1.6. Discutiremos esta forma de definir funciones en el Capítulo 7.

DEFINICIÓN 2 Si f es una función de A en B, decimos que A es el *dominio* de f y B es el *codominio* de f. Si $f(a) = b$, decimos que b es la *imagen* de a y a es una *preimagen* de b. El *rango* o *imagen* de f es el conjunto de todas las imágenes de elementos de A. También decimos, si f es una función de A en B, que f *transforma* A en B.

La Figura 2 representa una función f de A en B.

Consideremos el ejemplo del comienzo de la sección. Sea G la función que asigna una letra a una persona del grupo. Nota que $G(\text{Adams}) = A$, por ejemplo. El dominio de G es el conjunto {Adams, Chou, Goodfriend, Rodríguez, Stevens} y el codominio es $\{A\ B, C, D, F\}$. La imagen de G es el conjunto $\{A, B, C, F\}$, ya que a cada persona se le asigna una letra del dominio, excepto la D. Considera también los Ejemplos 1 y 2.

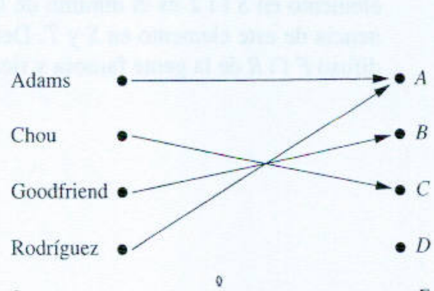


Figura 1. Asignación de letras a un conjunto de personas.

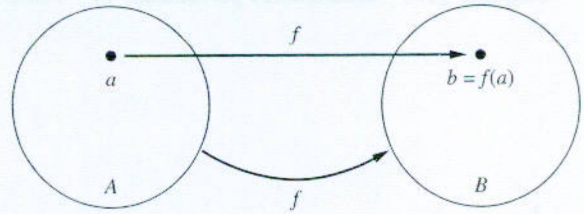


Figura 2. La función f transforma A en B.

EJEMPLO 1 Sea f la función que a una cadena de bits de longitud mayor o igual que 2 le asigna sus dos últimos bits. Entonces, el dominio de f es el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud mayor o igual que 2 y tanto el codominio como la imagen son el conjunto $\{00, 01, 10, 11\}$. ◀

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 2 Sea $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ la función que asigna el cuadrado de un entero a este entero. Entonces, $f(x) = x^2$, donde el dominio de f es el conjunto de todos los enteros, el codominio de f se puede elegir que sea el conjunto de los enteros también y la imagen es el conjunto de los enteros positivos que son cuadrados perfectos, es decir, $\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

EJEMPLO 3 En lenguajes de programación a menudo se especifican el dominio y el codominio de las funciones declaradas. Por ejemplo, la sentencia Java

int **parte_entera**(float real){...}

y la sentencia Pascal

function *parte_entera*(*x*:**real**):**integer**

declaran ambas que el dominio de la función parte_entera es el conjunto de los números reales y su codominio es el conjunto de los enteros. ◀

Dos funciones con valores reales con el mismo dominio se pueden sumar y multiplicar.

DEFINICIÓN 3 Sean f_1 y f_2 funciones de A en $\mathbf{R}$. Entonces, $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ son también funciones de A en $\mathbf{R}$ definidas por

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$$

Observa que las funciones $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ han sido definidas especificando sus valores en el punto x en términos de los valores de f_1 y f_2 en x.

EJEMPLO 4 Sean f_1 y f_2 funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tales que $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x - x^2$. ¿Cuáles son las funciones $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$?

Solución: De la definición de la suma y el producto de funciones, se sigue que

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

y

$$(f_1 f_2)(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4.$$ ◀

Cuando f es una función de un conjunto A en un conjunto B, también se puede definir la imagen de un subconjunto de A.

DEFINICIÓN 4 Sea f una función de un conjunto A en un conjunto B y sea S un subconjunto de A. La *imagen* de S es el subconjunto de B formado por todas las imágenes de los elementos de S. Denotamos por $f(S)$ a la imagen de S, de tal forma que

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}.$$

EJEMPLO 5 Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$ y $f(e) = 1$. La imagen del subconjunto $S = \{b, c, d\}$ es el conjunto $f(S) = \{1, 4\}$. ◀

FUNCIONES INYECTIVAS Y SOBREYECTIVAS

Evaluación

Algunas funciones asignan imágenes distintas a elementos distintos del dominio. Estas funciones se conocen como **inyectivas.**

DEFINICIÓN 5 Se dice que una función f es *inyectiva* si, y sólo si, $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$ para x e y en el dominio de f. Una función se dice que es una *inyección* si es inyectiva.

Observación: Una función f es inyectiva si, y sólo si, $f(x) \neq f(y)$ siempre que $x \neq y$. Esta forma de expresar que f es inyectiva se obtiene tomando el contrarrecíproco de la implicación de la definición. Observa que podemos expresar que f es inyectiva usando cuantificadores, como $\forall x \forall y\, (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$, o de forma equivalente, $\forall x \forall y\, (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$, donde el dominio del cuantificador viene dado por el dominio de la función.

Ejemplos adicionales

Ilustramos este concepto dando ejemplos de funciones que son inyectivas y otras que no lo son.

EJEMPLO 6 Determina si la función f de $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1$ y $f(d) = 3$, es una función inyectiva.

Solución: La función f es inyectiva puesto que f toma diferentes valores en los cuatro elementos del dominio. Esto se ilustra en la Figura 3. ◀

EJEMPLO 7 Determina si la función $f(x) = x^2$ del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.

Solución: La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva puesto que, por ejemplo, $f(1) = f(-1) = 1$, pero $1 \neq -1$. Observa que la función f es inyectiva si el dominio se restringe a $\mathbf{Z}^+$. ◀

EJEMPLO 8 Determina si la función $f(x) = x + 1$ es inyectiva.

Solución: La función $f(x) = x + 1$ es inyectiva. Para demostrarlo, vemos que $x + 1 \neq y + 1$ cuando $x \neq y$. ◀

Vamos a dar algunas condiciones para garantizar que una función es inyectiva.

DEFINICIÓN 6 Una función f cuyo dominio y codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales se denomina *estrictamente creciente* si $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$ y tanto x como y estén en el dominio de f. De forma similar, f se dice que es *estrictamente decreciente* si $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$ y x e y estén en el dominio de f.

Observación: Una función f es estrictamente creciente si $\forall x \forall y\, ((x < y) \rightarrow (f(x) < f(y)))$ y es estrictamente decreciente si $\forall x \forall y\, ((x < y) \rightarrow (f(x) > f(y)))$, donde el dominio viene dado por el dominio de f.

De estas definiciones se deduce que una función que es estrictamente creciente o decreciente debe ser inyectiva.

Para algunas funciones, la imagen y el codominio son iguales. Esto es, todo miembro del codominio es la imagen de algún elemento del dominio. Las funciones con esta propiedad se denominan **sobreyectivas.**

DEFINICIÓN 7 Una función f de A a B es *sobreyectiva*, o *sobre*, si, y sólo si, para todo elemento $b \in B$ hay un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Una función f es una *sobreyección* si es sobreyectiva.

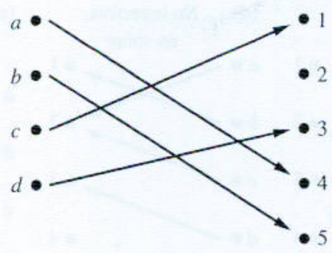


Figura 3. Una función inyectiva.

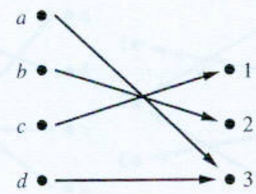


Figura 4. Una función sobreyectiva.

Observación: Una función f es sobre si $\forall y \exists x\, (f(x) = y)$, donde el dominio para x es el dominio de la función y el dominio para y es el codominio de la función.

Ejemplos adicionales

Damos a continuación algunos ejemplos de funciones sobreyectivas y otras que no lo son.

EJEMPLO 9 Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3\}$ definida por $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es f una función sobreyectiva?

Solución: Como los tres elementos del codominio son imágenes de elementos del dominio, vemos que f es sobre. Esto se ilustra en la Figura 4. Observa que si el codominio fuese $\{1, 2, 3, 4\}$, entonces f no sería sobreyectiva. ◀

EJEMPLO 10 ¿Es sobreyectiva la función $f(x) = x^2$ del conjunto de los enteros en el conjunto de los enteros?

Solución: La función f no es sobreyectiva porque no hay ningún entero x tal que $x^2 = -1$, por ejemplo. ◀

EJEMPLO 11 ¿Es sobreyectiva la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros?

Solución: Esta función es sobre, puesto que para todo entero y hay un entero x tal que $f(x) = y$. Para ver esto, ten en cuenta que $f(x) = y$ si, y sólo si, $x + 1 = y$, lo cual se cumple si, y sólo si, $x = y - 1$. ◀

DEFINICIÓN 8 La función f es una *biyección* o *función biyectiva* si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Los Ejemplos 12 y 13 ilustran el concepto de biyección.

EJEMPLO 12 Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es f una biyección?

Solución: La función f es inyectiva y sobre. Es inyectiva puesto que la función toma siempre valores distintos. Es sobre porque los cuatro elementos del codominio son imágenes de elementos del dominio. Por tanto, f es una biyección. ◀

La Figura 5 muestra cuatro funciones. La primera es inyectiva, pero no sobre; la segunda es sobre, pero no inyectiva; la tercera es inyectiva y sobreyectiva, y la cuarta no es ni inyectiva ni sobreyectiva. La quinta correspondencia de la Figura 5 no es una función, puesto que asigna dos elementos diferentes a un mismo elemento.

Supongamos que f es una función de un conjunto A en sí mismo. Si A es finito, entonces f es inyectiva si, y sólo si, es sobre. (Esto se deduce del resultado del Problema 64 del final de esta sección). Esto no se cumple necesariamente si A es infinito (como se verá en la Sección 3.2).

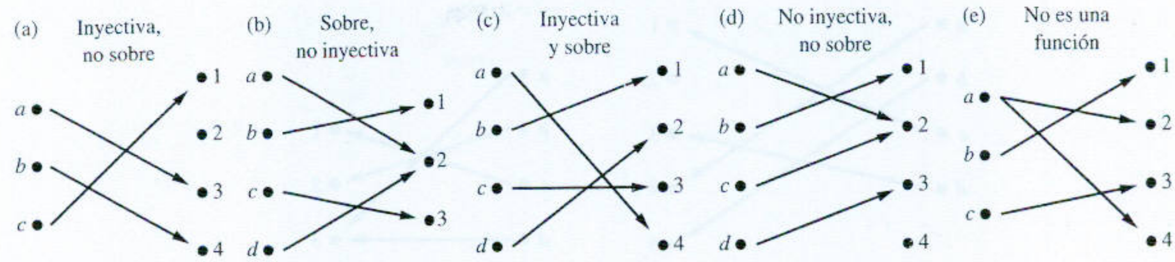


Figura 5. Ejemplos de diferentes tipos de correspondencias.

EJEMPLO 13 Sea A un conjunto. La *función identidad* sobre A es la función $\iota_A : A \to A$ tal que

$$\iota_A(x) = x$$

para cada $x \in A$. En otras palabras, la función identidad ι_A es la función que asigna a cada elemento él mismo. La función ι_A es inyectiva y sobreyectiva, por lo que es una biyección. ◀

FUNCIONES INVERSAS Y COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Consideremos ahora una biyección f del conjunto A en el conjunto B. Como f es una función sobre, todo elemento de B es la imagen de algún elemento de A. Además, como f es también una función inyectiva, todo elemento de B es la imagen de un *único* elemento de A. Por tanto, podemos definir una nueva función de B en A que invierte la correspondencia dada por f. Esto conduce a la Definición 9.

DEFINICIÓN 9 Sea f una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La *función inversa* de f es la función que asigna a un elemento b que pertenece a B el único elemento a de A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

La Figura 6 ilustra el concepto de función inversa.

Si una función f no es biyectiva, no podemos definir su función inversa. Si f no es una biyección, entonces bien no es inyectiva o bien no es sobre. Si f no es inyectiva, algún elemento b del codominio es la imagen de más de un elemento del dominio. Si f no es sobreyectiva, entonces para algún elemento b del codominio no existe un a del dominio tal que $f(a) = b$. Por consiguiente, si f no es una biyección, no podemos asignar a cada elemento b del codominio un único elemento a del dominio tal que $f(a) = b$ (porque para algún b hay bien más de un elemento a o bien ninguno).

Una función biyectiva se llama **invertible** puesto que podemos definir una inversa de esa función. Una función es **no invertible** si no es una biyección, ya que la inversa de tal función no existe.

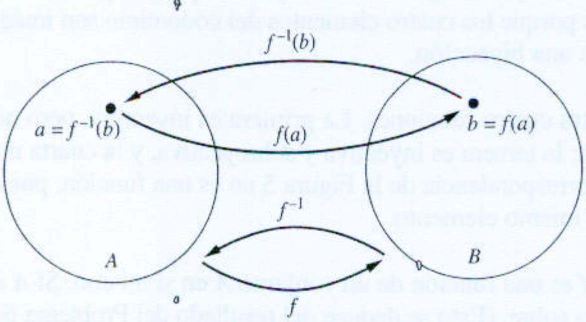


Figura 6. La función f^{-1} es la inversa de la función f.

EJEMPLO 14 Sea f la función de $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ definida por $f(a) = 2, f(b) = 3$ y $f(c) = 1$. ¿Es f invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?

Solución: La función f es invertible puesto que es una biyección. La función inversa f^{-1} invierte la correspondencia dada por f, de tal forma que $f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a$ y $f^{-1}(3) = b$. ◀

EJEMPLO 15 Sea f la función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es f invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?

Solución: La función f tiene inversa puesto que es biyectiva, como ya hemos visto. Para invertir la función, supongamos que y es la imagen de x, por lo que $y = x + 1$. Entonces, $x = y - 1$, lo que significa que $y - 1$ es el único elemento de $\mathbf{Z}$ al que se le asigna y mediante f. Por tanto, $f^{-1}(y) = y - 1$. ◀

EJEMPLO 16 Sea f la función de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$ dada por $f(x) = x^2$. ¿Es f invertible?

Solución: Como $f(-1) = f(1) = 1$, f no es inyectiva. Si se definiese una función inversa, a 1 se le asignarían dos elementos. Por tanto, f no es invertible. ◀

DEFINICIÓN 10 Sea g una función del conjunto A al conjunto B y sea f una función del conjunto B al conjunto C. La *composición* de las funciones f y g, denotada por $f \circ g$, se define por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

En otras palabras, $f \circ g$ es la función que asigna al elemento a de A el elemento asignado por f a $g(a)$. Observa que la composición $f \circ g$ no se puede definir a no ser que la imagen de g sea un subconjunto del dominio de f. En la Figura 7 se muestra la composición de dos funciones.

EJEMPLO 17 Sea g la función del conjunto $\{a, b, c\}$ en sí mismo definida por $g(a) = b$, $g(b) = c$ y $g(c) = a$. Sea f la función del conjunto $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ tal que $f(a) = 3, f(b) = 2$ y $f(c) = 1$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Y la composición de g y f?

Solución: La composición $f \circ g$ se define como $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$ y $(f \circ g)(c) = f(g \circ f)) = f(a) = 3$.

Observa que $g \circ f$ no está definida, porque la imagen de f no es un subconjunto del dominio de g. ◀

EJEMPLO 18 Sean f y g las funciones del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros definidas por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Cuál es la composición de g y f?

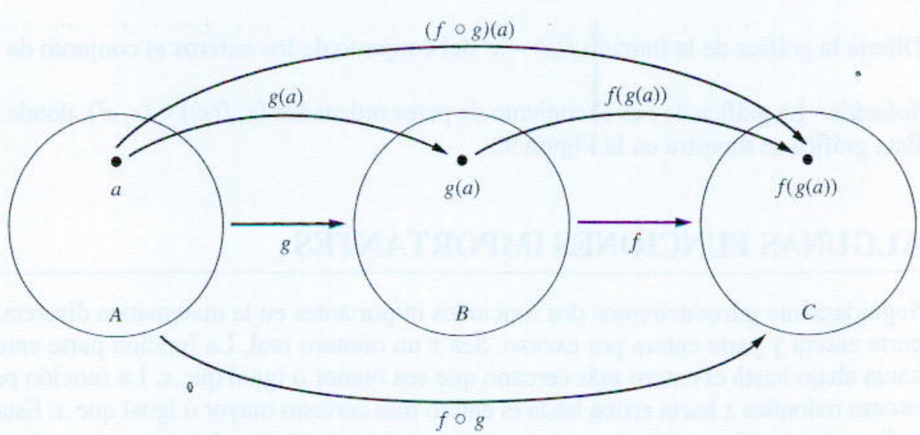


Figura 7. La composición de las funciones f y g.

Solución: Tanto las composiciones $f \circ g$ como $g \circ f$ están definidas. Además,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11.$$

Observación: Ten en cuenta que aunque $f \circ g$ y $g \circ f$ están definidas para las funciones f y g del Ejemplo 18, $f \circ g$ y $g \circ f$ no son iguales. En otras palabras, la propiedad conmutativa no se aplica a la composición de funciones.

Cuando se forma la composición de una función y su inversa, no importa el orden, se obtiene una función identidad. Para ver esto, supongamos que f es una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. Entonces, la función inversa f^{-1} existe y es una biyección de B en A. La función inversa invierte la correspondencia de la función original, de tal forma que $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$ y $f(a) = b$ cuando $f^{-1}(b) = a$. Por tanto,

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

y

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

Por consiguiente, $f^{-1} \circ f = \iota_A$ y $f \circ f^{-1} = \iota_B$, donde ι_A e ι_B son las funciones identidad sobre los conjuntos A y B, respectivamente. Es decir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Podemos asociar un conjunto de pares de $A \times B$ a cada función de A en B. Este conjunto de pares se llama **gráfica** de la función y generalmente se representa para ayudar a entender el comportamiento de la función.

DEFINICIÓN 11 Sea f una función del conjunto A al conjunto B. La *gráfica* de una función f es el conjunto de pares ordenados $\{(a, b) \mid a \in A \text{ y } f(a) = b\}$.

Por la definición, la gráfica de una función f de A a B es el subconjunto de $A \times B$ que contiene los pares ordenados con la segunda entrada igual al elemento de B asignado por f a la primera entrada.

EJEMPLO 19 Dibuja la gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros.

Solución: La gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $(n, 2n + 1)$, donde n es un entero. Esta gráfica se muestra en la Figura 8. ◀

EJEMPLO 20 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2$ del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros.

Solución: La gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $(x, f(x)) = (x, x^2)$, donde x es un entero. Esta gráfica se muestra en la Figura 9. ◀

ALGUNAS FUNCIONES IMPORTANTES

Seguidamente introduciremos dos funciones importantes en la matemática discreta: las funciones parte entera y parte entera por exceso. Sea x un número real. La función parte entera redondea x hacia abajo hasta el entero más cercano que sea menor o igual que x. La función parte entera por exceso redondea x hacia arriba hasta el entero más cercano mayor o igual que x. Estas funciones se utilizan a menudo cuando se cuentan objetos y desempeñan un importante papel en el análisis del número de pasos utilizados por un procedimiento para resolver problemas de un tamaño particular.

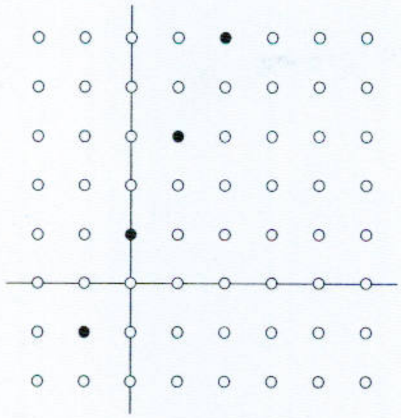


Figura 8. Gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ de **Z** en **Z**.

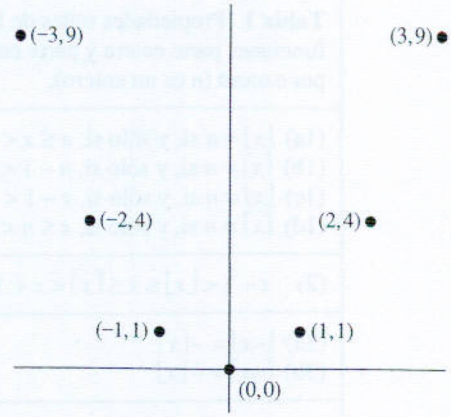


Figura 9. Gráfica de la función $f(x) = x^2$ de **Z** en **Z**.

DEFINICIÓN 12 La *función parte entera* asigna a un número real x el mayor entero que es menor o igual que x. El valor de la función parte entera se denota por $\lfloor x \rfloor$. La *función parte entera por exceso* asigna al número real x el menor entero que es mayor o igual que x. El valor de la función parte entera por exceso en x se denota por $\lceil x \rceil$.

Observación: La función parte entera se denota a menudo por $[x]$.

EJEMPLO 21 Éstos son algunos valores de las funciones parte entera y parte entera por exceso:

$$\left\lfloor \tfrac{1}{2} \right\rfloor = 0, \qquad \left\lceil \tfrac{1}{2} \right\rceil = 1, \qquad \left\lfloor -\tfrac{1}{2} \right\rfloor = 1, \qquad \left\lceil -\tfrac{1}{2} \right\rceil = 0,$$

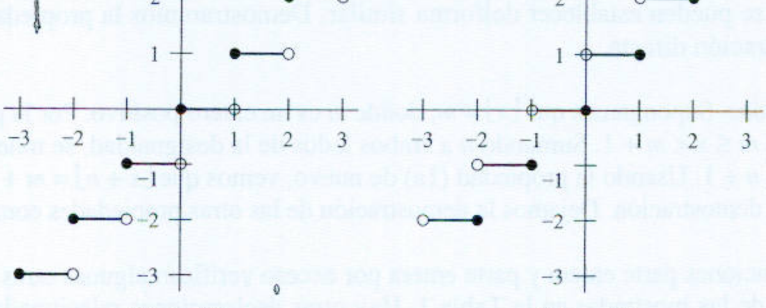
$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3, \qquad \lceil 3{,}1 \rceil = 4, \qquad \lfloor 7 \rfloor = 7, \qquad \lceil 7 \rceil = 7.$$

Enlaces

En la Figura 10 representamos las gráficas de las funciones parte entera y parte entera por exceso. En la Figura 10(a) se muestra la gráfica de la función $\lfloor x \rfloor$. Observa que esta función toma un mismo valor en todo el intervalo $[n, n + 1)$, el valor n. A partir de él, salta al valor $n + 1$ cuando $x = n + 1$. En la Figura 10(b) se ha dibujado la gráfica de la función parte entera por exceso, $\lceil x \rceil$. Esta función toma un valor constante en el intervalo $(n, n + 1]$, el valor $n + 1$. A partir de él, salta al valor $n + 2$ cuando x es ligeramente mayor que $n + 1$.

Ejemplos adicionales

Las funciones parte entera y parte entera por exceso son útiles en una gran variedad de aplicaciones, entre las que se incluyen el almacenamiento y la transmisión de datos. Consideremos los Ejemplos 22 y 23, cálculos típicos en problemas de bases de datos y comunicación de datos.



(a) $y = \lfloor x \rfloor$ (b) $y = \lceil x \rceil$

Figura 10. Gráficas de las funciones (a) parte entera y (b) parte entera por exceso.

Tabla 1. Propiedades útiles de las funciones parte entera y parte entera por exceso (n es un entero).
(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ si, y sólo si, $n \le x < n + 1$ (1b) $\lceil x \rceil = n$ si, y sólo si, $n - 1 < x \le n$ (1c) $\lfloor x \rfloor = n$ si, y sólo si, $x - 1 < n \le x$ (1d) $\lceil x \rceil = n$ si, y sólo si, $x \le n < x + 1$
(2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$
(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ (3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ (4b) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

EJEMPLO 22 Los datos almacenados en un disco duro o transmitidos en una red de información generalmente se representan en cadenas de bytes. Cada byte consta de 8 bits. ¿Cuántos bytes se requieren para codificar 100 bits de datos?

Solución: Para determinar el número de bytes necesario, determinaremos el entero más pequeño que es al menos tan grande como el cociente de dividir 100 entre 8, el número de bits y el número de bits por byte, respectivamente. Consecuentemente, se precisan $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12{,}5 \rceil = 13$ bytes. ◀

EJEMPLO 23 En el modo de transferencia asíncrona, ATM (un protocolo usado en redes principales), los datos se organizan en células de 53 bytes. ¿Cuántas células ATM se pueden transmitir en un minuto en una conexión que transmite datos a razón de 500 kilobits por segundo?

Solución: En un minuto esta conexión puede transmitir $500.000 \cdot 60 = 30.000.000$ bits. Cada célula ATM contiene 53 bytes, lo que significa que tiene $53 \cdot 8 = 424$ bits. Para determinar el número de células que pueden transmitirse en un minuto, determinamos el mayor entero que no exceda al resultado de dividir 30.000.000 entre 424. Por tanto, se pueden transmitir $\lfloor 30.000.000/424 \rfloor = 70.754$ células ATM en un minuto por una conexión de 500 kilobits por segundo. ◀

La Tabla 1, en la que x denota un número real, muestra algunas propiedades, simples pero importantes, de las funciones parte entera y parte entera por exceso. Como estas funciones aparecen frecuentemente en matemática discreta, resultará útil considerar estas propiedades en detalle. Cada propiedad de esta tabla se puede establecer utilizando las definiciones de las funciones parte entera y parte entera por exceso. Las propiedades (1a), (1b), (1c) y (1d) se siguen directamente de sus definiciones. Por ejemplo, (1a) afirma que $\lfloor x \rfloor = n$ si, y sólo si, el entero n es menor o igual que x y $n + 1$ es mayor que x. Esto es precisamente lo que significa que n sea el mayor entero que es menor o igual que x, que es la definición de $\lfloor x \rfloor = n$. Las propiedades (1b), (1c) y (1d) se pueden establecer de forma similar. Demostraremos la propiedad (4a) haciendo una demostración directa.

Demostración: Supongamos que $\lfloor x \rfloor = m$, donde m es un entero positivo. Por la propiedad (1a) se cumple que $m \le x < m + 1$. Sumando n a ambos lados de la desigualdad, se muestra que $m + n \le x + n < m + n + 1$. Usando la propiedad (1a) de nuevo, vemos que $\lfloor x + n \rfloor = m + n = \lfloor x \rfloor + n$. Esto completa la demostración. Dejamos la demostración de las otras propiedades como ejercicio. ◀

Las funciones parte entera y parte entera por exceso verifican algunas otras propiedades útiles además de las mostradas en la Tabla 1. Hay otras declaraciones relacionadas con estas funciones que a primera vista parecen ser correctas, pero que realmente no lo son. Veremos algunas consideraciones acerca de estas funciones en los Ejemplos 24 y 25.

Un enfoque útil a la hora de considerar afirmaciones que incluyan la función parte entera es tomar $x = n + \varepsilon$, donde $n = \lfloor x \rfloor$ es un entero y ε, la parte decimal de x, satisface la desigualdad $0 \leq \varepsilon < 1$. De forma similar, cuando consideramos la función parte entera por exceso, puede resultar útil escribir $x = n - \varepsilon$, donde $n = \lceil x \rceil$ es un entero y $0 \leq \varepsilon < 1$.

EJEMPLO 24 Demuestra que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$

Solución: Para demostrar esta afirmación, consideremos $x = n + \varepsilon$, donde n es un entero positivo y $0 \leq \varepsilon < 1$. Debemos considerar dos casos, dependiendo de si ε es menor que $^1/_2$ o no. (En la demostración quedará claro por qué elegimos estos dos casos).

Primero consideremos el caso en que $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$. En este caso, $2x = 2n + 2\varepsilon$ y $\lfloor 2x \rfloor = 2n$, puesto que $0 \leq 2\varepsilon < 1$. De forma similar, $x + \frac{1}{2} = n + (\frac{1}{2} + \varepsilon)$, por lo que $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n$, ya que $0 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$. Por tanto, $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ y $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + n = 2n$.

Ahora veamos el caso en que $\frac{1}{2} \leq \varepsilon < 1$. En este caso, $2x = 2n + 2\varepsilon = (2n + 1) + (2\varepsilon - 1)$. Como $0 \leq 2\varepsilon - 1 < 1$, se sigue que $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$. Como $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor n + (\frac{1}{2} + \varepsilon) \rfloor = \lfloor n + 1 + (\varepsilon - \frac{1}{2}) \rfloor$ y $0 \leq \varepsilon - \frac{1}{2} < 1$, se sigue que $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$. Consecuentemente, $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ y $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + (n + 1) = 2n + 1$. Esto concluye la demostración. ◀

EJEMPLO 25 Demuestra la veracidad o falsedad de la ecuación $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ para todos los números reales x e y.

Solución: Aunque esta sentencia parece correcta, resulta ser falsa. Se puede dar un contraejemplo con $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Con estos valores se ve que $\lceil x + y \rceil = \lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rceil = \lceil 1 \rceil = 1$, pero $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil \frac{1}{2} \rceil + \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1 + 1 = 2$. ◀

Hay ciertos tipos de funciones que se describirán a lo largo del texto. Entre ellas están las polinómicas, logarítmicas y exponenciales. En el Apéndice 1 se ofrece un breve repaso de las propiedades más importantes de estas funciones que se necesitan en el texto. En este libro utilizaremos la notación $\log x$ para denotar el logaritmo en base 2 de x, puesto que 2 es la base que generalmente aparecerá cuando trabajemos con logaritmos. Denotaremos al logaritmo en base b de x, donde b es cualquier número real mayor que 1, por $\log_b x$ y al logaritmo natural de x como $\ln x$.

Otra función que usaremos a lo largo del texto es la **función factorial** $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}^+$, que denotaremos por $f(n) = n!$. El valor de $f(n) = n!$ es el producto de los n primeros enteros positivos, es decir, $f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ [y $f(0) = 0! = 1$].

EJEMPLO 26 Tenemos que $f(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. ◀

Problemas

1. ¿Por qué f no es una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ si

a) $f(x) = 1/x$?
b) $f(x) = \sqrt{x}$?
c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2 + 1)}$?

2. Determina si f es una función de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{R}$ si

a) $f(n) = \pm n$
b) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$
c) $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

3. Determina si f es una función del conjunto de las cadenas de bits al conjunto de los enteros si

a) $f(S)$ es la posición de un bit 0 en S.
b) $f(S)$ es el número de bits 1 en S.
c) $f(S)$ es el menor entero i tal que el bit i-ésimo de S es un 1 y $f(S) = 0$ si S es la cadena vacía, la cadena con cero bits.

4. Halla el dominio y la imagen de estas funciones:

a) la función que asigna a cada entero no negativo su última cifra,
b) la función que asigna el entero siguiente a un entero positivo,
c) la función que asigna a una cadena de bits el número de bits 1 de la cadena,
d) la función que asigna a una cadena de bits el número de bits de la cadena.

5. Halla el dominio y la imagen de estas funciones:

a) la función que asigna a cada cadena de bits la diferencia entre el número de unos y el número de ceros,
b) la función que asigna a cada cadena de bits el doble del número de ceros de la cadena,
c) la función que asigna el número de bits restantes cuando la cadena se separa en bytes (bloques de 8 bits),