2. «Si las matemáticas son fáciles, entonces la lógica no es difícil».

Formalizando estos dos enunciados a sentencias con variables proposicionales y conectivos lógicos, determina cuáles de estas conclusiones son válidas para estas suposiciones.

a) Que las matemáticas no son fáciles si a muchos estudiantes le gusta la lógica.
b) Que a pocos estudiantes les gusta la lógica si las matemáticas no son fáciles.
c) Que las matemáticas no son fáciles o la lógica es difícil.
d) Que la lógica no es difícil o las matemáticas no son fáciles.
e) Que si a pocos estudiantes les gusta la lógica, entonces bien las matemáticas no son fáciles o bien la lógica no es difícil.

71. Demuestra que al menos uno de los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es mayor o igual que el promedio de ellos. ¿Qué clase de demostración has utilizado?

72. Usa el Problema 71 para mostrar que si se ponen los diez primeros números enteros positivos alrededor de un círculo, en cualquier orden, existen tres enteros en posiciones consecutivas alrededor del círculo que tienen una suma mayor o igual que 17.

73. Demuestra que si n es un entero, estas cuatro sentencias son equivalentes: (*i*) n es par, (*ii*) $n + 1$ es impar, (*iii*) $3n + 1$ es impar, (*iv*) $3n$ es par.

74. Demuestra que estas cuatro sentencias son equivalentes: (*i*) n^2 es impar, (*ii*) $1 - n$ es par, (*iii*) n^3 es impar, (*iv*) $n^2 + 1$ es par.

75. ¿Qué reglas de inferencia se utilizan para establecer la conclusión del argumento de Lewis Carroll descrito en el Ejemplo 19 de la Sección 1.3?

76. ¿Qué reglas de inferencia se utilizan para establecer la conclusión del argumento de Lewis Carroll descrito en el Ejemplo 20 de la Sección 1.3?

***77.** Determina si este argumento, tomado de Backhouse [Ba86], es correcto.

Si Supermán fuese capaz y quisiese prevenir el crimen, lo haría. Si Supermán no fuese capaz de prevenir el crimen, sería débil; si no quisiese prevenir el crimen, sería malevolente. Supermán no previene el crimen. Si Supermán existiese, ni sería débil ni malevolente. Por tanto, Supermán no existe.

1.6 Conjuntos

INTRODUCCIÓN

En este libro estudiaremos una gran variedad de estructuras discretas. Éstas incluyen relaciones, que consisten en pares ordenados de elementos; combinaciones, que son colecciones desordenadas de elementos, y grafos, que son conjuntos de vértices y aristas que conectan vértices. Además, ilustraremos cómo se utilizan estas y otras estructuras discretas en el modelado y la resolución de problemas. En particular, se describirán muchos ejemplos del uso de estructuras discretas en almacenamiento, comunicación y manipulación de datos. En esta sección estudiamos la estructura discreta fundamental, sobre la que se construyen todas las demás: el conjunto.

Los conjuntos se utilizan para agrupar objetos. Generalmente, los objetos de un conjunto tienen propiedades similares. Por ejemplo, todos los estudiantes que están matriculados en tu facultad forman un conjunto. De la misma forma, todos los estudiantes matriculados en la asignatura de matemática discreta en cualquier facultad forman un conjunto. Además, aquellos alumnos de matemática discreta matriculados en tu facultad forman otro conjunto que puede formarse tomando los elementos comunes de las dos primeras colecciones. El lenguaje de los conjuntos es un medio para estudiar tales colecciones de forma organizada. A continuación proporcionamos una definición de conjunto.

DEFINICIÓN 1 Un *conjunto* es una colección desordenada de objetos.

Enlaces

Observa que el término *objeto* se ha utilizado sin especificar qué es. Esta definición de conjunto como una colección de objetos, basada en la noción intuitiva de lo que es un objeto, fue establecida por primera vez por el matemático alemán Georg Cantor en 1895. La teoría que resulta de esta definición intuitiva de conjunto conduce a **paradojas,** o inconsistencias lógicas, como el filósofo inglés Bertrand Russell mostró en 1902 (en el Problema 30 se describe una de estas paradojas). Estas inconsistencias lógicas se pueden evitar construyendo la teoría de conjuntos con suposiciones básicas, llamadas **axiomas.** En este texto seguiremos la versión original de Cantor de la teoría de conjuntos, conocida como la **teoría naif de conjuntos,** sin desarrollar una versión axiomática, puesto que todos los conjuntos que consideraremos se pueden tratar consistentemente usando la teoría original de Cantor.

Tras este preámbulo, comenzamos con nuestra discusión sobre conjuntos

DEFINICIÓN 2 Los objetos de un conjunto se llaman también *elementos* o *miembros* del conjunto. Se dice que un conjunto *contiene* a sus elementos.

Hay varias formas de describir un conjunto. Una es enumerar todos los miembros del conjunto cuando esto sea posible. Para ello utilizamos una notación en la que todos los miembros se enumeran entre llaves. Por ejemplo, la notación $\{a, b, c, d\}$ representa el conjunto con los cuatro elementos a, b, c y d.

EJEMPLO 1 El conjunto de las vocales del alfabeto se puede escribir como $V = \{a, e, i, o, u\}$. ◀

EJEMPLO 2 El conjunto de los enteros positivos impares menores que 10 se puede expresar como $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ◀

EJEMPLO 3 Aunque los conjuntos se suelen usar para agrupar elementos con propiedades comunes, no hay nada que impida a un conjunto tener elementos no relacionados. Por ejemplo, $\{a$, 2, Alfredo, Sevilla$\}$ es el conjunto que contiene los cuatro elementos a, 2, Alfredo y Sevilla. ◀

A veces, la notación con llaves se utiliza para describir un conjunto sin enumerar todos sus miembros. Sólo se enumera algunos de ellos y usamos tres puntos suspensivos (...) para representar los demás cuando el patrón general de los elementos es obvio.

EJEMPLO 4 El conjunto de enteros positivos menores que 100 se puede denotar como $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. ◀

Los siguientes conjuntos, escritos en negrita, desempeñan un importante papel en matemática discreta:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de los **números naturales.**
$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, el conjunto de los **enteros.**
$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de los **enteros positivos.**
$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$, el conjunto de los **números racionales.**
R, el conjunto de los **números reales.**

GEORG CANTOR (1845-1918) Georg Cantor nació en San Petersburgo, Rusia, donde su padre fue un próspero comerciante. Cantor desarrolló su interés por las matemáticas en la adolescencia. Comenzó sus estudios universitarios en Zurich en 1862, pero cuando su padre murió abandonó esta ciudad. Continuó sus estudios en la Universidad de Berlín en 1863 como discípulo de los eminentes matemáticos Weierstrass, Kummer y Kronecker. Defendió su tesis doctoral, que trataba sobre teoría de números, en 1867. Tomó posesión de una plaza de profesor en la Universidad de Halle en 1869, donde continuó hasta su muerte.

Cantor es considerado el fundador de la teoría de conjuntos. Sus aportaciones en este área incluyen el descubrimiento de que el conjunto de números reales es no numerable. Son notorias sus contribuciones al análisis. Cantor también se interesó por la filosofía y escribió trabajos relacionando su teoría de conjuntos con la metafísica.

Enlaces

Se casó en 1874 y tuvo cinco hijos. El buen ánimo de su mujer compensó su temperamento melancólico. Aunque recibió una gran herencia de su padre, fue mal pagado como profesor, y para mitigar esto, intentó conseguir un puesto mejor remunerado en la Universidad de Berlín. Su solicitud fue bloqueada por Kronecker, quien no estaba de acuerdo con los puntos de vista de Cantor sobre la teoría de conjuntos. Cantor sufrió una enfermedad mental en los últimos años de su vida. Murió en 1918 en una clínica psiquiátrica.

(Hay que tener en cuenta que algunas personas no consideran el 0 como un número natural, por lo que tienes que prestar cuidado al término *número natural* cuando trabajes con otros libros).

Muchas sentencias matemáticas declaran que dos colecciones de objetos especificadas de forma diferente son realmente el mismo conjunto. Necesitamos por ello aclarar qué entendemos con que dos conjuntos sean iguales.

DEFINICIÓN 3 Dos conjuntos son *iguales* si, y sólo si, tienen los mismos elementos.

EJEMPLO 5 Los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{3, 5, 1\}$ son iguales, puesto que tienen los mismos elementos. Observa que el orden en el que se listan los elementos de un conjunto no importa. Ten en cuenta también que no importa que un elemento se liste más de una vez, por lo que $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ es el mismo conjunto que $\{1, 3, 5\}$, puesto que ambos tienen los mismos elementos. ◀

Ejemplos adicionales

Otra forma de describir un conjunto es usando la notación de **construcción de conjuntos.** Caracterizamos todos los elementos del conjunto declarando la propiedad o propiedades que deben tener sus miembros. Por ejemplo, el conjunto O de todos los enteros impares menores que 10 se puede escribir como

$$O = \{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 10\}.$$

Generalmente utilizamos esta notación cuando es imposible enumerar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números reales se puede escribir como

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ es un número real}\}.$$

Los conjuntos se pueden representar también gráficamente mediante diagramas de Venn, llamados así por el matemático inglés John Venn, quien introdujo esta representación en 1881. En los diagramas de Venn, el **conjunto universal** U, el cual contiene todos los objetos bajo consideración, se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo se utilizan círculos u otras figuras geométricas para representar conjuntos. A veces se emplean puntos para representar elementos particulares del conjunto. Los diagramas de Venn se usan a menudo para indicar relaciones entre conjuntos. En el siguiente ejemplo mostraremos cómo se puede utilizar un diagrama de Venn.

EJEMPLO 6 Dibuja un diagrama de Venn que represente V, el conjunto de las vocales.

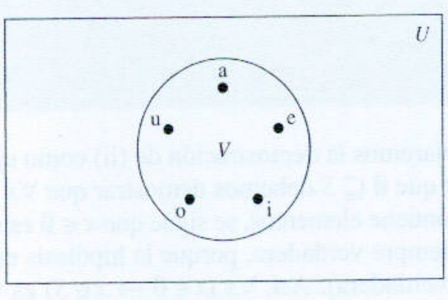


Figura 1. Diagrama de Venn para el conjunto de las vocales

BERTRAND RUSSELL (1872-1970) Bertrand Russell nació en una prominente familia inglesa activa en el movimiento progresista y con un fuerte compromiso con la libertad. Quedó huérfano a edad temprana y fue puesto bajo el cuidado de sus abuelos paternos, que le educaron en casa. Ingresó en el Trinity College, Cambridge, en 1890, donde destacó en matemáticas y ciencias morales. Consiguió una beca con su trabajo sobre los fundamentos de la geometría. En 1910, el Trinity College le nombró profesor de lógica y filosofía de las matemáticas.

Russell luchó por causas progresistas durante toda su vida. Sostuvo fuertes convicciones pacifistas y sus protestas contra la Primera Guerra Mundial le condujeron a dimitir de su plaza en el Trinity College. Estuvo en prisión durante seis meses en 1918 debido a un artículo que escribió que fue etiquetado de sedicioso. Russell luchó por el sufragio de la mujer en Gran Bretaña. En 1961, a la edad de ochenta y nueve años, fue a la cárcel por segunda vez por sus protestas a favor del desarme nuclear.

Enlaces

El gran trabajo de Russell fue el desarrollo de principios que pudiesen ser usados como fundamentos para todas las matemáticas. Su trabajo más famoso es *Principia Mathematica*, escrito con Alfred North Whitehead, en el que se intentan deducir todas las matemáticas utilizando un conjunto de axiomas primarios. Escribió muchos libros sobre filosofía, física y sus ideas políticas. Russell ganó el premio Nobel de Literatura en 1950.

Solución: Dibujamos un rectángulo para indicar el conjunto universal U, el conjunto de las 28 letras del alfabeto. Dentro del rectángulo dibujamos un círculo para representar V. Dentro de este círculo indicamos los elementos de V con puntos (véase la Figura 1). ◀

Ahora presentaremos la notación que se utiliza para describir la pertenencia a un conjunto. Escribimos que $a \in A$ para denotar que a es un elemento del conjunto A. La notación $a \notin A$ expresa que a no es miembro del conjunto A. (Generalmente, se usan letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos).

Hay un conjunto especial que no tiene elementos. Este conjunto se llama **conjunto vacío** o **conjunto nulo,** y se denota por $\emptyset$. El conjunto vacío también se puede denotar por $\{\ \}$ (esto es, representamos el conjunto vacío por un par de llaves que encierran todos los elementos del conjunto). A menudo, un conjunto de elementos con determinadas propiedades resulta ser el conjunto vacío. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos que son mayores que sus cuadrados es el conjunto vacío.

Un error que se comete a menudo consiste en confundir el conjunto vacío $\emptyset$ con el conjunto $\{\emptyset\}$, que es un **conjunto unitario,** esto es, un conjunto con un solo elemento. ¡El único elemento del conjunto $\{\emptyset\}$ es el conjunto vacío!

DEFINICIÓN 4 El conjunto A se dice que es subconjunto de B si, y sólo si, todo elemento de A es también un elemento de B. Usamos la notación $A \subseteq B$ para indicar que A es un subconjunto de B.

Vemos que $A \subseteq B$ si, y sólo si, la cuantificación

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

es verdadera. Por ejemplo, el conjunto de enteros positivos impares menores que 10 es un subconjunto del conjunto de los enteros positivos menores que 10. El conjunto de todos los estudiantes de ingeniería informática de tu facultad es un subconjunto del conjunto de todos los estudiantes de tu universidad.

El Teorema 1 muestra que todo subconjunto no vacío de S tiene al menos dos subconjuntos, el conjunto vacío y el conjunto S, esto es, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

TEOREMA 1 Para cualquier conjunto S,

(i) $\emptyset \subseteq S$ y (ii) $S \subseteq S$.

Demostración: Demostraremos (i) y dejaremos la demostración de (ii) como ejercicio.

Sea S un conjunto. Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$ debemos demostrar que $\forall x\,(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ es verdadera. Como el conjunto vacío no contiene elementos, se sigue que $x \in \emptyset$ es siempre falsa. Por tanto, la implicación $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ es siempre verdadera, porque la hipótesis es siempre falsa (y una implicación con hipótesis falsa es verdadera). Así, $\forall x\,(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ es verdadera, lo que completa la demostración de (i). Observa que esto es un ejemplo de demostración vacua. ◀

Cuando queremos enfatizar que A es un subconjunto de B, pero que $A \neq B$, escribimos $A \subset B$ y decimos que A es un **subconjunto propio** de B. Los diagramas de Venn se pueden utilizar para

Enlaces

JOHN VENN (1834-1923) John Venn nació en una familia del Londres suburbano que destacaba por su filantropía. Estudió en Londres y obtuvo su graduación en matemáticas en el Caius College, Cambridge, en 1857. Posteriormente fue elegido para un puesto en este College, donde estuvo hasta su muerte. Se ordenó clérigo en 1859, y tras un breve período de trabajo religioso, volvió a Cambridge, donde se dedicó a la ética. Además de por su trabajo matemático, Venn se interesó por la historia y escribió mucho acerca de su College y su familia.

El libro de Venn *Lógica simbólica* clarifica ideas presentadas originalmente por Boole. En este libro presenta un desarrollo sistemático de un método que utiliza figuras geométricas, conocido como *diagramas de Venn*. Hoy día estos diagramas son una herramienta primordial para analizar argumentos lógicos e ilustrar relaciones entre conjuntos. Adicionalmente a su trabajo sobre lógica simbólica, Venn hizo contribuciones a la teoría de probabilidades descritas en su libro sobre esta materia, texto ampliamente utilizado.

mostrar que un conjunto A es un subconjunto del conjunto B. Dibujamos el conjunto universal U como un rectángulo. Dentro de este rectángulo dibujamos un círculo que corresponda a B. Como A es un subconjunto de B, dibujamos el círculo correspondiente a A dentro del círculo de B. Esta relación se muestra en la Figura 2.

Una forma de mostrar que dos conjuntos tienen los mismos elementos es mostrar que cada conjunto es subconjunto del otro. En otras palabras, si podemos mostrar que A y B cumplen que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, entonces $A = B$. Éste es un método útil de ver que dos conjuntos son iguales. Esto es, $A = B$, donde A y B son conjuntos, si, y sólo si, $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$ y $\forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$, o de forma equivalente, si, y sólo si, $\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Los conjuntos pueden tener otros conjuntos como elementos. Por ejemplo, podemos definir los conjuntos $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ y $\{x \mid x$ es un subconjunto del conjunto $\{a, b\}\}$. Observa que estos dos conjuntos son iguales.

Los conjuntos se usan con mucha frecuencia en problemas de recuento. Para tales aplicaciones necesitamos definir el tamaño de los conjuntos.

DEFINICIÓN 5 Sea S un conjunto. Si hay exactamente n elementos distintos en S, donde n es un entero no negativo, decimos que S es un *conjunto finito* y n es el *cardinal* de S. El cardinal de S se denota por $|S|$.

EJEMPLO 7 Sea A el conjunto de los enteros positivos impares menores que 10. Entonces, $|A| = 5$. ◀

EJEMPLO 8 Sea S el conjunto de las letras del alfabeto español. Entonces, $|S| = 28$. ◀

[Nota del Traductor: El alfabeto español se compone de las 26 letras del alfabeto internacional inglés utilizado típicamente en ciencias de la computación más las letras *ch* y *ñ*]. ◀

EJEMPLO 9 Como el conjunto vacío no tiene elementos, se sigue que $|\emptyset| = 0$. ◀

DEFINICIÓN 6 Un conjunto se dice que es *infinito* si no es finito.

EJEMPLO 10 El conjunto de los enteros positivos es infinito. ◀

Ejemplos adicionales

Del cardinal de conjuntos infinitos hablaremos en la Sección 3.2. En esa sección discutiremos qué significa que un conjunto sea numerable y mostraremos que ciertas clases de conjuntos son numerables y otras no.

EL CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

En muchos problemas debemos probar todas las combinaciones posibles de elementos de un conjunto para ver si satisfacen una propiedad determinada. Para considerar todas estas combina-

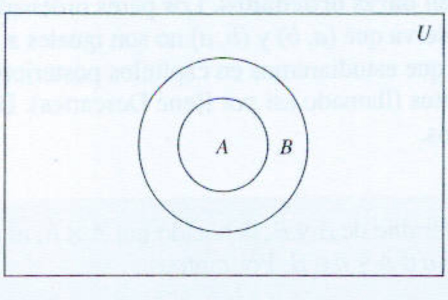


Figura 2. Diagrama de Venn que muestra que A es un subconjunto de B.

ciones de elementos de un conjunto S, construimos un nuevo conjunto cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de S.

DEFINICIÓN 7 Dado un conjunto S, el *conjunto de las partes* de S es el conjunto de todos los subconjuntos de S. El conjunto de las partes de S se denota por $P(S)$.

EJEMPLO 11 ¿Cuál es el conjunto de las partes del conjunto $\{0, 1, 2\}$?

Solución: El conjunto de las partes $P(\{0, 1, 2\})$ es el conjunto de los subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$. Por tanto,

$$P(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Observa que el conjunto vacío y el propio conjunto son miembros del conjunto de las partes. ◀

EJEMPLO 12 ¿Cuál es el conjunto de las partes del conjunto vacío? ¿Cuál es el conjunto de las partes de $\{\emptyset\}$?

Solución: El conjunto de las partes del conjunto vacío tiene exactamente un subconjunto: él mismo. Por tanto,

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

El conjunto $\{\emptyset\}$ tiene exactamente dos subconjuntos, a saber, $\emptyset$ y el propio conjunto $\{\emptyset\}$. Por tanto,

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$ ◀

Si un conjunto tiene n elementos, entonces el conjunto de las partes del conjunto tiene 2^n elementos. Demostraremos este hecho de varias formas diferentes en secciones posteriores del libro.

PRODUCTO CARTESIANO

El orden de los elementos en una colección puede ser importante. Como los elementos de un conjunto están desordenados, necesitamos una estructura diferente para representar colecciones ordenadas. Esto nos lo proporcionan las ***n*-tuplas ordenadas.**

DEFINICIÓN 8 La *n-tupla ordenada* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada en la que a_1 es su primer elemento, a_2 el segundo, … y a_n el elemento n-ésimo.

Decimos que dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, cada par correspondiente de sus elementos es igual. En otras palabras, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si, y sólo si, $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. En particular, las 2-tuplas se llaman **pares ordenados.** Los pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$. Observa que (a, b) y (b, a) no son iguales a no ser que $a = b$.

Muchas de las estructuras discretas que estudiaremos en capítulos posteriores se basan en la noción de *producto cartesiano* de conjuntos (llamado así por René Descartes). Definimos primero el producto cartesiano de dos conjuntos.

DEFINICIÓN 9 Sean A y B conjuntos. El *producto cartesiano* de A y B, denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Por tanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

EJEMPLO 13 Sea A el conjunto de todos los estudiantes de una universidad, y sea B el conjunto de todas las asignaturas ofertadas en la universidad. ¿Cuál es el producto cartesiano $A \times B$?

Solución: El producto cartesiano $A \times B$ consiste en todos los pares ordenados de la forma (a, b), donde a es un estudiante de la universidad y b es una asignatura ofertada en la universidad. El conjunto $A \times B$ se puede utilizar para representar todas las posibles matriculaciones de estudiantes en asignaturas en la universidad. ◀

EJEMPLO 14 ¿Cuál es el producto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$?

Solución: El producto cartesiano $A \times B$ es

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$ ◀

Una **relación** del conjunto A en el conjunto B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Los elementos de R son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B. Por ejemplo, $R = \{(a, 0), (a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 3)\}$ es una relación del conjunto $\{a, b, c\}$ en el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Estudiaremos en profundidad las relaciones en el Capítulo 7.

Los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$ no son iguales, a no ser que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ (de tal forma que $A \times B = \emptyset$) o a no ser que $A = B$ (véase el Problema 26, al final de esta sección). Ilustramos esto en el Ejemplo 15.

EJEMPLO 15 Demuestra que el producto cartesiano $B \times A$ no es igual al producto cartesiano $A \times B$, donde A y B son los conjuntos del Ejemplo 14.

Solución: El producto cartesiano $B \times A$ es

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\},$$

que no es igual al conjunto $A \times B$ hallado en el Ejemplo 14. ◀

Podemos también definir el producto cartesiano de más de dos conjuntos.

DEFINICIÓN 10 El *producto cartesiano* de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, es el conjunto de n-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde a_i pertenece a A_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

RENÉ DESCARTES (1596-1650) René Descartes nació en el seno de un familia noble cerca de Tours, Francia, a más de 300 km al suroeste de París. Fue el tercer hijo de la primera mujer de su padre; su madre falleció pocos días después de su nacimiento. Debido a la débil salud de René, su padre, juez de provincias, perdonó las clases formales de su hijo, hasta que a la edad de ocho años entró en el colegio jesuita de La Flèche. El director del colegio se encariñó con él y le permitía estar en cama hasta tarde debido a su débil salud. Desde entonces, Descartes pasó las mañanas en la cama. Él consideraba esos momentos como sus horas más productivas para pensar.

Descartes abandonó el colegio en 1612, trasladándose a París, donde estuvo dos años estudiando matemáticas. Consiguió graduarse en leyes en 1616 por la Universidad de Poitiers. A los dieciocho años, Descartes se desencantó de los estudios y decidió ver mundo. Se trasladó a París, donde se hizo un jugador de éxito. Sin embargo, al crecer, se cansó de esa vida y se mudó al barrio de Saint-Germain, donde se dedicó al estudio de las matemáticas. Cuando sus amigos jugadores le encontraron, decidió abandonar Francia y hacer carrera militar. Sin embargo, nunca entró en combate. Un día, mientras se resguardaba del frío en una habitación sobrecalentada de un campamento militar, tuvo varios sueños febriles que le revelaron su carrera futura como matemático y filósofo.

Enlaces

Tras acabar su carrera militar, viajó por Europa. Más tarde, permaneció varios años en París, donde estudió matemáticas y filosofía y construyó instrumentos ópticos. Descartes decidió trasladarse a Holanda, donde estuvo veinte años moviéndose por el país, llevando a cabo su trabajo más importante. Durante este tiempo escribió varios libros, incluyendo el *Discurso*, su obra más famosa, que contiene sus contribuciones a la geometría analítica. Hizo también contribuciones fundamentales a la filosofía.

En 1649, Descartes fue invitado por la reina Cristina a visitarla a su corte de Suecia para ser su tutor en el estudio de la filosofía. Aunque era reacio a vivir en lo que él llamó la «tierra de osos entre rocas y hielo», finalmente aceptó la invitación y se trasladó a Suecia. Lamentablemente, el invierno de 1649-1650 fue extremadamente duro. Descartes enfermó de neumonía y murió a mitad de febrero.

EJEMPLO 16 ¿Cuál es el producto cartesiano de $A \times B \times C$, donde $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$?

Solución: El producto cartesiano $A \times B \times C$ consiste en todas las ternas ordenadas (a, b, c), donde $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$. Por tanto,

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}.$$ ◀

USO DE NOTACIÓN DE CONJUNTOS CON CUANTIFICADORES

A veces especificamos explícitamente en la notación el dominio de una sentencia. En particular, $\forall x \in S\ P(x)$ denota la cuantificación universal de $P(x)$, donde el dominio es el conjunto S. De forma similar, $\exists x \in S\ P(x)$ denota la cuantificación existencial de $P(x)$, donde el dominio es S.

EJEMPLO 17 ¿Qué significan las sentencias $\forall x \in \mathbf{R}\ (x^2 \geq 0)$ y $\exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2 = 1)$?

Solución: La sentencia $\forall x \in \mathbf{R}\ (x^2 \geq 0)$ afirma que para todo número real x, $x^2 \geq 0$. Esta sentencia se puede expresar como «El cuadrado de todo número real es no negativo». Es una sentencia verdadera.

La sentencia $\exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2 = 1)$ afirma que existe un entero x tal que $x^2 = 1$. Esta sentencia se puede expresar como «Existe un entero cuyo cuadrado es 1». También es una sentencia verdadera, puesto que $x = 1$ lo cumple (y $x = -1$). ◀

Problemas

1. Enumera los miembros de estos conjuntos.
 a) $\{x \mid x$ es un número real positivo tal que $x^2 = 1\}$
 b) $\{x \mid x$ es un número entero positivo menor que $12\}$
 c) $\{x \mid x$ es el cuadrado de un entero y $x < 100\}$
 d) $\{x \mid x$ es un número entero tal que $x^2 = 2\}$

2. Usa la notación de construcción de conjuntos para dar una descripción de cada uno de estos conjuntos.
 a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
 b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 c) $\{m, n, o, p\}$

3. Determina si cada uno de estos pares de conjuntos son iguales.
 a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$, $\{5, 3, 1\}$
 b) $\{\{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$
 c) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$

4. Supongamos que $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$ y $D = \{4, 6, 8\}$. Determina cuáles de estos conjuntos son subconjuntos de cuáles.

5. Para cada uno de los siguientes conjuntos, determina si 2 es o no elemento suyo.
 a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x$ es un entero mayor que $1\}$
 b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x$ es el cuadrado de un entero$\}$
 c) $\{2, \{2\}\}$
 d) $\{\{2, \{2\}\}$
 e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
 f) $\{\{\{2\}\}\}$

6. Para cada conjunto del Problema 5, determina si $\{2\}$ es o no elemento suyo.

7. Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.
 a) $0 \in \emptyset$ b) $\emptyset \in \{0\}$
 c) $\{0\} \subset \emptyset$ d) $\emptyset \subset \{0\}$
 e) $\{0\} \in \{0\}$ f) $\{0\} \subset \{0\}$
 g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

8. Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.
 a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
 e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

9. Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.
 a) $x \in \{x\}$ b) $\{x\} \subseteq \{x\}$ c) $\{x\} \in \{x\}$
 d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$ e) $\emptyset \subseteq \{x\}$ f) $\emptyset\ \{x\}$

10. Utiliza un diagrama de Venn para ilustrar la relación $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.

11. Supongamos que A, B y C son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Demuestra que $A \subseteq C$.

12. Encuentra dos conjuntos A y B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.

13. ¿Cuál es el cardinal de estos conjuntos?

a) $\{a\}$ **b)** $\{\{a\}\}$
c) $\{a, \{a\}\}$ **d)** $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

14. ¿Cuál es el cardinal de estos conjuntos?

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset\}$
c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **d)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

15. Obtén el conjunto de las partes de estos conjuntos

a) $\{a\}$ **b)** $\{a, b\}$ **c)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

16. ¿Se puede concluir que $A = B$ si A y B son iguales si tienen el mismo conjunto de partes?

17. ¿Cuántos elementos tienen estos conjuntos?

a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$
b) $P(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$
c) $P(P(\emptyset))$

18. Determina si alguno de estos conjuntos es el conjunto de las partes de algún conjunto

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset, \{a\}\}$
c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$ **d)** $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

19. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{y, z\}$. Obtén

a) $A \times B$ **b)** $B \times A$

20. ¿Cuál es el producto cartesiano $A \times B$, donde A es el conjunto de asignaturas impartidas por el departamento de matemáticas de una universidad y B son los profesores del departamento de matemáticas de esta universidad?

21. ¿Cuál es el producto cartesiano $A \times B \times C$, donde A es el conjunto de líneas aéreas y B y C son el conjunto de todas las capitales europeas?

22. Supongamos que $A \times B = \emptyset$, donde A y B son conjuntos. ¿Qué se puede concluir?

23. Sea A un conjunto. Muestra que $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

24. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ y $C = \{0, 1\}$. Obtén

a) $A \times B \times C$ **b)** $C \times B \times A$
c) $C \times A \times B$ **d)** $B \times B \times B$

25. ¿Cuántos elementos distintos tiene $A \times B$ si A tiene m elementos y B tiene n?

26. Demuestra que $A \times B \neq B \times A$, para conjuntos A y B no vacíos, a no ser que $A = B$.

27. Traduce estas cuantificaciones a lenguaje natural y determina su valor de verdad.

a) $\forall x \in \mathbf{R}\ (x^2 \neq -1)$ **b)** $\exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2 = 2)$
c) $\forall x \in \mathbf{Z}\ (x^2 > 0)$ **d)** $\exists x \in \mathbf{R}\ (x^2 = x)$

28. Traduce estas cuantificaciones a lenguaje natural y determina su valor de verdad.

a) $\exists x \in \mathbf{R}\ (x^3 = -1)$
b) $\exists x \in \mathbf{Z}\ (x + 1 > x)$
c) $\forall x \in \mathbf{Z}\ (x - 1 \in \mathbf{Z})$
d) $\forall x \in \mathbf{Z}\ (x^2 \in \mathbf{Z})$

***29.** Demuestra que los pares ordenados (a, b) se pueden definir en términos de conjuntos como $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. (*Indicación:* Demuestra en primer lugar que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$).

***30.** En este problema se presenta la **paradoja de Russell.** Sea S el conjunto que contiene a un conjunto x si el conjunto x no pertenece a sí mismo, es decir, $S = \{x \mid x \notin x\}$.

a) Demuestra que la suposición de que S es un miembro de S conduce a una contradicción.
b) Demuestra que la suposición de que S no es un miembro de S conduce a una contradicción.

De las partes (a) y (b) se sigue que S no se puede definir de la forma que se hizo. Esta paradoja se puede evitar restringiendo los tipos de elementos permitidos en los conjuntos.

***31.** Describe un procedimiento para enumerar todos los subconjuntos de un conjunto finito.

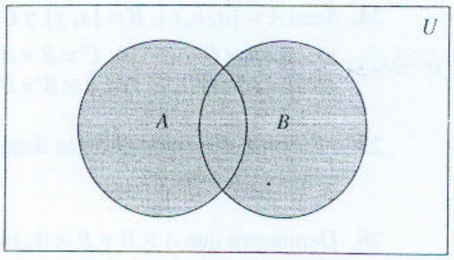
1.7 Operaciones con conjuntos

INTRODUCCIÓN

Enlaces

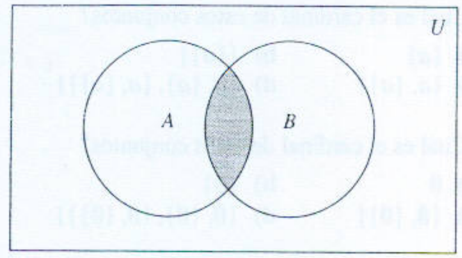
Dos conjuntos se pueden combinar de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, comenzando con el conjunto de los estudiantes de matemáticas y los estudiantes de ingeniería informática de tu universidad, podemos formar el conjunto de los estudiantes de matemáticas o de ingeniería informática, el conjunto de que estudian a la vez matemáticas e ingeniería informática, el conjunto de los que no estudian matemáticas, etc.

DEFINICIÓN 1 Sean A y B conjuntos. La *unión* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están bien en A o bien en B, o en ambos.



El área sombreada es A ∪ B

Figura 1. Diagrama de Venn que representa la unión de A y B.



El área sombreada es A ∩ B

Figura 2. Diagrama de Venn que representa la intersección de A y B.

Un elemento x pertenece a la unión de los conjuntos A y B si, y sólo si, x pertenece a A o x pertenece a B. Esto nos dice que

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

El diagrama de Venn mostrado en la Figura 1 representa la unión de los conjuntos A y B. El área sombreada que está bien dentro del círculo que representa a A o bien dentro del círculo que representa a B es el área que representa a la unión de A y B.

Damos ahora algunos ejemplos de unión de conjuntos.

EJEMPLO 1 La unión de los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es el conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$; esto es, $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$. ◀

EJEMPLO 2 La unión del conjunto de los estudiantes de tu universidad matriculados en matemáticas y el conjunto de los estudiantes de tu universidad matriculados en ingeniería informática son aquellos que están matriculados en alguna de estas dos carreras, o en ambas. ◀

DEFINICIÓN 2 Sean A y B conjuntos. La *intersección* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están tanto en A como en B.

Un elemento x pertenece a la intersección de los conjuntos A y B si, y sólo si, x pertenece a A y x pertenece a B. Esto nos dice que

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

El diagrama de Venn mostrado en la Figura 2 representa la intersección de los conjuntos A y B. El área sombreada que está dentro de los círculos que representan A y B es el área que representa la intersección de A y B.

Vamos a dar ahora algunos ejemplos de la intersección de conjuntos.

EJEMPLO 3 La intersección de los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es el conjunto $\{1, 3\}$; esto es, $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$. ◀

EJEMPLO 4 La intersección del conjunto de los estudiantes de tu universidad matriculados en matemáticas y el conjunto de los estudiantes de tu universidad matriculados en ingeniería informática son aquellos que están matriculados en ambas carreras a la vez. ◀

DEFINICIÓN 3 Se dice que dos conjuntos son *disjuntos* si su intersección es el conjunto vacío.

EJEMPLO 5 Sea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Como $A \cap B = \emptyset$, A y B son disjuntos. ◀

A veces estamos interesados en encontrar el cardinal de la unión de conjuntos. Para encontrar el número de elementos de la unión de dos conjuntos finitos A y B, ten en cuenta que $|A| + |B|$ cuenta exactamente una vez cada elemento que está en A, pero no en B, o que está en B, pero no en A, y exactamente dos veces cada elemento que está tanto en A como en B. Por tanto, si el número de elementos que está tanto en A como en B se sustrae de $|A| + |B|$, contaremos los elementos de $A \cap B$ sólo una vez. Por tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

La generalización de este resultado a uniones de un número arbitrario de conjuntos se llama **principio de inclusión-exclusión.** El principio de inclusión-exclusión es una técnica muy importante utilizada en los problemas de enumeración. Veremos este principio y otras técnicas de recuento en detalle en los Capítulos 4 y 6.

Hay otras formas importantes de combinar conjuntos.

DEFINICIÓN 4 Sean A y B conjuntos. La *diferencia* de los conjuntos A y B, denotada por $A - B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A, pero no en B. La diferencia de A y B se llama también el *complementario de B con respecto a A*.

Un elemento x pertenece a la diferencia de A y B si, y sólo si, $x \in A$ y $x \notin B$. Esto nos dice que

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

El diagrama de Venn mostrado en la Figura 3 representa la diferencia de los conjuntos A y B. El área sombreada que está dentro del círculo que representa a A y fuera del círculo que representa a B es el área que representa a $A - B$.

Vamos a dar ahora algunos ejemplos de la diferencia de conjuntos.

EJEMPLO 6 La diferencia de $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es el conjunto $\{5\}$; esto es, $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$. Esto es distinto de la diferencia de $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 3, 5\}$, que es el conjunto $\{2\}$. ◀

EJEMPLO 7 La diferencia del conjunto de los estudiantes de tu universidad matriculados en ingeniería informática y el conjunto de los estudiantes de tu universidad matriculados en matemáticas es el conjunto de aquellos estudiantes matriculados en ingeniería informática que no están a la vez matriculados en matemáticas. ◀

Una vez especificado el conjunto universal U, podemos definir el conjunto **complementario.**

DEFINICIÓN 5 Sea U el conjunto universal. El conjunto *complementario* de A, denotado por $\overline{A}$, es el complementario de A con respecto a U. En otras palabras, el complementario del conjunto A es $U - A$.

Un elemento pertenece a $\overline{A}$ si, y sólo si, $x \notin A$. Esto nos dice que

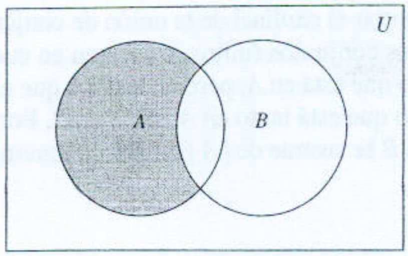
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

En la Figura 4, el área sombreada fuera del círculo que representa A es el área que representa $\overline{A}$.

Damos ahora algunos ejemplos del complementario de un conjunto.

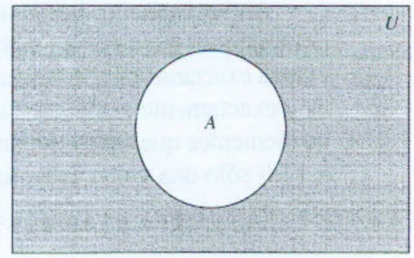
EJEMPLO 8 Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$ (donde el conjunto universal es el abecedario). Entonces, $\overline{A} = \{b, c, ch, d, f, g, h, j, k, l, m, n, ñ, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$. ◀

EJEMPLO 9 Sea A el conjunto de los enteros positivos mayores que 10 (el conjunto universal es el conjunto de todos los enteros positivos). Entonces, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ◀



El área sombreada representa A−B

Figura 3. Diagrama de Venn que representa la diferencia de A y B.



El área sombreada representa a $\overline{A}$

Figura 4. Diagrama de Venn que representa el complementario de A.

Tabla 1. Identidades entre conjuntos.

Identidad	*Nombre*
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Leyes de identidad
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leyes de dominación
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leyes idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Ley de complementación
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leyes conmutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Leyes asociativas
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Leyes distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Leyes de absorción
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Leyes de complemento

IDENTIDADES DE CONJUNTOS

La Tabla 1 contiene las identidades más importantes entre conjuntos. Demostraremos algunas de esas identidades utilizando tres métodos diferentes. Se presentan estos métodos para evidenciar que a menudo un problema se puede afrontar de varias maneras. Las demostraciones del resto de ellas se dejan como ejercicios. El lector podrá notar la similitud entre estas identidades y las equivalencias lógicas presentadas en la Sección 1.2. De hecho, las identidades entre conjuntos se pueden demostrar directamente a partir de las equivalencias lógicas correspondientes. Además, ambas son casos especiales de identidades que se cumplen en el álgebra de Boole (comentada en el Capítulo 10).

Ejemplos adicionales

Una forma de demostrar que dos conjuntos son iguales es mostrar que un conjunto es subconjunto del otro, y viceversa. Ilustramos este tipo de demostración estableciendo la segunda ley de De Morgan.

EJEMPLO 10 Demuestra que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Demostraremos que los dos conjuntos son iguales mostrando que cada uno es subconjunto del otro.

Primero supongamos que $x \in \overline{A \cap B}$. Por definición de complementario, $x \notin A \cap B$. Por definición de la intersección, $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadera. Aplicando las leyes de De Morgan (de la lógica), vemos que $\neg(x \in A)$ o $\neg(x \in B)$. Por tanto, por la definición de la negación, $x \notin A$ o $x \notin B$. Por definición del complementario, $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$. Por la definición de unión, se sigue que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Esto demuestra que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ahora supongamos que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Por definición de unión, $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$. Usando la definición de complementario, vemos que $x \notin A$ o $x \notin B$. Por consiguiente, $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ es verdadera. Aplicando las leyes de De Morgan (de la lógica), se concluye que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadera. Por la definición de intersección, se sigue que $\neg(x \in A \cap B)$ es verdadera. Utilizamos la definición de complementario para ver que $x \in \overline{A \cap B}$, lo que muestra que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Como se ha mostrado que cada conjunto es subconjunto del otro, los dos conjuntos son iguales y la identidad queda demostrada. ◀

EJEMPLO 11 Usa la notación de construcción de conjuntos y las equivalencias lógicas para mostrar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: La siguiente cadena de igualdades proporciona una demostración de esta identidad:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \notin \overline{B}\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

Observa que en la cuarta igualdad de la cadena se ha utilizado la segunda ley de De Morgan para equivalencias lógicas. ◀

Demostrar una identidad de conjuntos con más de dos conjuntos mostrando que cada uno es subconjunto del otro requiere a menudo seguir los posibles casos diferentes, como se ilustra en el Ejemplo 12 para la demostración de una de las leyes distributivas para conjuntos.

EJEMPLO 12 Demuestra que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todo conjunto A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado de la igualdad es un subconjunto del otro lado.

Supongamos que $x \in A \cap (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in (B \cup C)$. Por la definición de unión, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in C$ (o ambas). Por tanto, sabemos que $x \in A$ y $x \in B$ o que $x \in A$ y $x \in C$. Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Usando la definición de unión, se concluye que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Por tanto, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ahora supongamos que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Entonces, según la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Según la definición de intersección, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$, o que $x \in A$ y $x \in C$. De esto vemos que $x \in A$ y que $x \in B$ o $x \in C$. Por tanto, por la definición de unión, vemos que $x \in A$ y $x \in B \cup C$. Además, según la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap (B \cup C)$. Concluimos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Esto completa la demostración de la identidad. ◀

Las identidades entre conjuntos se pueden demostrar utilizando **tablas de pertenencia.** Consideramos cada combinación de conjuntos a la que puede pertenecer un elemento y verificamos que los elementos de una misma combinación de conjuntos pertenecen a ambos conjuntos de la identidad. Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se usa un 1. Para indicar que el elemento no está en el conjunto se usa un 0. (El lector podrá observar la similitud entre tablas de pertenencia y tablas de verdad).

Tabla 2. Una tabla de pertenencia para la propiedad distributiva.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

EJEMPLO 13 Utiliza una tabla de pertenencia para mostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solución: La tabla de pertenencia para estas combinaciones de conjuntos se muestra en la Tabla 2. Esta tabla tiene ocho filas. Como las columnas para $A \cap (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ son las mismas, la identidad es válida. ◀

Se pueden establecer identidades adicionales entre conjuntos utilizando las que ya hemos demostrado. Considera el Ejemplo 14.

EJEMPLO 14 Sean A, B y C conjuntos. Muestra que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$$

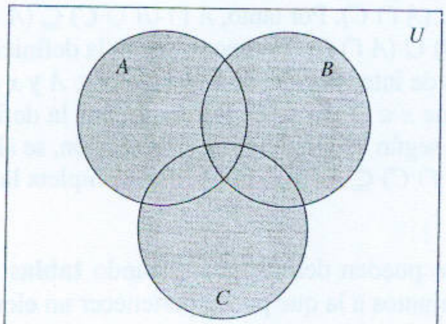
Solución: Tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{por la primera ley de De Morgan} \\
&= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) && \text{por la segunda ley de De Morgan} \\
&= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A} && \text{por la ley conmutativa para la intersección} \\
&= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A} && \text{por la ley conmutativa para la unión}
\end{aligned}$$

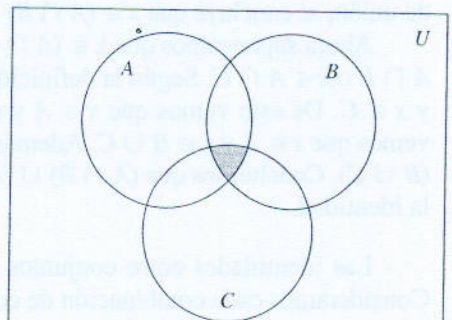
◀

UNIONES E INTERSECCIONES GENERALIZADAS

Como la unión e intersección de conjuntos satisfacen la ley asociativa, los conjuntos $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$ están correctamente definidos para los conjuntos A, B y C. Ten en cuenta que $A \cup B \cup C$ contiene aquellos elementos que están en al menos uno de los conjuntos A, B y C, y que $A \cap B \cap C$ contiene aquellos elementos que están tanto en A como en B como en C. Estas combinaciones de los tres conjuntos A, B y C se muestran en la Figura 5.



(a) El área sombreada representa a $A \cup B \cup C$



(b) El área sombreada representa a $A \cap B \cap C$

Figura 5. Unión e intersección de A, B y C.

EJEMPLO 15 Sean $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{0, 3, 6, 9\}$. ¿Cuáles son $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$?

Solución: El conjunto $A \cup B \cup C$ contiene aquellos elementos de al menos uno de los conjuntos A, B o C. Por tanto,

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

El conjunto $A \cap B \cap C$ contiene todos los elementos que están a la vez en A, en B y en C. Por tanto,

$$A \cap B \cap C = \{0\}.$$ ◀

Podemos también considerar uniones e intersecciones de un número arbitrario de conjuntos según se ve en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 6 La *unión* de una colección de conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos que son miembros de al menos uno de los conjuntos de la colección.

Usamos la notación

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

para denotar la unión de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

DEFINICIÓN 7 La *intersección* de una colección de conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos que son miembros de todos los conjuntos de la colección.

Utilizamos la notación

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

para denotar la intersección de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ilustramos las uniones e intersecciones generalizadas con el Ejemplo 16.

EJEMPLO 16 Sea $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Entonces,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

y

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}.$$ ◀

REPRESENTACIÓN DE CONJUNTOS EN UN ORDENADOR

Hay varias formas de representar conjuntos en un ordenador. Una forma es almacenar los elementos de un conjunto de manera desordenada. Sin embargo, si se hace así, las operaciones para calcular la unión, intersección o la diferencia serían demasiado costosas en tiempo, puesto que estas operaciones requerirían largos procesos de búsqueda de elementos. Presentamos un método para almacenar elementos utilizando una ordenación arbitraria de los elementos del conjunto universal. Este método de representación de conjuntos simplifica el cálculo en operaciones entre conjuntos.

Supongamos que el conjunto universal U es finito (y de tamaño razonable, de tal forma que el número de elementos de U no sea más grande que la memoria del ordenador utilizado). Primero especificamos un orden arbitrario para los elementos de U. Por ejemplo, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Representamos un subconjunto A de U mediante la cadena de bits de longitud n en la que el bit i-ésimo es 1 si a_i pertenece a A y 0 si no pertenece. El Ejemplo 17 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 17 Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Damos los elementos de U ordenados de forma creciente, es decir, $a_i = i$. ¿Qué cadena de bits representa el subconjunto de todos los números impares en U? ¿Y el conjunto de los números pares en U? ¿Y el subconjunto de los elementos de U que son menores o iguales que 5?

Solución: La cadena de bits que representa el conjunto de los impares en U, es decir, $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, tiene un bit igual a 1 en las posiciones primera, tercera, quinta, séptima y novena y cero en las demás. Es decir,

10 1010 1010.

(Partimos esta cadena de longitud 10 en bloques de cuatro para hacerla fácil de leer, puesto que una cadena continuada de 10 bits se lee con dificultad). De forma similar, representamos el subconjunto de todos los enteros pares en U ($\{2, 4, 6, 8, 10\}$) por la cadena

01 0101 0101.

El conjunto de los enteros de U menores o iguales que 5, es decir, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, se representa por la cadena

11 1110 0000. ◄

Utilizando cadenas de bits como representación de conjuntos es fácil encontrar complementarios, uniones, intersecciones y diferencias de conjuntos. Para encontrar la cadena de bits asociada al complementario de un conjunto, simplemente cambiamos cada 1 por un 0 y cada 0 por un 1, puesto que $x \in A$ si, y sólo si, $x \notin \overline{A}$. Observa que si asociamos a cada bit un valor de verdad, asociando al 1 el valor de verdadero y al 0 el de falso, entonces esta operación corresponde a reemplazar cada bit por su negación.

EJEMPLO 18 Hemos visto que la cadena de bits para el conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, con el conjunto universal igual a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, es

10 1010 1010.

¿Cuál es la cadena de bits que representa al complementario de este conjunto?

Solución: La cadena de bits del complementario de este conjunto se obtiene reemplazando los ceros por unos, y viceversa. Esto nos da la cadena

01 0101 0101,

que corresponde al conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. ◄

Para obtener las cadenas de bits que representan la unión y la intersección de dos conjuntos realizamos operaciones booleanas sobre los bits de las cadenas que representan a los dos conjuntos. El bit de la posición i-ésima de la cadena de bits de la unión es 1 si el bit i-ésimo de una de las dos cadenas es 1 y 0 cuando ambos son 0. Por tanto, la cadena de bits para la unión es el resultado de aplicar la operación bit *OR* a las cadenas de bits de los dos conjuntos. El bit i-ésimo de la cadena de bits de la intersección es 1 si los bits de la posición i-ésima de las cadenas de bits de los dos conjuntos es 1 y 0 cuando uno de los dos, o ambos, es 0. Así, la cadena de bits para la intersección es el resultado de aplicar la operación bit *AND* a las cadenas de bits de los dos conjuntos.

EJEMPLO 19 Las cadenas de bits para los conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ son, respectivamente, 11 1110 0000 y 10 1010 1010. Usa cadenas de bits para encontrar la unión y la intersección de estos conjuntos.

Solución: La cadena de bits para la unión de los dos conjuntos es

$$11\ 1110\ 0000 \vee 10\ 1010\ 1010 = 11\ 1110\ 1010,$$

que corresponde al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. La cadena de bits para la intersección de estos conjuntos es

$$11\ 1110\ 0000 \wedge 10\ 1010\ 1010 = 10\ 1010\ 0000,$$

que corresponde al conjunto $\{1, 3, 5\}$. ◀

Problemas

1. Sea A el conjunto de los estudiantes que vive a 2 km de la facultad y sea B el conjunto de los estudiantes que van andando a clase. Describe a los estudiantes de estos conjuntos.
- **a)** $A \cap B$ **b)** $A \cup B$
- **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

2. Supongamos que A es el conjunto de estudiantes de segundo curso de tu facultad y B el conjunto de estudiantes de matemática discreta de tu facultad. Expresa estos conjuntos en términos de A y B.
- **a)** El conjunto de estudiantes de segundo curso matriculados en matemática discreta en tu facultad.
- **b)** El conjunto de estudiantes de segundo curso no matriculados en matemática discreta en tu facultad.
- **c)** El conjunto de estudiantes de tu facultad que bien son de segundo curso o bien están matriculados en matemática discreta.
- **d)** El conjunto de estudiantes de tu facultad que bien no son de segundo curso o bien no están matriculados en matemática discreta.

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 3, 6\}$. Obtén
- **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$
- **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

4. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Obtén
- **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$
- **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

5. Sea A un conjunto. Demuestra que $\overline{\overline{A}} = A$.

6. Sea A un conjunto. Demuestra que
- **a)** $A \cup \emptyset = A$ **b)** $A \cap \emptyset = \emptyset$
- **c)** $A \cup A = A$ **d)** $A \cap A = A$
- **e)** $A - \emptyset = A$ **f)** $A \cup U = U$
- **g)** $A \cap U = A$ **h)** $\emptyset - A = \emptyset$

7. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que
- **a)** $A \cup B = B \cup A$ **b)** $A \cap B = B \cap A$

8. Sean A y B conjuntos. Demuestra que $A \cup (A \cap B) = A$.

9. Sean A y B conjuntos. Demuestra que $A \cap (A \cup B) = A$.

10. Halla los conjuntos A y B si $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$ y $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

11. Demuestra que si A y B son conjuntos, entonces $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- **a)** mostrando que cada lado de la igualdad es subconjunto del otro,
- **b)** utilizando una tabla de pertenencia.

12. Sean A y B conjuntos. Demuestra que
- **a)** $(A \cap B) \subseteq A$ **b)** $A \subseteq (A \cup B)$
- **c)** $A - B \subseteq A$ **d)** $A \cap (B - A) = \emptyset$
- **e)** $A \cup (B - A) = A \cup B$

13. Demuestra que si A, B y C son conjuntos, entonces $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
- **a)** mostrando que cada lado es subconjunto del otro,
- **b)** utilizando una tabla de pertenencia.

14. Sean A, B y C conjuntos. Demuestra que
- **a)** $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$
- **b)** $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$
- **c)** $(A - B) - C \subseteq A - C$
- **d)** $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$
- **e)** $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$

15. Demuestra que si A y B son conjuntos, entonces $A - B = A \cap \overline{B}$.

16. Demuestra que si A y B son conjuntos, entonces $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

17. Sean A, B y C conjuntos. Demuestra que
- **a)** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **b)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **c)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$