Ecuaciones Diferenciales

Cálculo Numérico – Programación Aplicada

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Planteo Inicial

- Sea

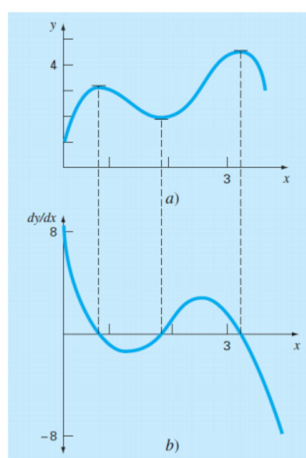
  $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$

- Su EDO es

  $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$

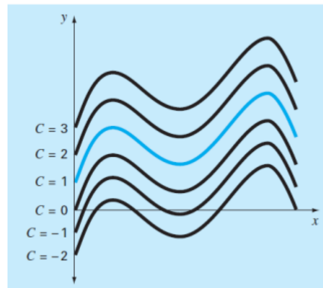
- ¿Qué describe entonces la EDO?

La razón de Cambio de y respecto de x



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Planteo Inicial

- Y si solo conocemos la EDO
  ¿Podemos obtener la función Original?
- Con $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$
- Y con $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
- Obtenemos
  $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$



¿Es la misma ecuación que usamos anteriormente?

3

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Planteo Inicial

- ¿Y si solo conocemos la EDO
  y queremos una solución única?
- Necesitamos establecer un valor o
  Condición inicial
- Ejemplo C=1, obtenemos

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 0.1\,x - 3\sqrt{t}$$

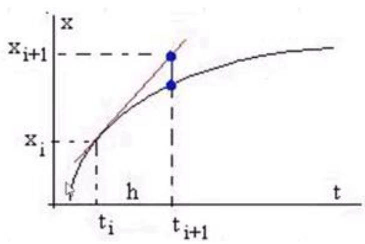
Datos de entrada:	dx/dt
	x(t=0)

¿Y si no se puede Integrar la EDO?

4

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Método de Euler

- Interpretación gráfica



Datos de entrada: dx/dt, x(t=0)

Solución numérica:

$\Delta t = h \qquad \Delta x = h \cdot \frac{dx}{dt}$

$x(t+h) = x(t) + \Delta x$

$x(t+h) = x(t) + h \cdot \frac{dx}{dt}$

5

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Método de Euler

- Ejemplo: Resuelva $\frac{dx}{dt} = 0{,}1x - 3\sqrt{t}\ con\ x(t=0) = 50\ y\ h = 0{,}1$

Datos de entrada: dx/dt, x(t=0)

Solución numérica:

$\Delta t = h \qquad \Delta x = h \cdot \frac{dx}{dt}$

$x(t+h) = x(t) + \Delta x$

$x(t+h) = x(t) + h \cdot \frac{dx}{dt}$

t	x	dx/dt	Δx
0	50	5	0.5
0.1	50.500	4.101	0.410
0.2	50.910	3.749	0.375
0.3	51.285	3.485	0.349
0.4	51.634	3.266	0.327
0.5	51.960	3.075	0.307
0.6	52.268	2.903	0.290
0.7	52.558	2.746	0.275
0.8	52.833	2.600	0.260
0.9	53.093	2.463	0.246
1	53.339	2.334	0.233
1.1	53.572	2.211	0.221
1.2	53.793	2.093	0.209
1.3	54.003	1.980	0.198
1.4	54.201	1.870	0.187

6

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

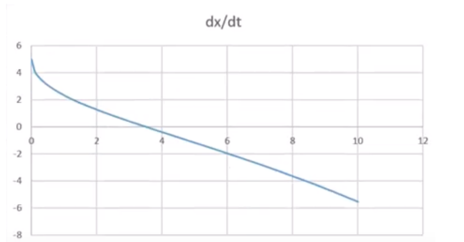
Método de Euler

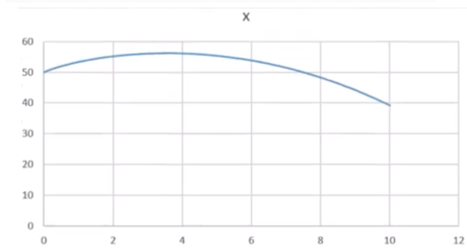
- Ejemplo: Resuelva

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}1x - 3\sqrt{t}$$

$$con\ x(t=0) = 50\ y\ h = 0{,}1$$

t	x	dx/dt	Δx
0	50	5	0.5
0.1	50.500	4.101	0.410
0.2	50.910	3.749	0.375
0.3	51.285	3.485	0.349
0.4	51.634	3.266	0.327
0.5	51.960	3.075	0.307
0.6	52.268	2.903	0.290
0.7	52.558	2.746	0.275
0.8	52.833	2.600	0.260
0.9	53.093	2.463	0.246
1	53.339	2.334	0.233
1.1	53.572	2.211	0.221
1.2	53.793	2.093	0.209
1.3	54.003	1.980	0.198
1.4	54.201	1.870	0.187





¿Y cual es el error cometido?

7

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Método de Euler

- Ejemplo: Resuelva y grafique la función real y la aproximada para

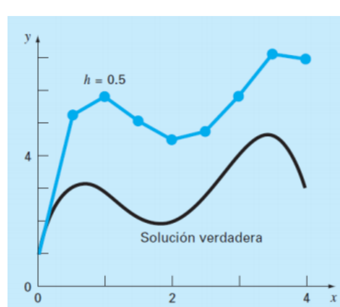
$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

$$con\ y(x=0) = 1,\ \ h = 0{,}5\ y\ en\ intervalo\ [0{,}4]$$

Recuerde que

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

x	$y_{verdadero}$	y_{Euler}



8

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Método de Euler: Error cometido

- Este método implica dos tipos de error
  1. Errores de truncamiento, o de discretización, originados por la naturaleza de las técnicas empleadas para aproximar los valores de y.
  2. Errores de redondeo, causados por el número limitado de cifras significativas que una computadora puede retener
- La expresión de la magnitud y las propiedades del error de truncamiento a partir de la Serie de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \ldots + \frac{y_i^{(n)}}{2!} h^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad \text{donde } h = x_{i+1} - x_i$$

sabiendo que $y' = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + \boxed{O(h^{n+1})}$$

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 + \ldots + O(h^{n+1})$$

Pero con h pequeña

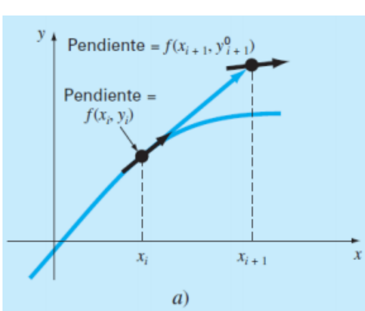
$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2$$

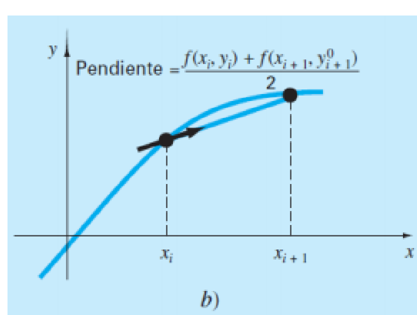
9

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Método de Euler Mejorado

- Para mejorar la aproximación el siguiente Δx se obtiene como un promedio de las derivadas en los extremos

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$





10

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Método de Euler Mejorado

Ejemplo

Con el método de Heun integre $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$, con un tamaño de paso igual a 1. La condición inicial es en $x = 0$, $y = 2$.

$$\Delta t = h \qquad \Delta x = h \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

		Iteraciones del método de Heun			
		1		15	
x	$y_{verdadero}$	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18

11