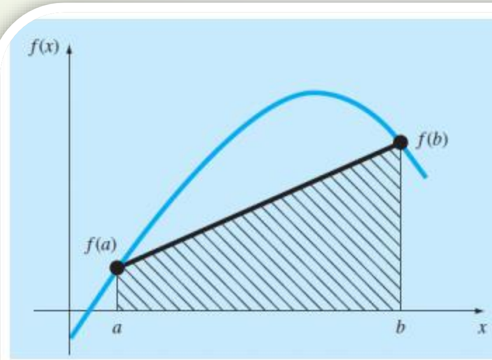
INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton - Cotes

1

Formulas de Newton – Cotes
Regla del Trapecio



Representación gráfica de la regla del trapecio.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_1(x)\,dx$$

donde

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx$$

Cuyo resultado es

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Error

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

2

Formulas de Newton – Cotes
Regla del Trapecio

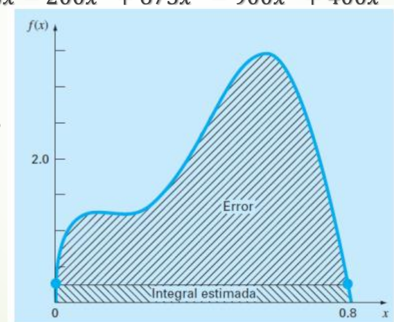
EJEMPLO

Integrar $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

Datos

a=0, b=0,8.

Sol analítica= 1,640533



Representación gráfica del empleo de una sola aplicación de la regla del trapecio para aproximar la integral de $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ de x = 0 a 0.8.

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

Cuyo resultado es

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

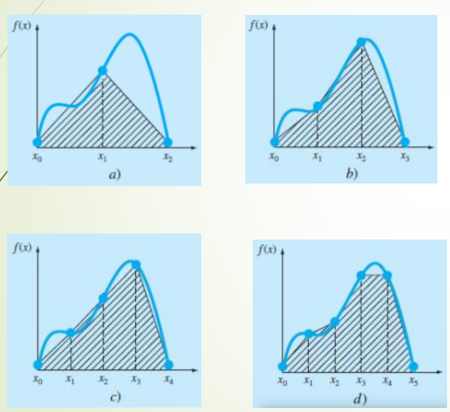
Error

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3$$

FACULTAD DE INGENIERÍA UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY

3

Formulas de Newton – Cotes
Regla del Trapecio Múltiple



Si $h = \dfrac{b - a}{n}$

entonces

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla en cada integral

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Cuyo resultado es

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Error

$$E = -\frac{(b - a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

FACULTAD DE INGENIERÍA UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY

4

Formulas de Newton – Cotes
Regla del Trapecio Múltiple

EJEMPLO

Integrar $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

Datos

a=0, b=0,8. Sol analítica= 1,640533. Aplicar para n=1,2 …,10

n	h	I	ε_t(%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Con

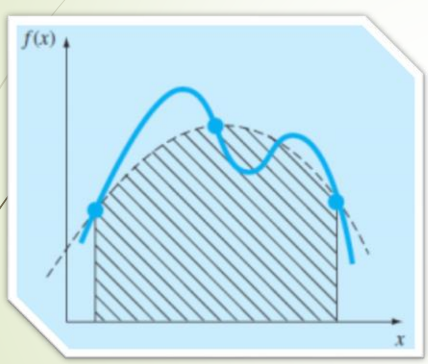
$$h = \frac{b-a}{n}$$

Error

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

5

Formulas de Newton – Cotes
Regla de Simpson 1/3



$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

donde

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)\right] dx$$

Cuyo resultado es

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Error

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2\,880} f^{(4)}(\xi)$$

6

Formulas de Newton – Cotes
Regla de Simpson 1/3

EJEMPLO

Integrar $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

Datos

a=0, b=0,8.

Sol analítica= 1,640533

¿El error disminuye respecto de la regla de trapecio?

¿Cuál es el único valor posible para n?

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Con

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Error

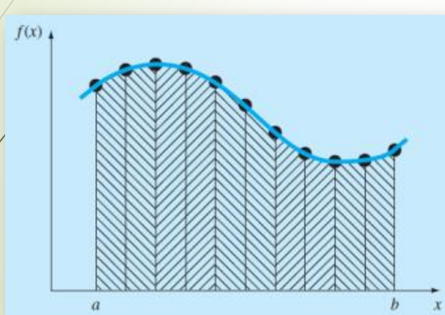
$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2\,880} f^{(4)}(\xi)$$

7

Formulas de Newton – Cotes
Regla de Simpson 1/3 Múltiple

Si $h = \frac{b-a}{n}$ entonces

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$



Sustituyendo la regla en cada integral

$$I \cong 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \cdots + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$

Cuyo resultado es

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ impar}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ par}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

n solo puede ser par

Error

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

8

Formulas de Newton – Cotes
Regla de Simpson 1/3 Múltiple

EJEMPLO

Integrar $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

Datos

a=0, b=0,8.

Sol analítica= 1,640533

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ impar}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ par}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Con

$$h = \frac{b-a}{n}$$

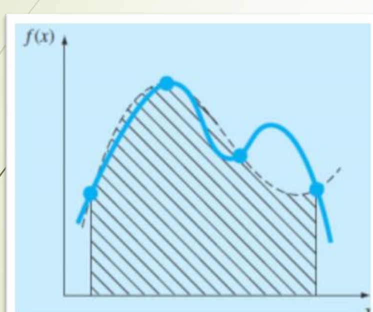
y n par

Error

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2\,880} f^{(4)}(\xi)$$

9

Formulas de Newton – Cotes
Regla de Simpson 3/8



$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

donde

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Con

$h = (b - a)/3.$

Error

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6\,480} f^{(4)}(\xi)$$

10

Formulas de Newton – Cotes
Regla de Simpson 3/8

EJEMPLO

Integrar $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

Datos

a=0, b=0,8.

Sol analítica= 1,640533

Integrar en conjunto con la regla de 1/3 para totalizar 5 segmentos

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Con

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Error

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2\,880} f^{(4)}(\xi)$$

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY

11