

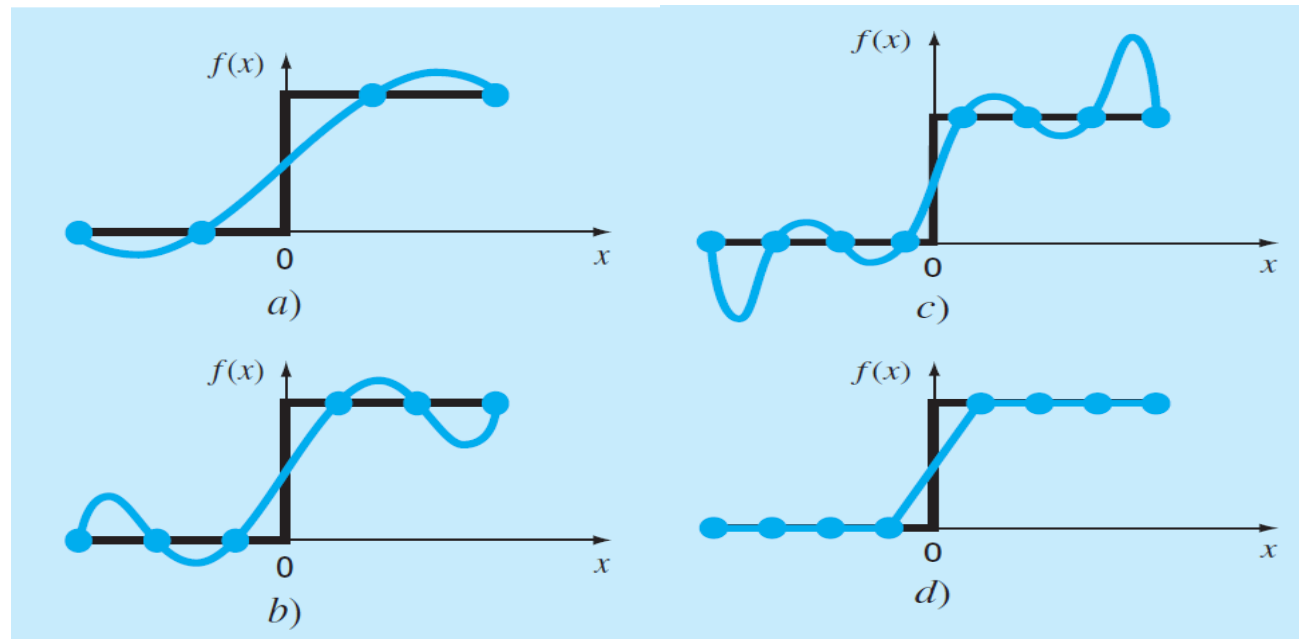
INTERPOLACIÓN SPLINE

- La construcción de polinomios de interpolación de grado alto aunque justificable teóricamente plantea muchos problemas.
- Por un lado, la forma de la función polinómica de grado alto a menudo no responde al fenómeno debido al gran número de extremos e inflexiones.
- Por otro lado, su cálculo es muy complicado, lo que limita su utilidad en análisis numérico.
- Es a menudo más conveniente dividir el intervalo de interés en subintervalos más pequeños y usar en cada subintervalo polinomios de grado relativamente bajo, tratando de que la función a trozos definida de este modo tenga un aspecto final adecuado al fenómeno que estamos representando.



INTERPOLACIÓN SPLINE

- Por ejemplo, las curvas de tercer grado empleadas para unir cada par de datos se llaman *trazadores cúbicos*. Esas funciones se pueden construir de tal forma que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes resulten visualmente suaves



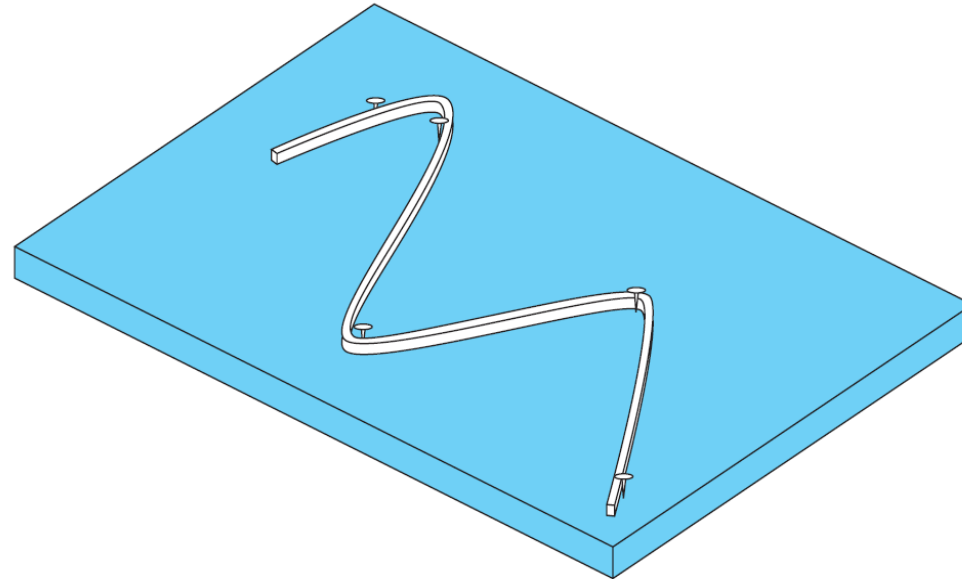
INTERPOLACIÓN SPLINE

- La figura anterior (a a c) ilustra cómo un polinomio de grado superior tiende a formar una curva de oscilaciones bruscas en la vecindad de un cambio súbito.
- En contraste, el trazador también une los puntos; pero como está limitado a cambios de tercer grado, las oscilaciones son mínimas.
- De esta manera, el trazador usualmente proporciona una mejor aproximación al comportamiento de las funciones que tienen cambios locales y abruptos
- El concepto de trazador se originó en la técnica de dibujo que usa una cinta delgada y flexible (llamada *spline*, en inglés), para dibujar curvas suaves a través de un conjunto de puntos



INTERPOLACIÓN SPLINE

- Trazador con cinta y 5 puntos. La técnica de dibujo que usa una cinta delgada y flexible para dibujar curvas suaves a través de una serie de puntos. Observe cómo en los puntos extremos, el trazador tiende a volverse recto. Esto se conoce como un trazador “natural”.



Trazadores cúbicos

- El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Así, para $n + 1$ datos ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), existen n intervalos y, en consecuencia, $4n$ incógnitas a evaluar



Trazadores cúbicos

- El trazador debe cumplir las siguientes condiciones
- Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n - 2$ condiciones).
- La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).
- Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).
- Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).
- Total: $2n - 2 + 2 + n - 1 + n - 1 + 2 = 4n$



Trazadores cúbicos

- La interpretación visual de la condición 5 es que la función se vuelve una línea recta en los nodos extremos. La especificación de una condición tal en los extremos nos lleva a lo que se denomina trazador “natural”. Se le da tal nombre debido a que los trazadores para el dibujo naturalmente se comportan en esta forma.
- Los cinco tipos de condiciones anteriores proporcionan el total de las $4n$ ecuaciones requeridas para encontrar los $4n$ coeficientes.



Trazadores cúbicos

- **Ejercicio:** Interpolar los siguientes datos mediante una *spline* cúbica

X	Y
2	-1
3	2
5	-7

- Definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{si } x \in [2,3] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$



Trazadores cúbicos

- A continuación, hacemos que se cumpla la condición de que la spline debe pasar por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$$s(2) = -1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$

$$s(3) = 2 \Rightarrow 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$

$$s(5) = -7 \Rightarrow 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$

- Ahora calculamos la primera derivada de $s(x)$:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{si } x \in [2,3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$



Trazadores cúbicos

- Se presentan ecuaciones que pueden presentar discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso $x = 3$. Para evitar esta discontinuidad, evaluamos $x = 3$ en los dos polinomios e igualamos:

$$3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1 = 3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2 \Rightarrow 27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$$

- Análogamente procedemos con la segunda derivada

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{si } x \in [2,3] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$

- Para lograr que $s''(x)$ sea continua:

$$6a_1(3) + 2b_1 = 6a_2(3) + 2b_2 \Rightarrow 18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$$



Trazadores cúbicos

- En este punto contamos con 6 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo tanto tenemos 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$\begin{aligned}s''(x_0) &= 0 \\ s''(x_n) &= 0\end{aligned}$$

- De lo cual vamos a obtener

$$s''(2) = 0 \Rightarrow 6a_1(2) + 2b_1 = 0 \quad \therefore 12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$s''(5) = 0 \Rightarrow 6a_2(5) + 2b_2 = 0 \quad \therefore 30a_2 + 2b_2 = 0$$



Trazadores cúbicos

- Con lo cual, hemos completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, el cual es el siguiente:

$$8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$

$$27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$

$$27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2$$

$$125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$

$$27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$$

$$18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$$

$$12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$30a_2 + 2b_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Trazadores cúbicos

- Obtenemos la siguiente solución:

$$a_1 = -1.25$$

$$a_2 = 0.625$$

$$b_1 = 7.5$$

$$b_2 = -9.375$$

$$c_1 = -10.75$$

$$c_2 = 39.875$$

$$d_1 = 0.5$$

$$d_2 = -50.125$$

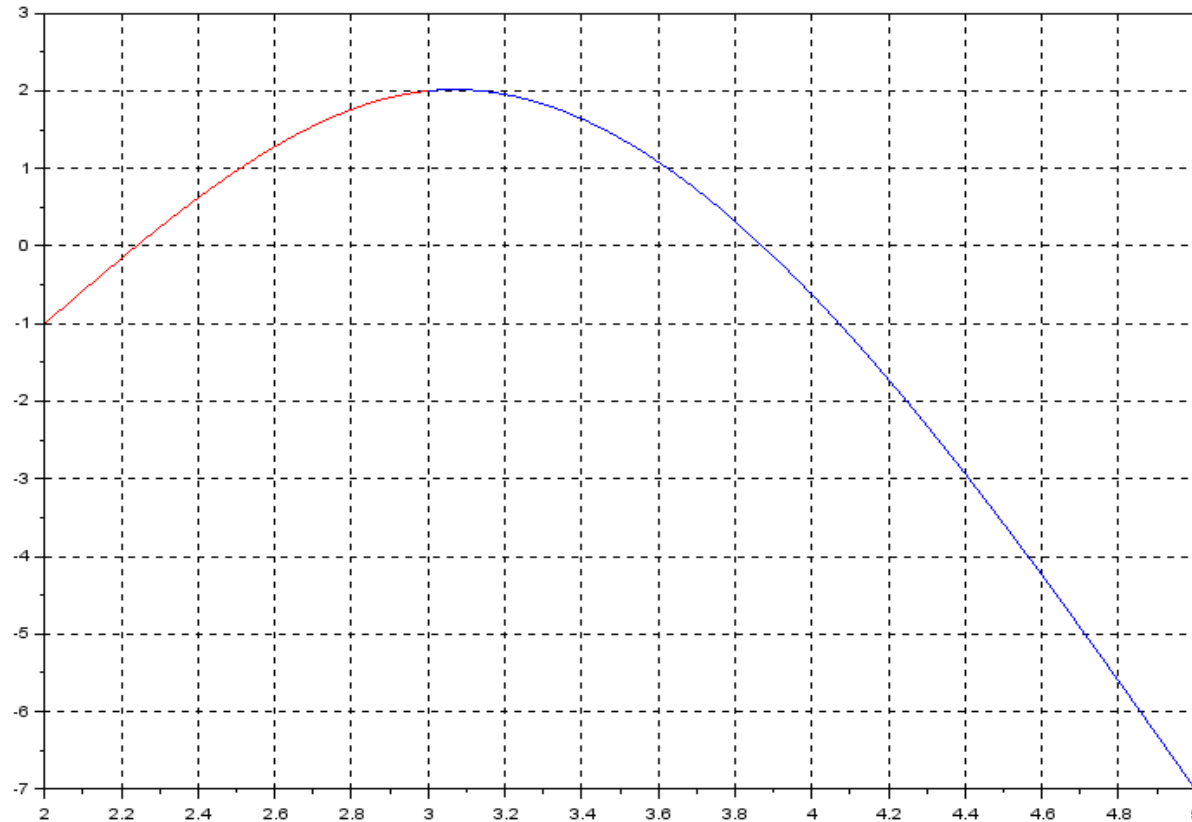
- Sustituyendo estos valores en nuestra función inicial, vemos que la *spline* cúbica para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & \text{si } x \in [2,3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.125 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$



Trazadores cúbicos

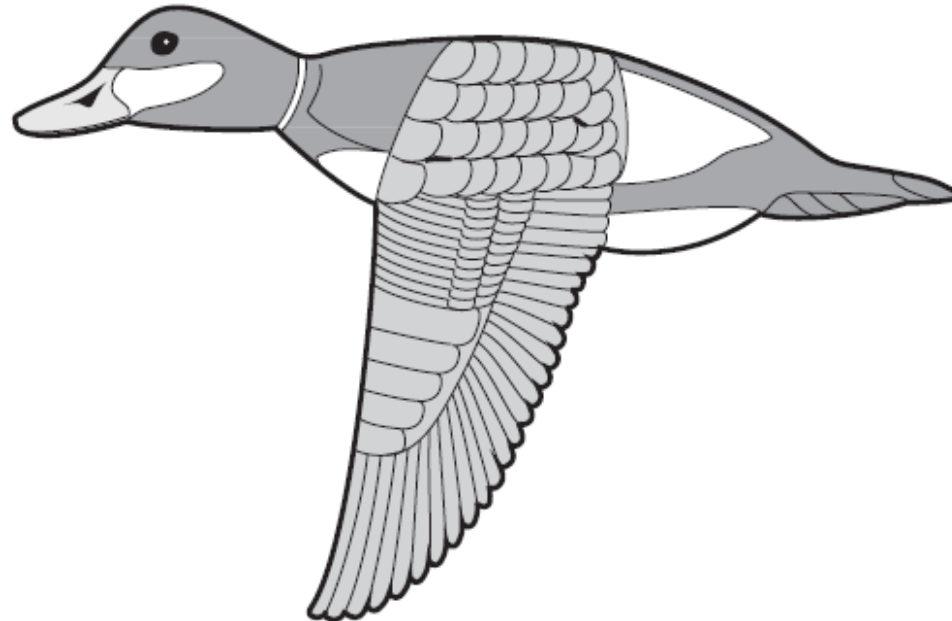
- Mostramos la gráfica correspondiente a este ejercicio



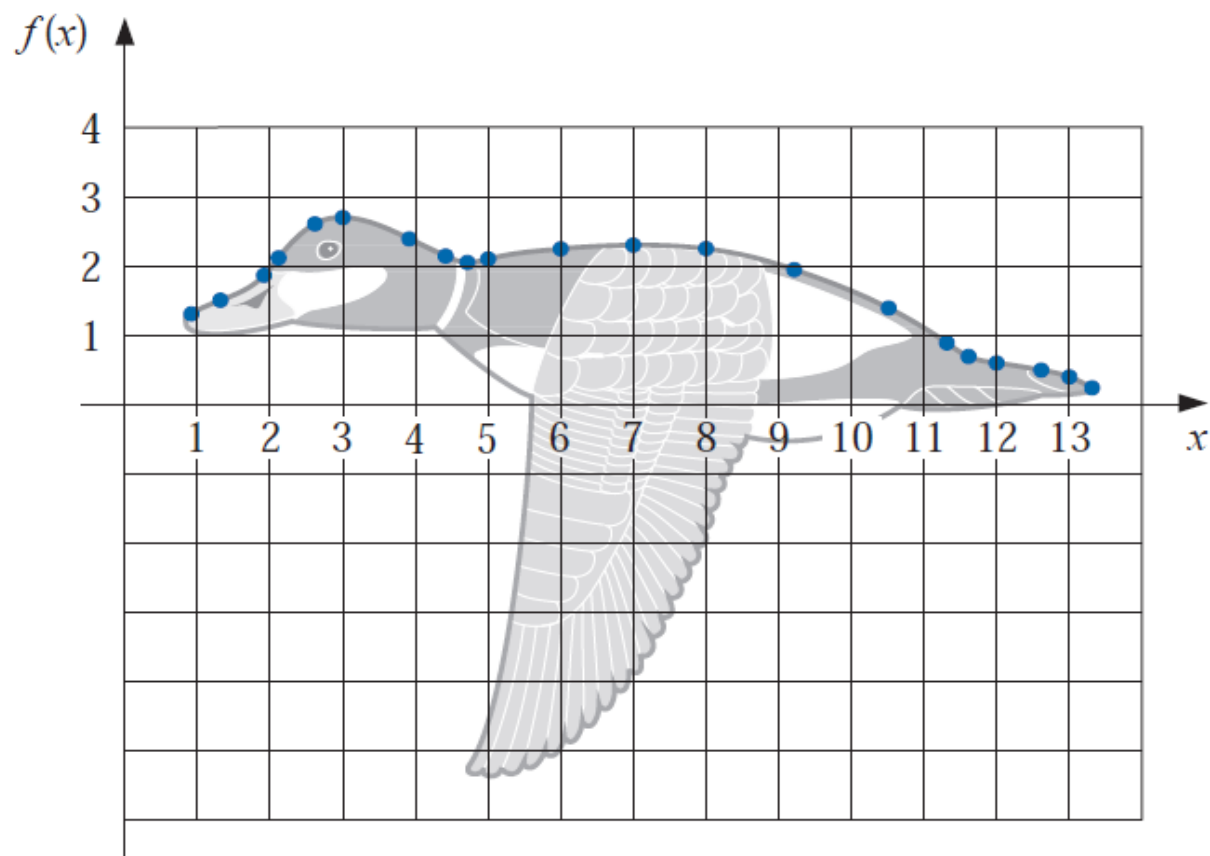
Trazadores cúbicos

x	f(x)
0.9	1.3
1.3	1.5
1.9	1.85
2.1	2.1
2.6	2.6
3.0	2.7
3.9	2.4
4.4	2.15
4.7	2.05
5.0	2.1
6.0	2.25
7.0	2.3
8.0	2.25
9.2	1.95
10.5	1.4
11.3	0.9
11.6	0.7
12.0	0.6
12.6	0.5
13.0	0.4
13.3	0.25

- Crear un interpolador spline cúbico para los datos de la siguiente tabla
- Estos datos representan los puntos de la silueta de un pato:



Trazadores cúbicos



j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0.9	1.3	5.40	0.00	-0.25
1	1.3	1.5	0.42	-0.30	0.95
2	1.9	1.85	1.09	1.41	-2.96
3	2.1	2.1	1.29	-0.37	-0.45
4	2.6	2.6	0.59	-1.04	0.45
5	3.0	2.7	-0.02	-0.50	0.17
6	3.9	2.4	-0.50	-0.03	0.08
7	4.4	2.15	-0.48	0.08	1.31
8	4.7	2.05	-0.07	1.27	-1.58
9	5.0	2.1	0.26	-0.16	0.04
10	6.0	2.25	0.08	-0.03	0.00
11	7.0	2.3	0.01	-0.04	-0.02
12	8.0	2.25	-0.14	-0.11	0.02
13	9.2	1.95	-0.34	-0.05	-0.01
14	10.5	1.4	-0.53	-0.10	-0.02
15	11.3	0.9	-0.73	-0.15	1.21
16	11.6	0.7	-0.49	0.94	-0.84
17	12.0	0.6	-0.14	-0.06	0.04
18	12.6	0.5	-0.18	0.00	-0.45
19	13.0	0.4	-0.39	-0.54	0.60
20	13.3	0.25			



Trazadores cúbicos

