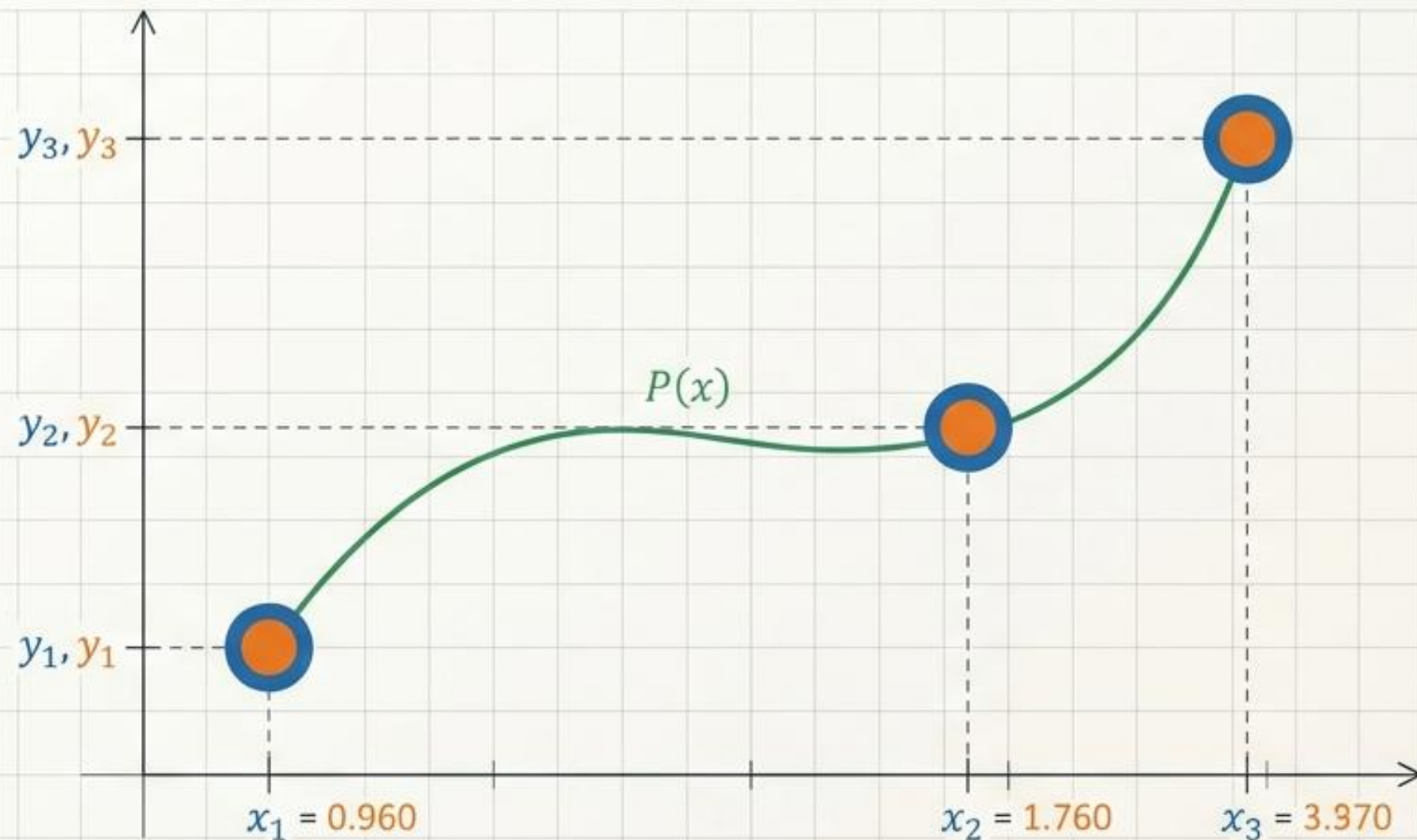


Interpolación Polinomial de Lagrange

Construcción geométrica y algebraica directa sin resolución de sistemas.
Cálculo Numérico – Ingeniería y Licenciatura en Sistemas.



El problema de interpolación

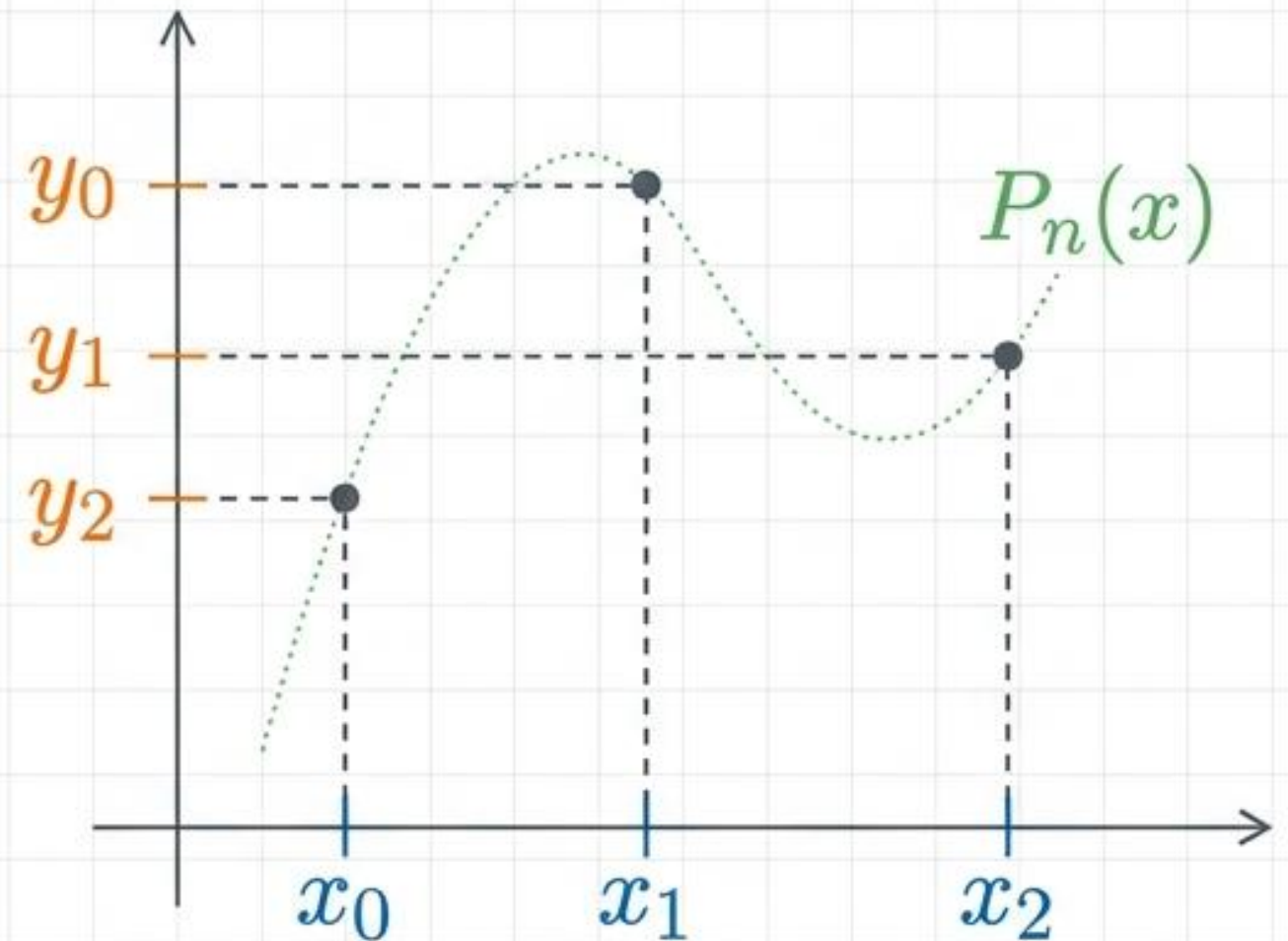
Disponemos de información discreta y buscamos una función polinomial que pase exactamente por todos los datos conocidos.

Datos conocidos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

Condición de interpolación:

$$P_n(x_i) = y_i$$

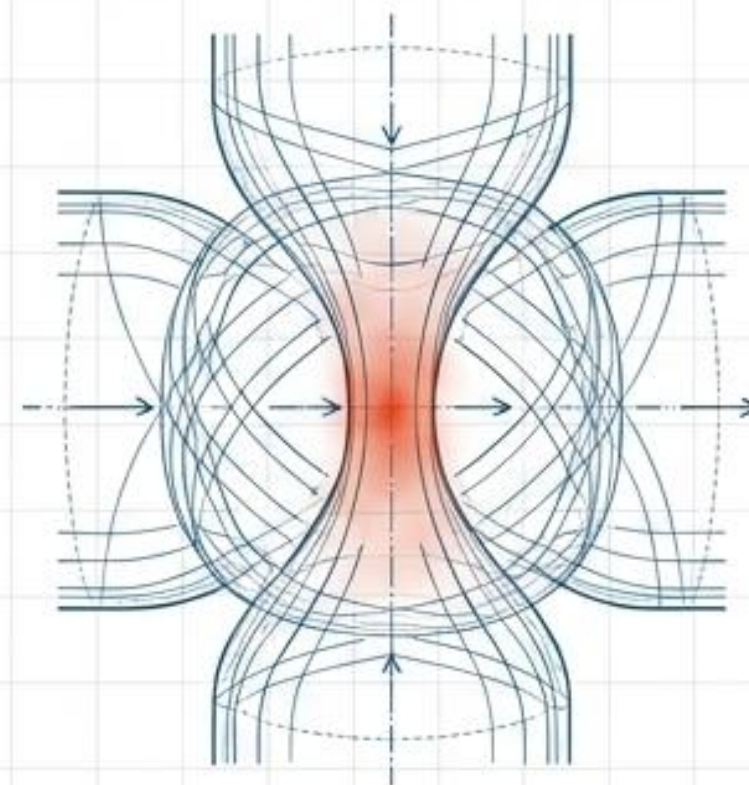


¿Por qué necesitamos otra forma?

Para tres puntos, partimos de la forma canónica e imponemos las condiciones. Esto conduce a un engorroso sistema de ecuaciones para determinar a_0, a_1, a_2 .

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \Rightarrow a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases}$$



¿Podemos construir directamente el polinomio interpolante sin resolver previamente este sistema?

La idea de Lagrange: Diseñar pilares matemáticos

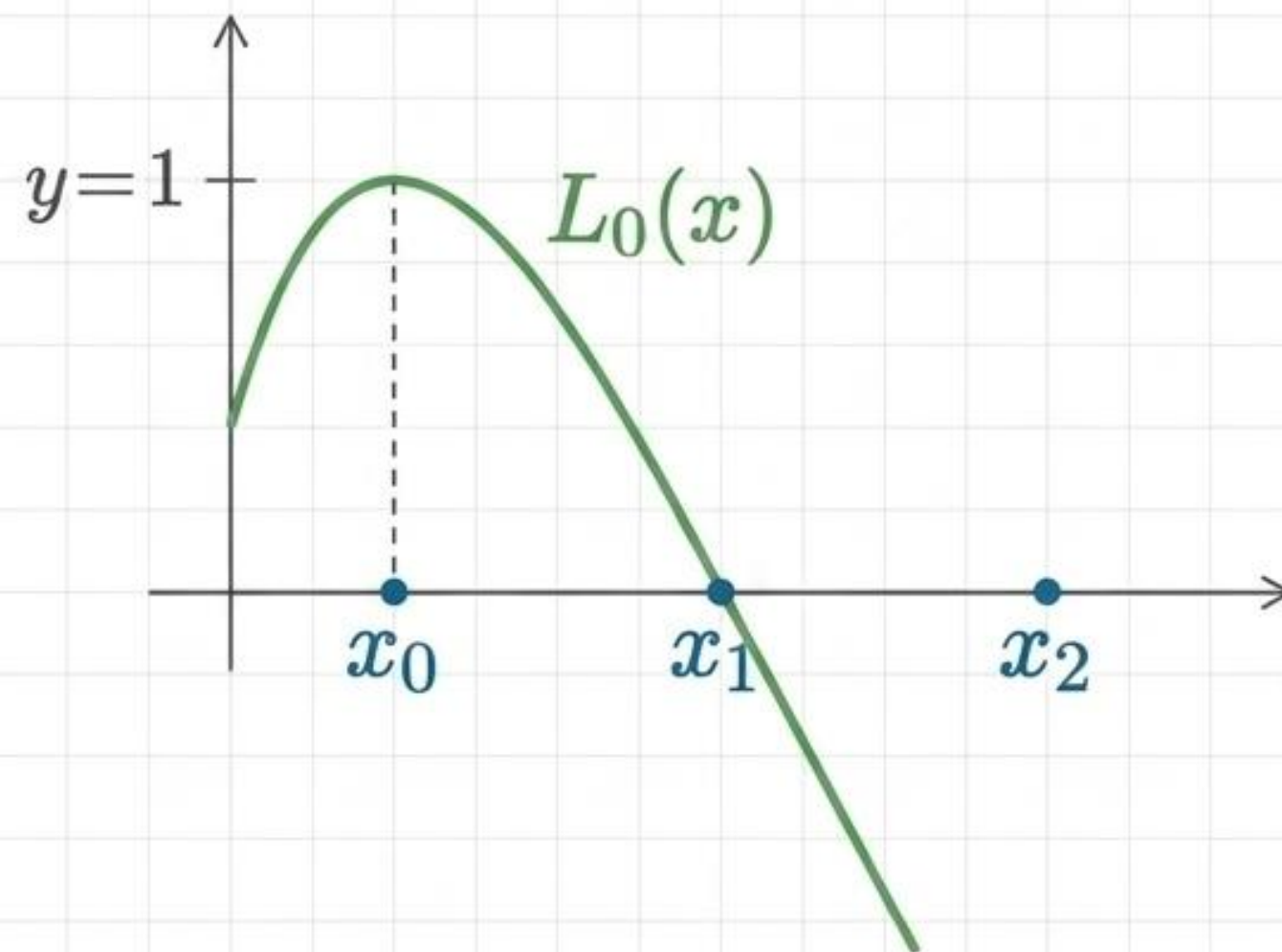
En lugar de buscar todo el polinomio a la vez, construimos polinomios auxiliares aislados para cada nodo.

Para tres nodos x_0, x_1, x_2 ,
queremos un primer polinomio
 $L_0(x)$ que cumpla:

$$L_0(x_0) = 1$$

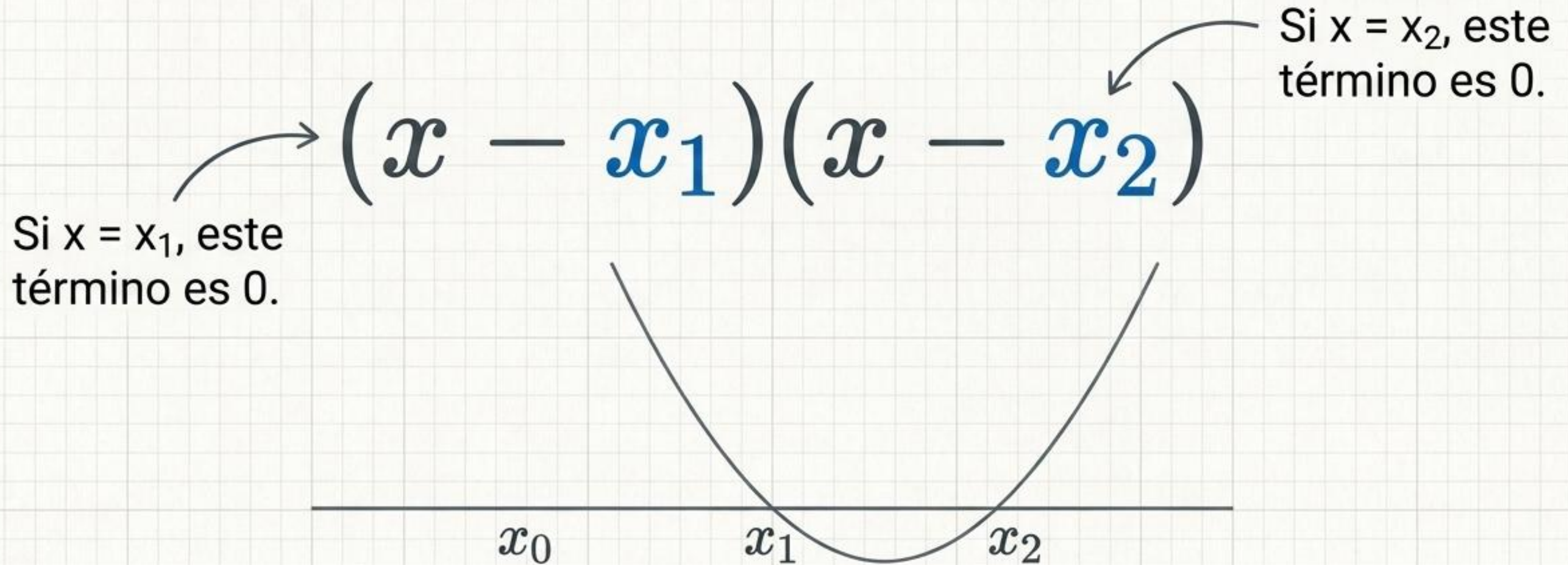
$$L_0(x_1) = 0$$

$$L_0(x_2) = 0$$



Construcción de $L_0(x)$: Producir los ceros

Usamos factores lineales para garantizar que el polinomio se anule en los nodos restantes.



Construcción de $L_0(x)$: Normalizar a 1

Dividimos por el valor que toma el numerador al evaluarlo en x_0 .

$$L_0(x) = \frac{\overbrace{(x - x_1)(x - x_2)}^{\text{Produce los ceros en } x_1 \text{ y } x_2}}{\underbrace{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}_{\text{Normaliza para obtener 1 en el nodo } x_0}}$$

Verificación

$$L_0(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 1$$

← Los tres polinomios fundamentales

Cada polinomio vale 1 en su propio nodo y 0 en los restantes.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

	x_0	x_1	x_2
$L_0(x)$	1	0	0
$L_1(x)$	0	1	0
$L_2(x)$	0	0	1

Construcción del polinomio completo

Multiplicamos cada polinomio fundamental por su valor asociado y_i y sumamos las contribuciones.

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Comprobación

Evaluyendo en el nodo x_0 :

$$P_2(x_0) = y_0(1) + y_1(0) + y_2(0) = y_0$$

Análogamente, $P_2(x_1) = y_1$ y $P_2(x_2) = y_2$. El polinomio interpola todos los datos perfectamente sin necesidad de resolver sistemas de ecuaciones.

Generalización de la forma de Lagrange

Para $n+1$ puntos, la lógica se extiende utilizando productoras para los ceros y sumatorias para el ensamblaje.

Suma de
contribuciones

$$\rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

Factores
multiplicativos

$$\rightarrow L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ejemplo Completo: Datos y Polinomios Fundamentales

Buscamos $P_2(x)$ para los puntos $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,9)$.

Nodos x : $[0, 1, 2]$ | Valores y : $[1, 3, 9]$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Ejemplo Completo: Ensamblaje y Simplificación

Sustituimos los valores en $P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$

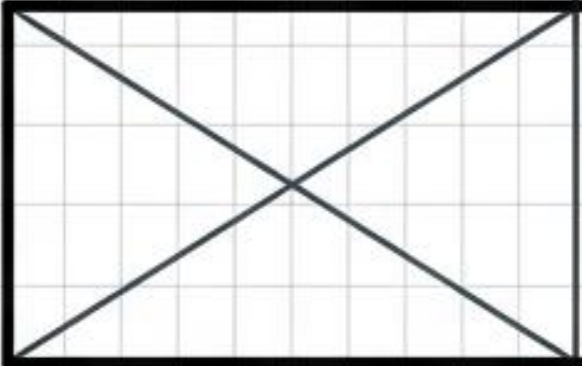
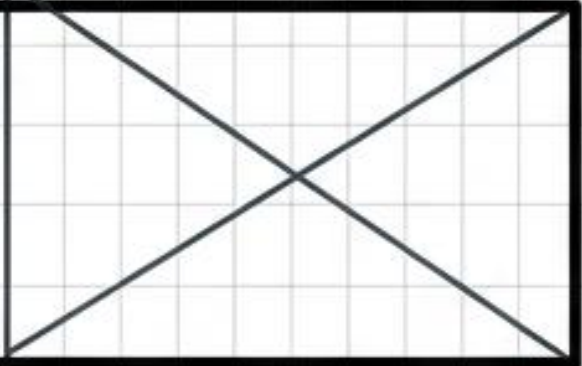
$$P_2(x) = 1 \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{2} \right] + 3 [-x^2 + 2x] + 9 \left[\frac{x^2 - x}{2} \right]$$

Buscando común denominador 2:

$$P_2(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 - 6x^2 + 12x + 9x^2 - 9x}{2}$$

Agrupando términos:

$$P_2(x) = \frac{4x^2 + 2}{2}$$

	Resultado Final: $P_2(x) = 1 + 2x^2$	
--	--	---

Verificación e Interpretación

Comprobamos el polinomio construido evaluándolo en cada nodo original.

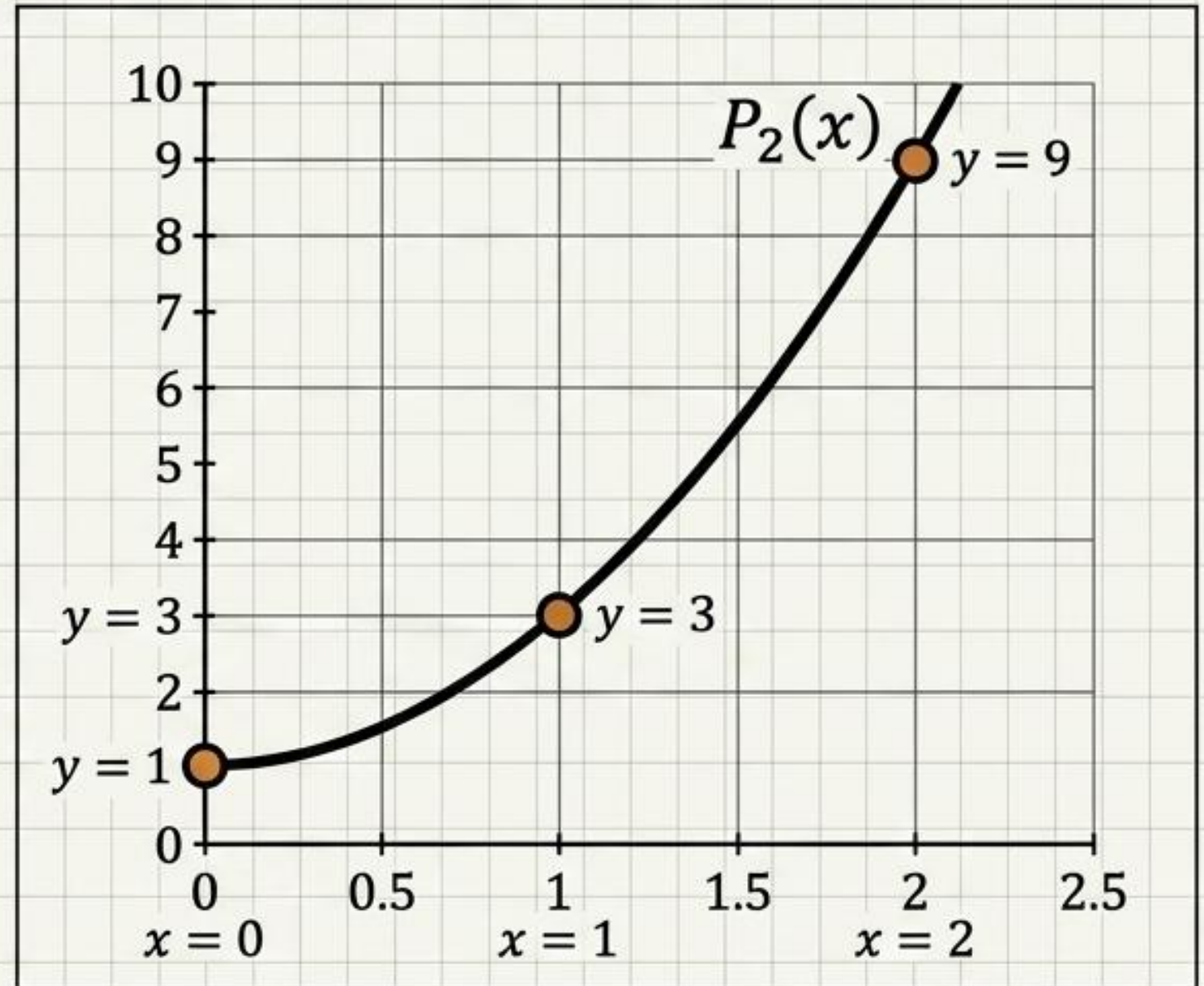
Verificación Matemática

$$P_2(0) = 1 + 2(0)^2 = 1 + 0 = 1 \quad [\checkmark]$$

$$P_2(1) = 1 + 2(1)^2 = 1 + 2 = 3 \quad [\checkmark]$$

$$P_2(2) = 1 + 2(2)^2 = 1 + 8 = 9 \quad [\checkmark]$$

Verificación Visual (Gráfica)



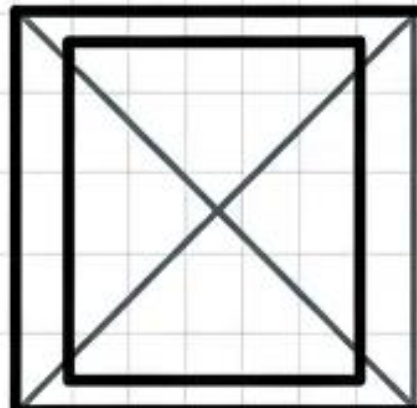
Ventajas y Limitaciones de Lagrange

Ventajas Estructurales

- Construcción directa sin resolver sistemas de ecuaciones.
- Interpretación visual e intuitiva mediante la propiedad 1/0.
- Formulación general aplicable a cualquier cantidad de nodos (n).
- No requiere que los nodos estén equidistantes.

La Limitación Arquitectónica

Si incorporamos un nuevo dato (x_3, y_3) , TODOS los polinomios fundamentales $L_i(x)$ deben ser reconstruidos desde cero, porque sus denominadores y numeradores cambian al alterar la estructura global.



¿Podemos construir el polinomio de una forma que permita incorporar progresivamente nuevos datos sin reconstruir lo anterior?

