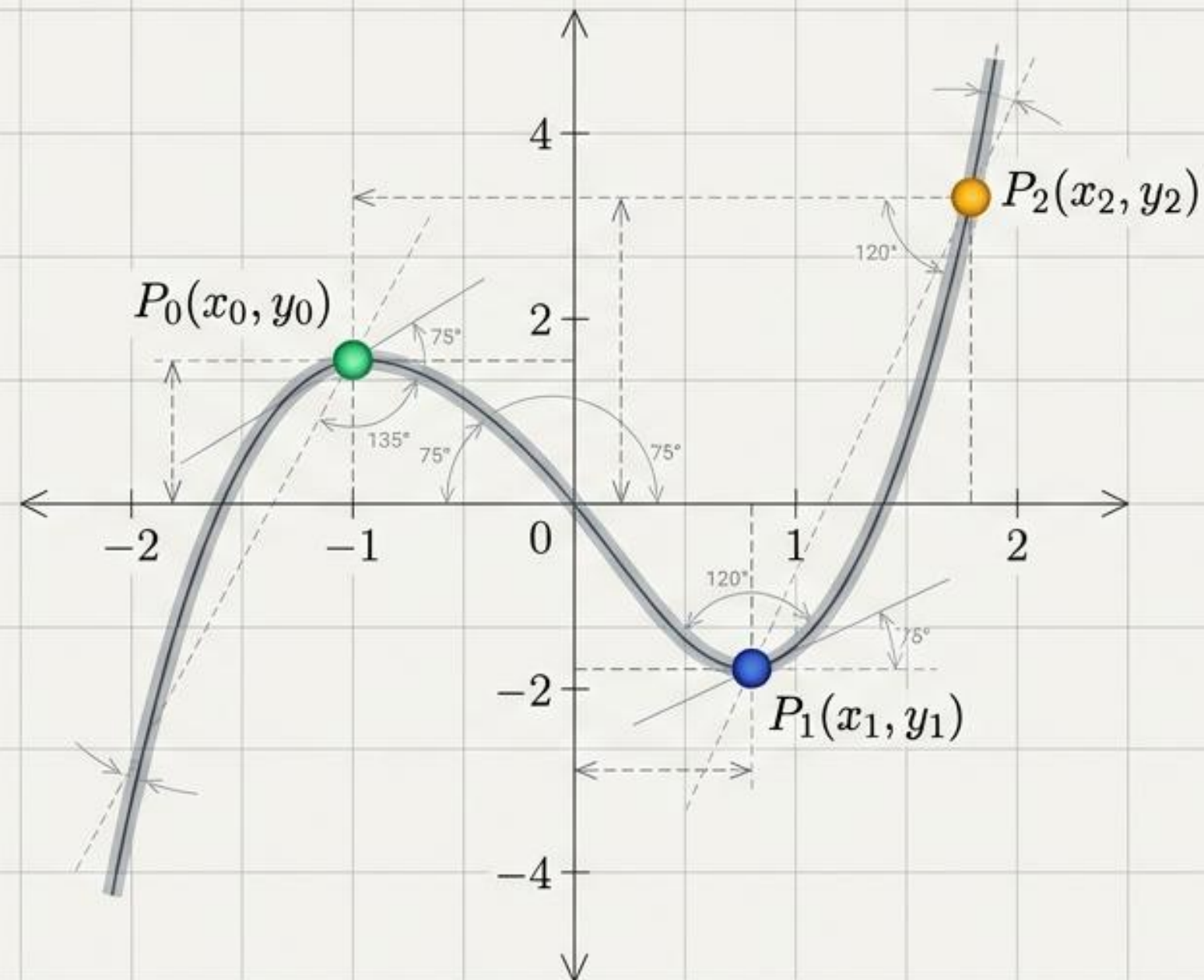


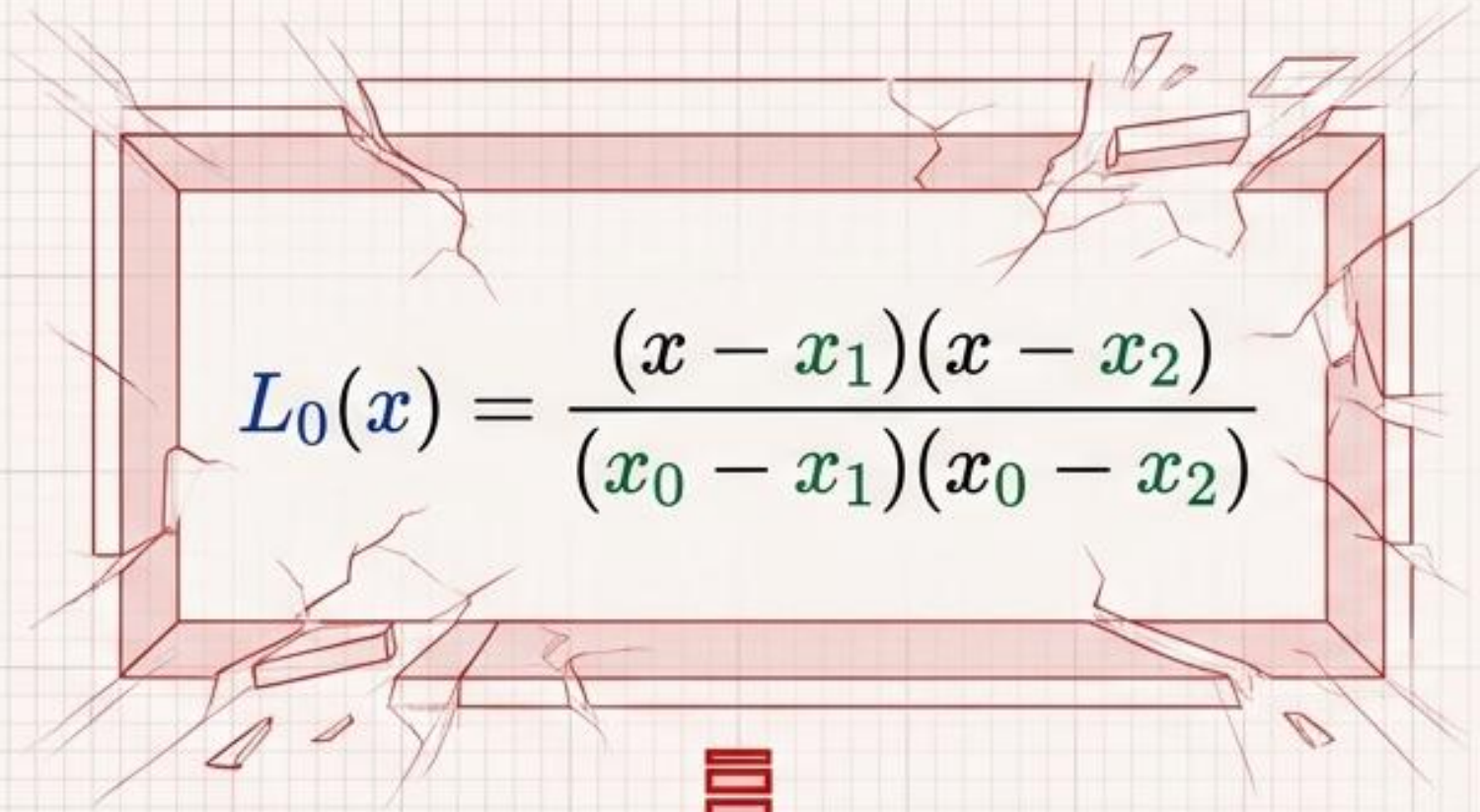
# Construcción Progresiva del Polinomio de Newton

Interpolación mediante Diferencias Divididas



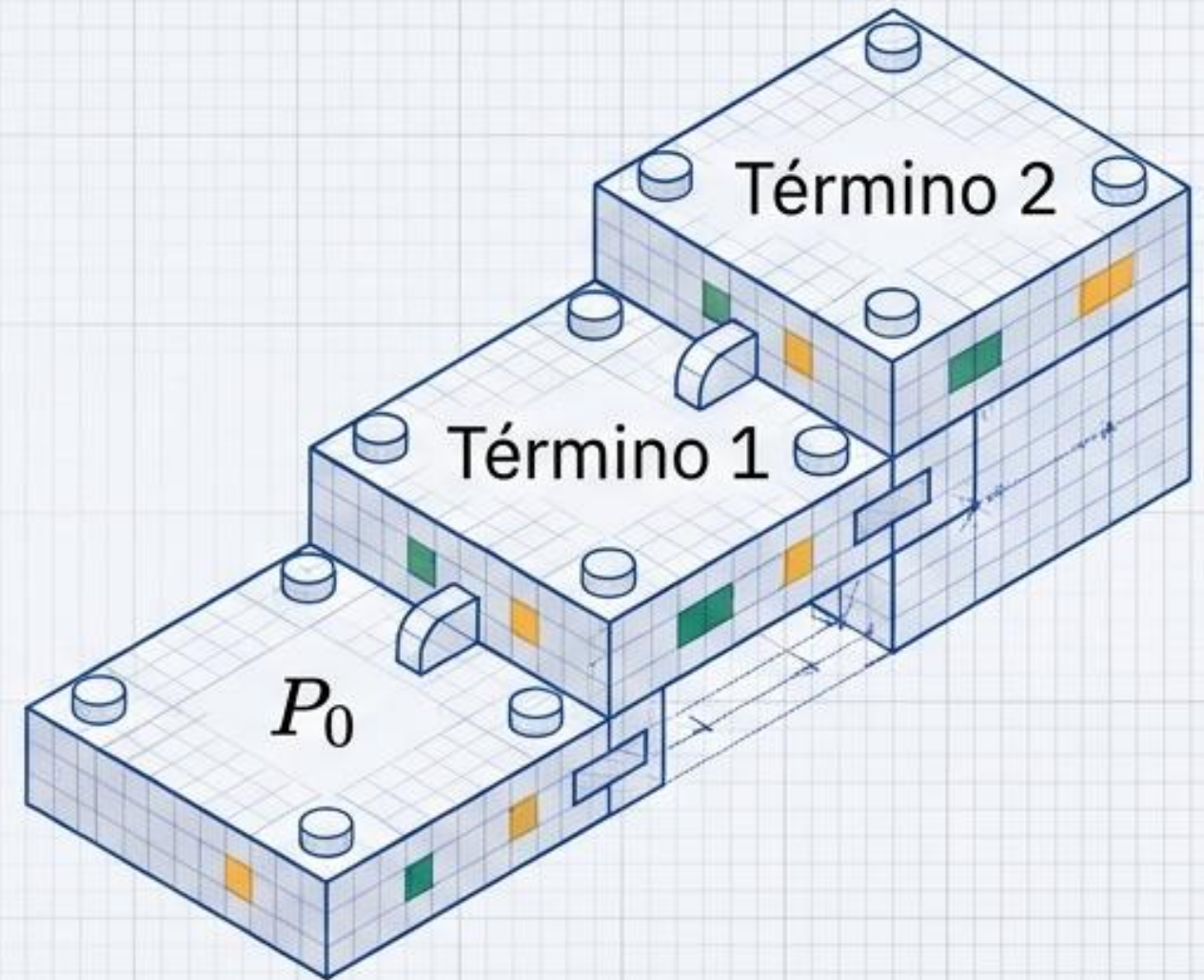


# La Limitación de Lagrange



Si agregamos un nuevo dato  $(x_3, y_3)$ , debemos reconstruir TODOS los polinomios fundamentales desde cero.

# El Objetivo de Newton



¿Podemos añadir nuevos datos agregando términos sucesivos, sin descartar ni modificar el trabajo previo?



# Paso 1: Un único dato conocido

Con un solo punto  $(x_0, f(x_0))$ , el polinomio más sencillo que satisface la condición de interpolación es una constante.

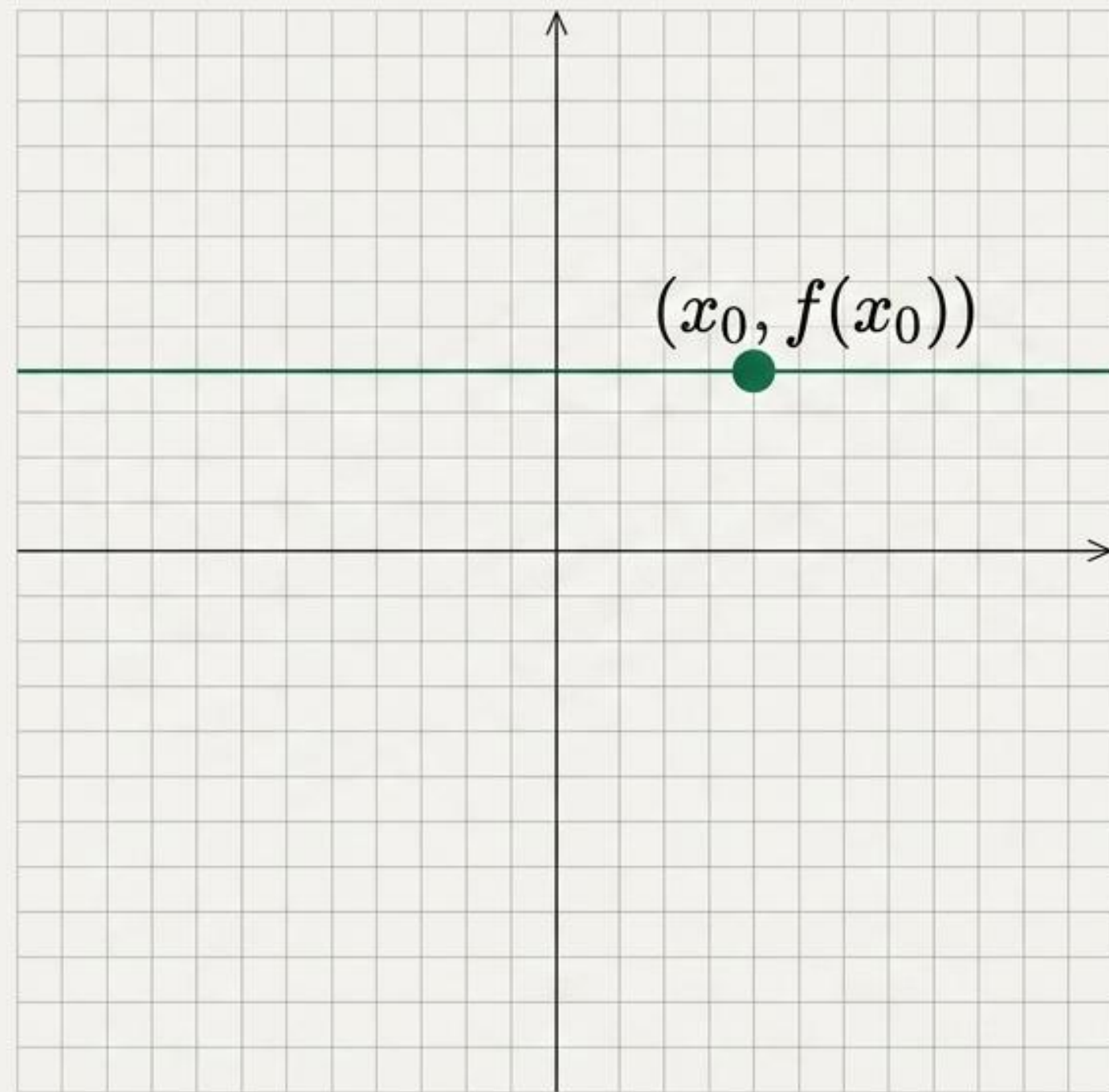
[Proposición]  $P_0(x) = b_0$

[Condición de interpolación]  $P_0(x_0) = f(x_0)$

[Resultado]  $b_0 = f(x_0)$

[Polinomio final]  $P_0(x) = f(x_0)$

Nuestro primer bloque de construcción.  
 $b_0$  representa exactamente el valor de  
la función en el nodo inicial.



# Paso 2: Incorporar un segundo dato sin alterar el primero

1. Proponemos la suma de un nuevo término:

$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

$$P_1(x_0) = b_0 + b_1(\cancel{x_0} - x_0)$$

Se anula en  $x_0$ .  
¡La interpolación  
previa está protegida!

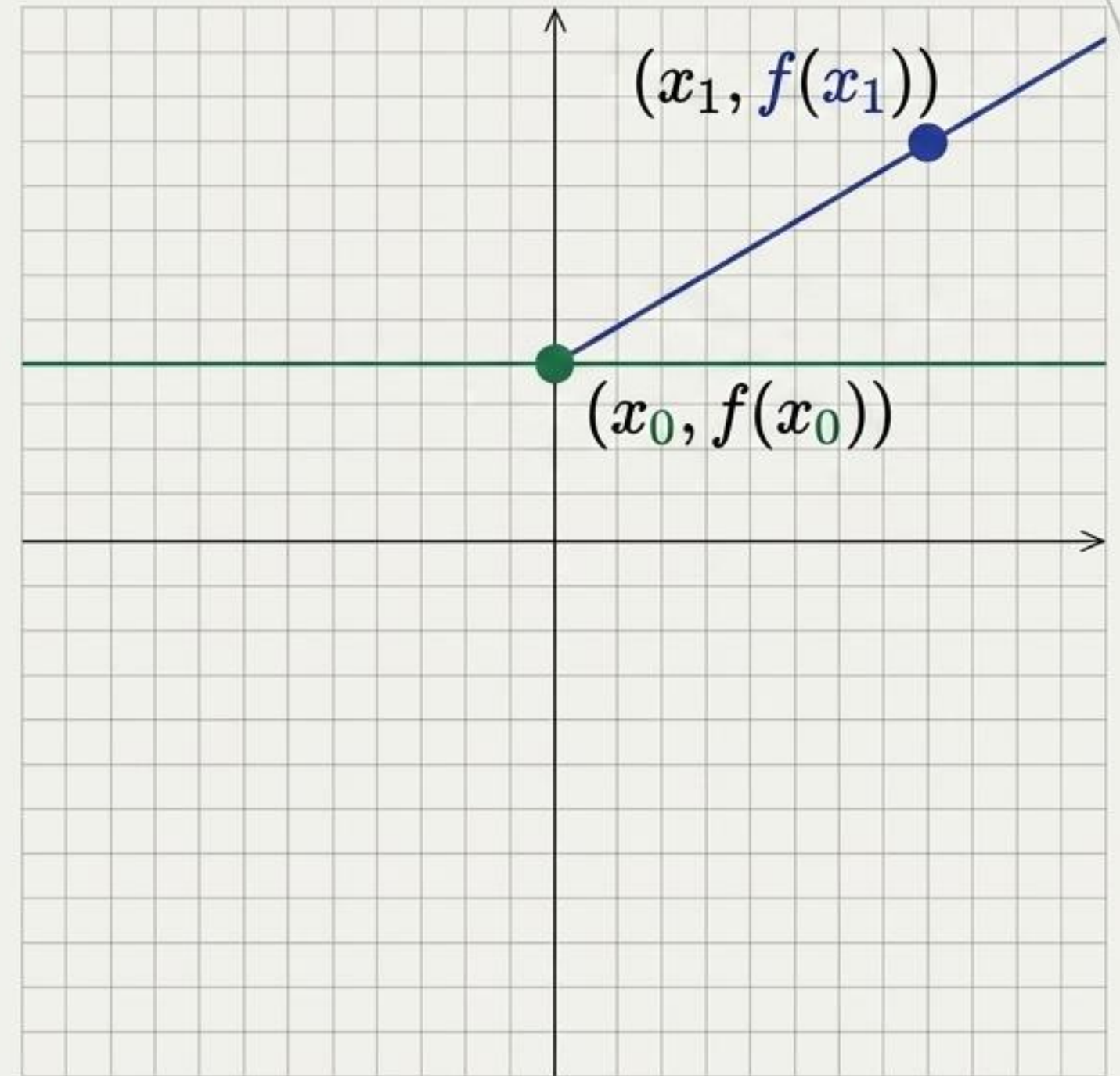
2. Forzamos la condición para el nuevo punto  $x_1$ :

$$P_1(x_1) = f(x_1)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0)$$

3. Despejamos el nuevo coeficiente  $b_1$ :

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

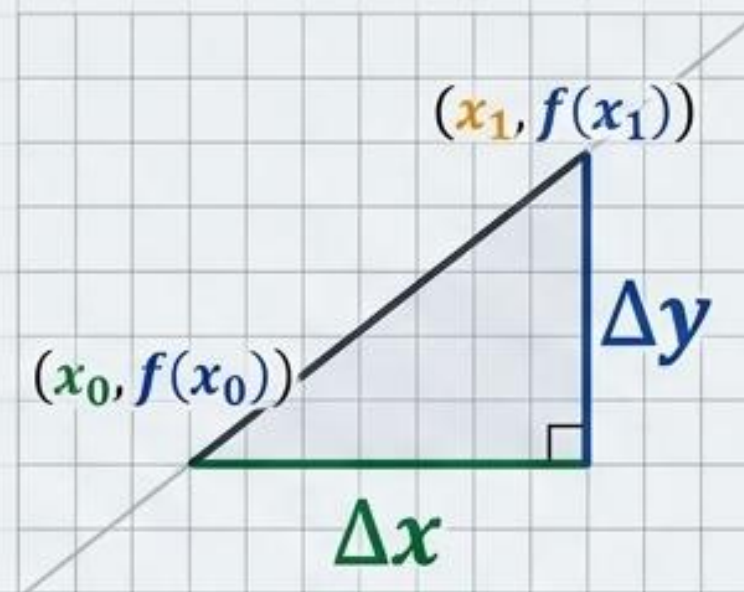




# Bautizando el coeficiente: La Diferencia Dividida

Definición Formal (Primer Orden):

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



La expresión hallada para  $b_1$  es la razón de cambio entre los valores.



Conclusión del Paso 2: Por lo tanto,  $b_1 = f[x_0, x_1]$

Polinomio Lineal Resultante:  $P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$



## Paso 3: Incorporación de un tercer dato

1. Proponemos un nuevo bloque aditivo:

$$P_2(x) = P_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

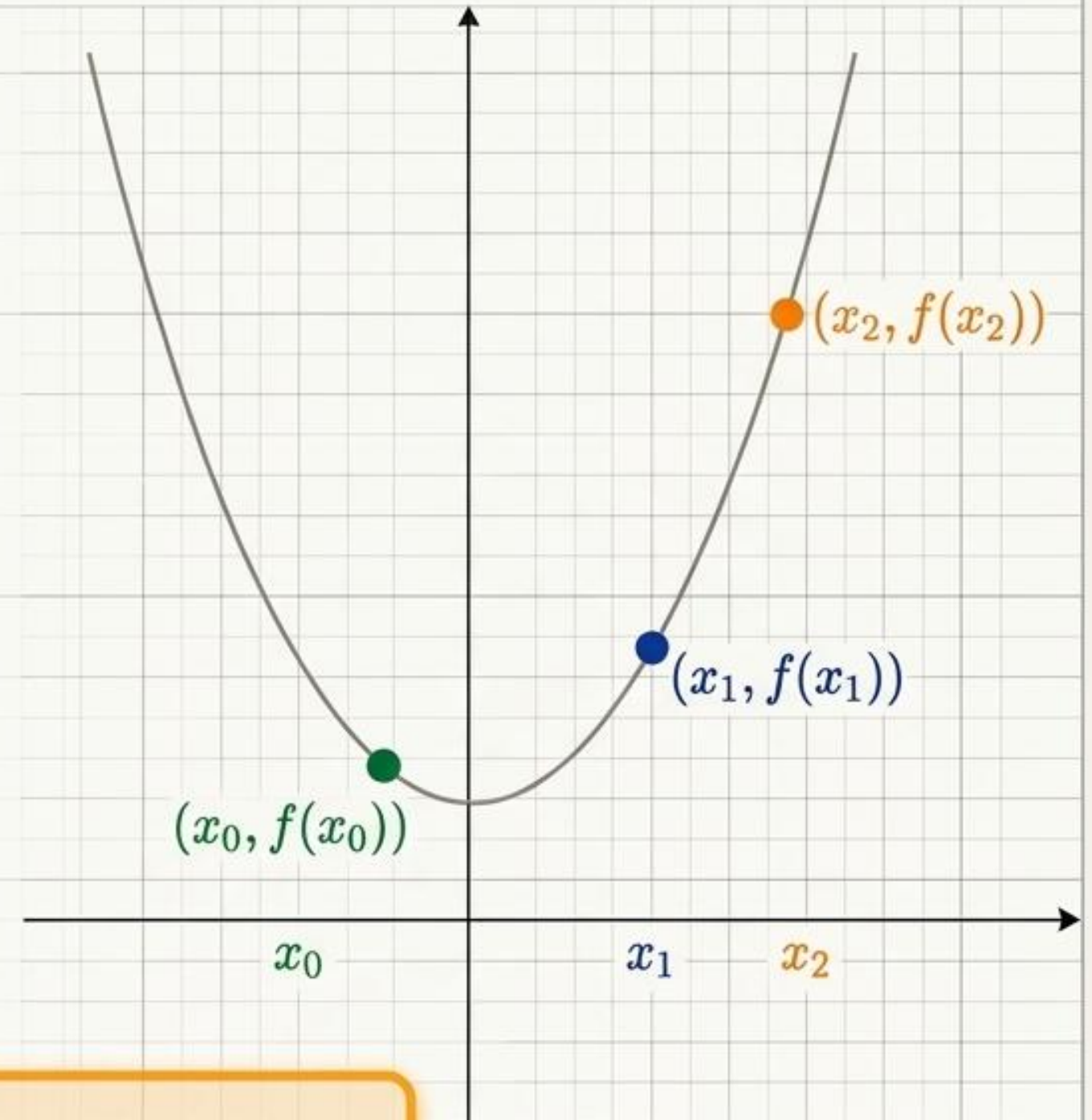
Este nuevo bloque garantiza anularse tanto en  $x_0$  como en  $x_1$ . Todo el trabajo anterior sigue intacto.

2. Evaluando  $P_2(x_2) = f(x_2)$  y despejando  $b_2$ , obtenemos la diferencia dividida de segundo orden:

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Polinomio Cuadrático Resultante:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$





# La Estructura General de Newton

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Término constante  
(Interpola 1 dato)

Diferencia de 1er orden  
(Ajusta el 2do dato)

Diferencia de 2do orden  
(Ajusta el 3er dato)

## Definición Recursiva General

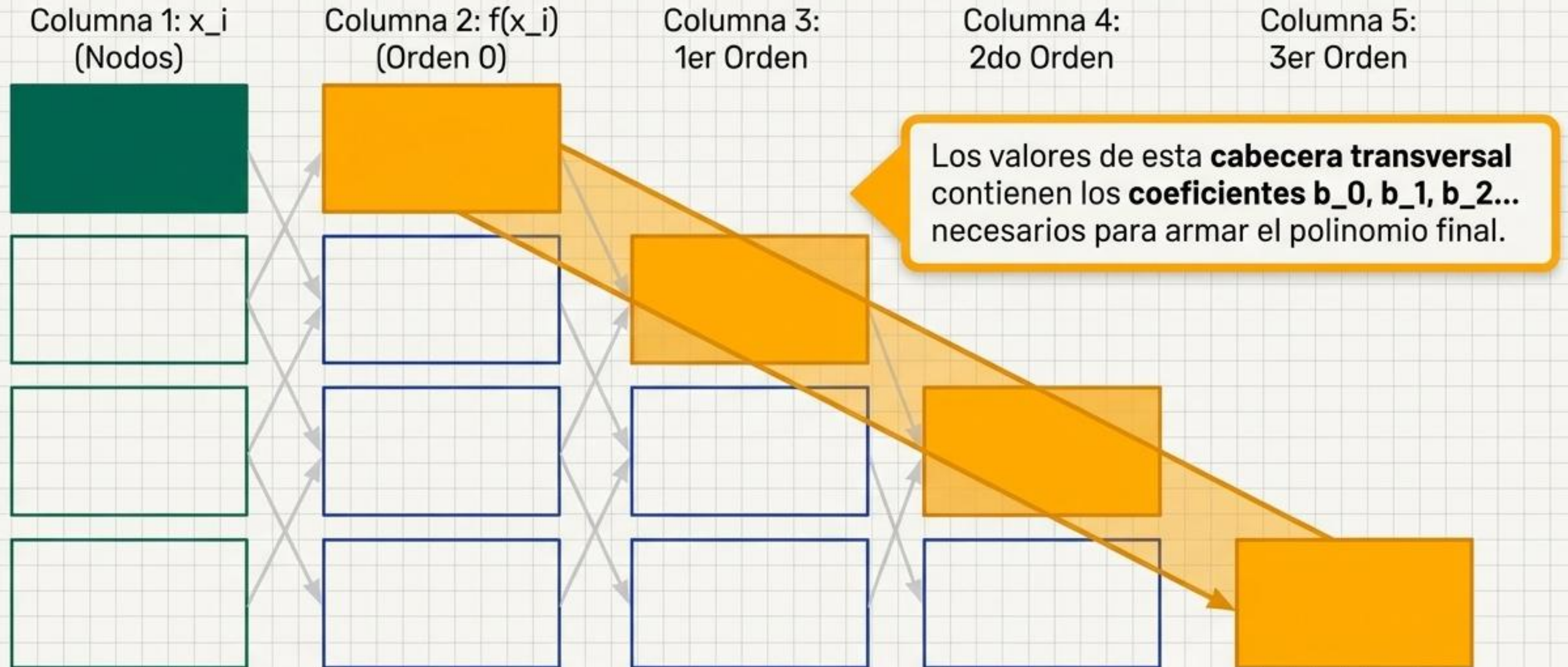
$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

*Cada diferencia de orden  $k$  se calcula a partir de dos diferencias de orden  $k-1$ .*



# La Tabla como Motor Computacional

La tabla no solo organiza los cálculos; almacena los coeficientes exactos que necesitamos.





# Planteo del Problema

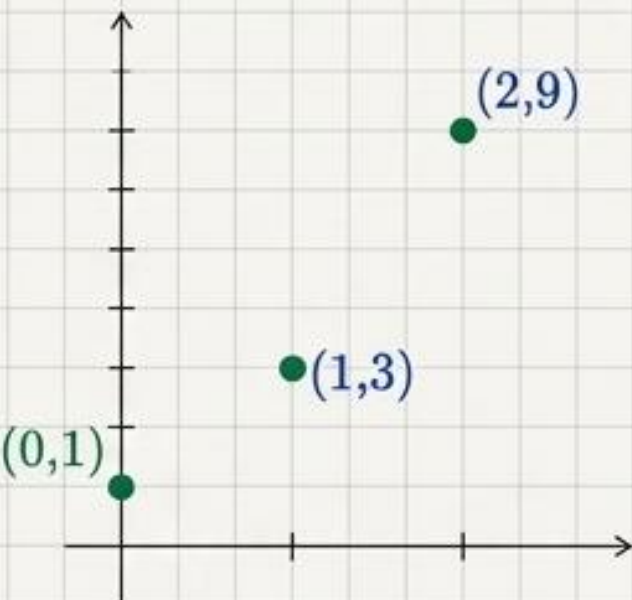
Conocemos la siguiente información:

$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 1$

$x_1 = 1 \rightarrow f(x_1) = 3$

$x_2 = 2 \rightarrow f(x_2) = 9$

**Objetivo:** Construir el polinomio de interpolación de Newton.



# Paso 1: Inicialización de la Tabla

| $x_i$ | $f(x_i)$ | Primer Orden | Segundo Orden |
|-------|----------|--------------|---------------|
| 0     | 1        |              |               |
| 1     | 3        |              |               |
| 2     | 9        |              |               |



## Paso 2: Cálculos Computacionales

1

$$f[x_0, x_1] = \frac{3 - 1}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 1 <sup>er</sup> Orden | 2 <sup>do</sup> Orden |
|-------|----------|-----------------------|-----------------------|
| 0     | 1        | 2                     | 2                     |
| 1     | 3        | 6                     |                       |
| 2     | 9        |                       | 2                     |

2

$$f[x_1, x_2] = \frac{9 - 3}{2 - 1} = \frac{6}{1} = 6$$

3

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{6 - 2}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

# Del Algoritmo a la Función

| $x_i$                 | 0 | 1 | 2 |
|-----------------------|---|---|---|
| $x_i$                 | 1 | 3 | 9 |
| $f(x_i)$              | 1 | 2 | 9 |
| 1 <sup>er</sup> Orden | 2 | 6 | 2 |
| 2 <sup>do</sup> Orden |   | 2 |   |

Coeficientes extraídos:

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 2$$

1. Sustituyendo los coeficientes en la Forma de Newton:

$$P_2(x) = 1 + 2(x - 0) + 2(x - 0)(x - 1)$$

2. Distribución inicial:

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x(x - 1)$$

3. Expansión:

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x$$

4. Resultado Final Simplificado:

$$P_2(x) = 1 + 2x^2$$



## Verificación de la Interpolación

¿El polinomio obtenido  $P_2(x) = 1 + 2x^2$  pasa exactamente por nuestros datos iniciales?



Para  $x_0 = 0$ :

$$P_2(0) = 1 + 2(0)^2 = 1 \quad (\text{¡Verificado!})$$



Para  $x_1 = 1$ :

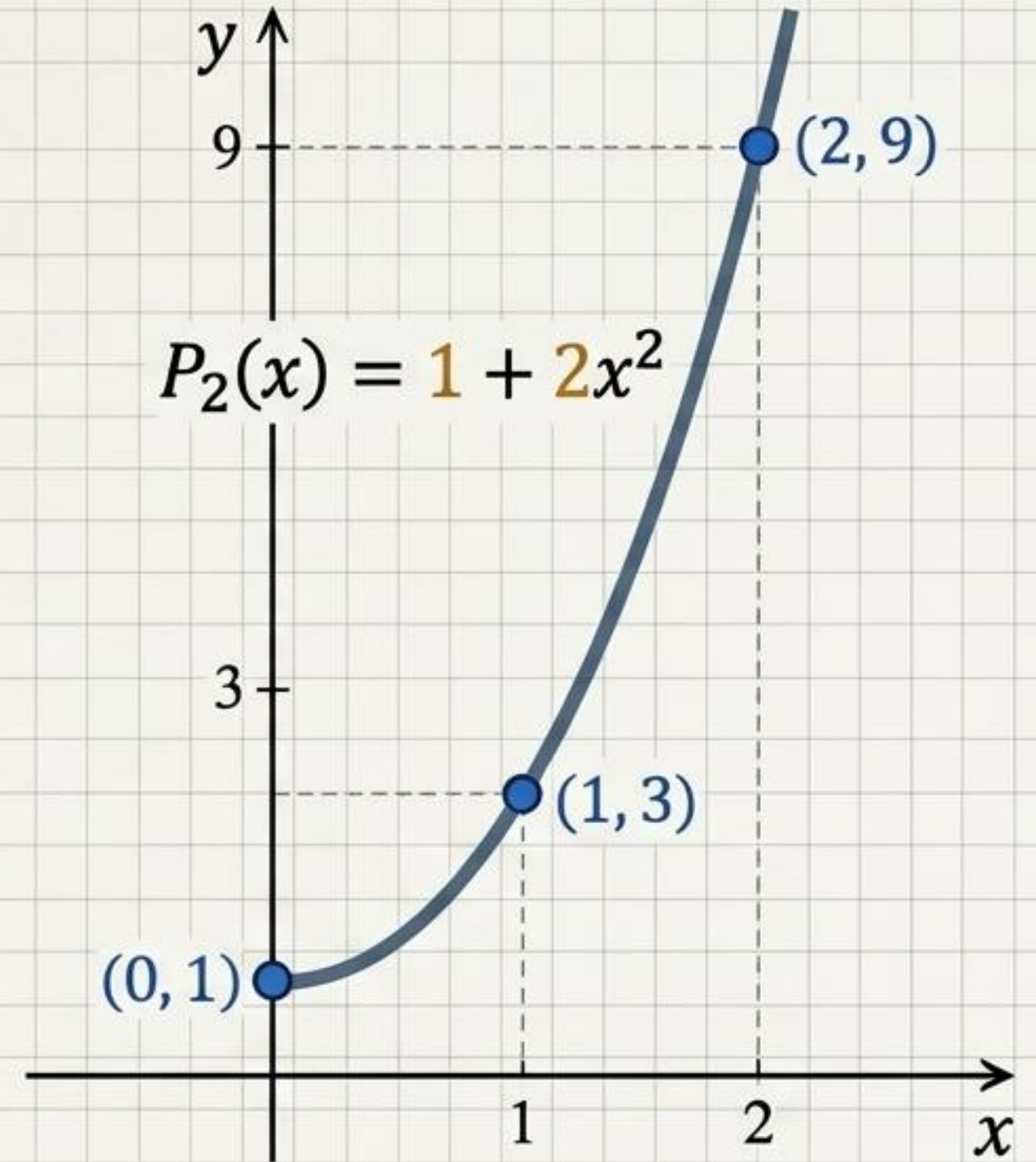
$$P_2(1) = 1 + 2(1)^2 = 1 + 2 = 3 \quad (\text{¡Verificado!})$$



Para  $x_2 = 2$ :

$$P_2(2) = 1 + 2(2)^2 = 1 + 8 = 9 \quad (\text{¡Verificado!})$$

Conclusión: La forma obtenida cumple matemáticamente y empíricamente con la condición impuesta, por lo que es segura de utilizar.





# Newton vs. Lagrange: Dos enfoques, un mismo resultado

Newton por Diferencias Divididas

Interpolación de Lagrange

¡Obtienen exactamente el mismo único polinomio  $P_n(x)$  que interpola los datos!

Mecanismo de  
Construcción

Incorporación progresiva de  
términos aditivos.

Combinación lineal de polinomios  
fundamentales.

Origen de  
Coeficientes

Diferencias divididas organizadas  
computacionalmente en una tabla.

Los propios valores escalares  $y_i$ .

Gestión de  
Nuevos Datos

Extiende el polinomio agregando  
solo un nuevo término y una  
columna (Alta flexibilidad).

Obliga a modificar y recalcular  
toda la estructura construida  
(Baja flexibilidad).



# Consideraciones sobre el Error de Interpolación

Pasar por los puntos no significa modelar el comportamiento real de forma perfecta.

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Depende intrínsecamente del comportamiento de la función verdadera que desconocemos (sus derivadas continuas).

Depende de la distribución geográfica de los nodos y dónde se ubica la “x” que queremos estimar.

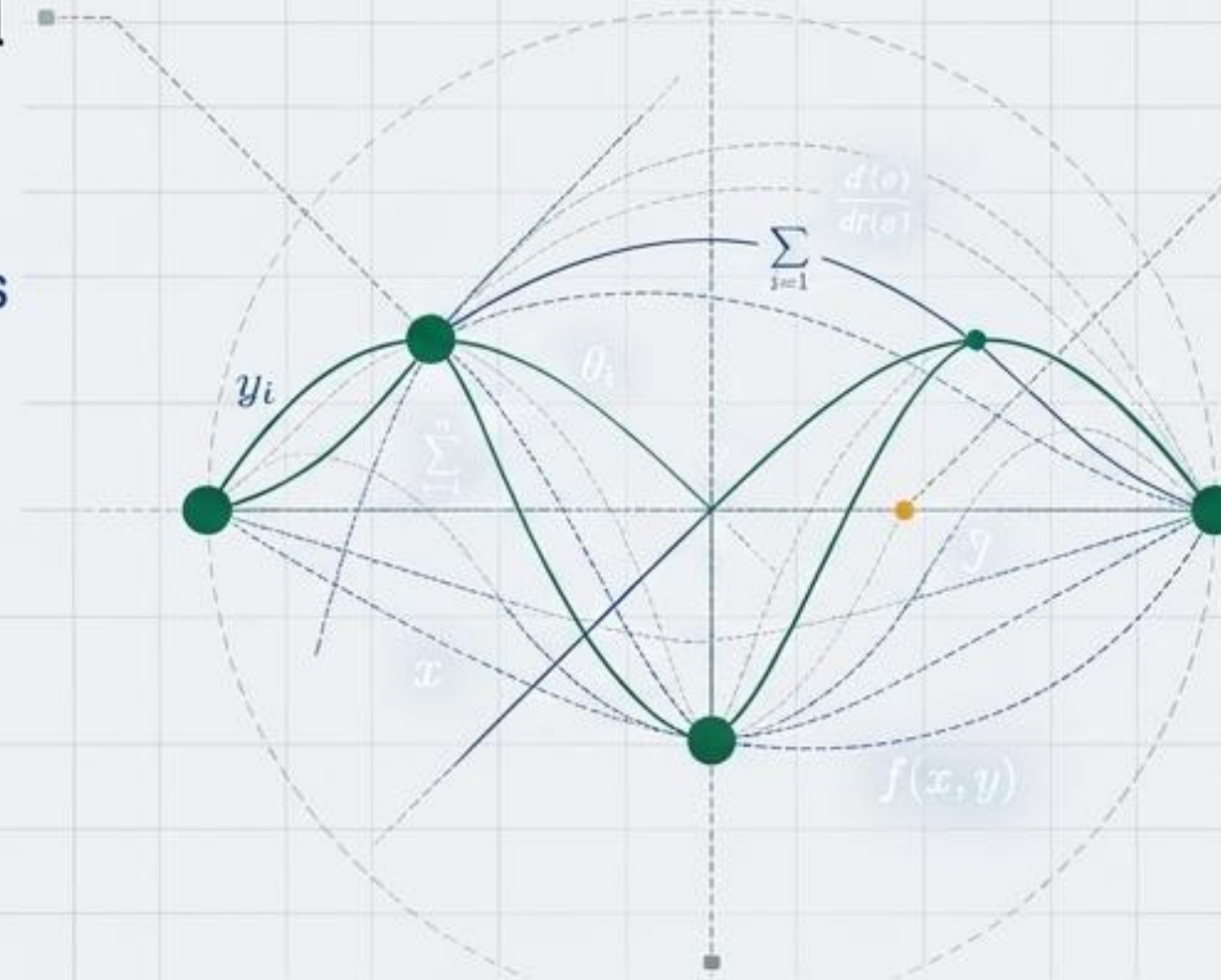
**Concepto Fundamental:** Mayor grado polinomial NO significa automáticamente menor error. Aumentar datos modifica toda la dinámica de estos componentes.



# Más allá del Algoritmo

## Ingeniería Computacional

$f$ : El método de *Newton* transforma **derivadas analíticas** en **diferencias finitas discretas**, permitiendo a las computadoras simular cambios continuos.



## Agilidad Estructural

La construcción progresiva emula la adquisición de **conocimiento iterativo**: añadimos nueva evidencia (datos) sin desechar el modelo que ya teníamos.

## La Naturaleza de Modelar

La **interpolación** genera la mejor estimación posible bajo información limitada. El algoritmo conecta los puntos; el juicio humano interpreta la física subyacente.