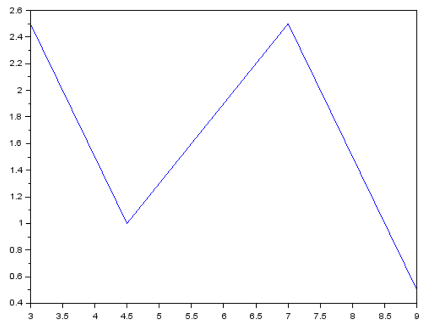
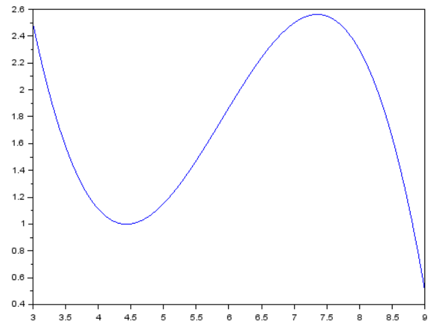
Introducción

Hasta ahora hemos estudiado la aproximación de una función arbitraria usando un polinomio interpolante en un intervalo cerrado. Para ello utilizamos un conjunto de n pares ordenados $[x_i, f(x_i)]$ $con\ i = 0,1,2 \dots, n-1$ con los que se puede crear polinomios de hasta grado $n-1$ con los cuales luego aproximar un valor $x_k\ tal\ que\ k\ \in (x_0, x_{n-1}) y\ x_k \neq x_i$.

La naturaleza oscilatoria de los polinomios de alto grado y la propiedad de que una fluctuación en un pequeño intervalo de la función puede provocar importantes fluctuaciones en todo el rango limita de manera significativa su utilización.

Un procedimiento alternativo para intentar minimizar el efecto mencionado en el párrafo anterior consiste en dividir el intervalo en una serie de subintervalos para posteriormente construir para cada uno de ellos un polinomio de interpolación. Este tipo de interpolación polinomial se conoce con el nombre de interpolación polinómica fragmentaria.

La interpolación polinómica fragmentaria mediante polinomios lineales son las más simples de usar (es decir, unir los subintervalos mediante rectas), sin embargo, tiene el inconveniente de que no es posible asumir que haya diferenciabilidad en los extremos de los subintervalos. Si la unión de los subintervalos debiera ser “suave” como lo muestra geométricamente las siguientes gráficas

<table>
<tr><td>Para</td><td>Usando interpolación polinómica fragmentaria lineal</td><td>Usando interpolación polinómica fragmentaria con unión suave de subintervalos</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr><tr><td>3.0</td><td>2.5</td></tr><tr><td>4.5</td><td>1.0</td></tr><tr><td>7.0</td><td>2.5</td></tr><tr><td>9.0</td><td>0.5</td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Entonces la interpolación fragmentaria debería poder cumplir estas propiedades. De hecho, existen una gran variedad de fenómenos físicos indican claramente la necesidad de cumplir con este requisito (que la función interpolante debe ser continuamente diferenciable).

La interpolación de Hermite permite ser usada de forma fragmentaria, sin embargo, requiere conocer la derivada de la función que será aproximada; lo cual no siempre es posible.

Por esta razón ahora estudiaremos la aproximación por medio de polinomios fragmentarios que no requieran información sobre la derivada, salvo quizás en los extremos de los intervalos.

Polinomios por Trazadores cúbicos o splines

La interpolación por trazadores cúbicos es la forma más común de encarar la situación problemática indicada. Así para cada subintervalo tendremos un polinomio de la siguiente forma:

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + bx + d$$

Donde se observan 4 coeficientes $(a, b, c\ y\ d)$. Estos coeficientes aseguran la flexibilidad necesaria para garantizar que la función interpolante no solamente sea continuamente diferenciable en el subintervalo, sino que además siempre posee una segunda derivada continua.

Ahora se requiere que las funciones interpolantes cumplan ciertas condiciones para asegurar que sus derivadas sean iguales a las de la función que desean aproximar para que en su totalidad se cumpla que es una función interpolante válida que minimiza el efecto de Runge.

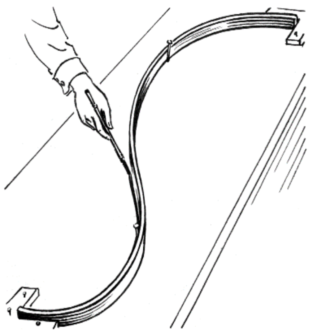
<u>Definición previa</u>: A los puntos x donde se les conoce el valor de la función se denominas **nodos**.

Dada una función f definida en $[a,b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ un polinomio interpolante por trazadores cúbicos denominado S para la función f es una función que cumple con las condiciones siguientes:

a) $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$ en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$;
b) $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$ ($S(x)$ es función interpolante)
c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$ (asegura que $S(x)$ es continua)
d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$

Las condiciones d y e imponen que las derivadas primeras y segundas en los nodos interiores sean continuas “suaves”. También son denominadas **condiciones de empalme**.

f) Debe cumplirse alguna de estas posibles condiciones (denominadas condiciones de frontera):
1) $S''(x_0) = S''(x_n)$ Frontera libre o natural
2) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ Frontera sujeta



Cuando se utilizan las condiciones de frontera libre, el trazador cúbico se denomina trazador natural y su gráfica se aproxima a la forma que adoptaría una varilla larga y flexible al pasar por los puntos $\{(x_0, fx_0), (x_1, fx_1), \dots, (x_n, fx_n)\}$. Esa varilla se denomina Spline. Por esta razón este método también se denomina interpolación por splines cúbicos. En este tipo de fronteras entonces el valor de la segunda derivada en los extremos se iguala a 0.

Por otro lado, si se utilizan las condiciones de frontera sujeta se obtienen en general aproximaciones más exactas, sin embargo, cumplir este tipo de condiciones requiere tener valores de la derivada en los extremos o bien una aproximación “precisa” de ellos.

En base a estas condiciones se puede demostrar y deducir que la forma del polinomio interpolante cúbico en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$.

<table>
<tr><td>Expresión genérica</td><td>Aplicación de la expresión en ejemplo</td></tr>
<tr><td></td><td>Dada la siguiente tabla genere el trazador cúbico y grafíquela
<table>
<tr><th>X</th><th>Y</th></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>-7</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Condición a) → Expresar $S(x)$ como el conjunto de las funciones cúbicas diferentes para cada intervalo</td></tr>
<tr><td>$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$</td><td>$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & x \in [2,3] \\ S_1(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & x \in [3,5] \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condición b) → Expresar $S_j(x)$ para cada punto para asegurar que es una función interpolante</td></tr>
<tr><td>$$S(x_j) = f(x_j)$$</td><td>$S_0(2) = -1 \Rightarrow a_1(2)^3 + b_1(2)^2 + c_1(2) + d_1 = -1$
$S_0(3) = S_1(3) = 2 \Rightarrow a_1(3)^3 + b_1(3)^2 + c_1(3) + d_1 = 2$
$S_1(5) = S_1(5) = -7 \Rightarrow a_1(5)^3 + b_1(5)^2 + c_1(5) + d_1 = -7$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Que también se puede expresar de la siguiente manera
$S_0(2) = -1 \implies a_1 8 + b_1 4 + c_1 2 + d_1 = -1$
$S_0(3) = S_1(3) = 2 \implies a_1 27 + b_1 9 + c_1 3 + d_1 = 2$
$S_1(5) = S_1(5) = -7 \implies a_1 125 + b_1 25 + c_1 5 + d_1 = -7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condición d) → Evitar las discontinuidades. Para ello en los nodos interiores (donde se puede producir la discontinuidad) se la igualan las derivadas para obtener una única igualdad para cada uno de esos nodos.</td></tr>
<tr><td>$S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$</td><td>En la condición a) obtuvimos dos ecuaciones. Se observa que en $x_1$se debe asegurar que no hay discontinuidad. Entonces
a) Obtenemos la expresión de la derivada para cada función cúbica
$$S'(x) = \begin{cases} S'_0(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & x \in [2,3] \\ S'_1(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2x & x \in [3,5] \end{cases}$$
b) Ahora igualamos las derivadas en el nodo del conflicto
$$S'_1(3) = S'_0(3)$$
$$3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2 = 3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1$$
$$a_2 27 + b_2 6 + c_2 = a_1 27 + b_1 6 + c_1$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condición e) →Procedemos de manera análoga al paso anterior.</td></tr>
<tr><td>$S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$</td><td>a) Obtenemos la expresión de la derivada segunda para cada función cúbica
$$S''(x) = \begin{cases} S''_0(x) = 6a_1x + 2b_1 & x \in [2,3] \\ S''_1(x) = 6a_2x + 2b_2 & x \in [3,5] \end{cases}$$
b) Ahora igualamos las derivadas en el nodo del conflicto
$$S''_1(3) = S''_0(3)$$
$$6a_2(3) + 2b_2 = 6a_1(3) + 2b_1$$
$$a_2 18 + b_2 2 = a_1 18 + b_1 2$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condición f) →Procedemos a cumplir alguna de las condiciones de frontera.</td></tr>
<tr><td>$S''(x_0) = S''(x_n)$ Frontera libre
o
$S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ Frontera sujeta</td><td>En este caso particular no poseemos información de la derivada en los extremos, por tanto, utilizamos la condición de frontera libre.
$$S''_1(5) = S''_0(2) = 0$$
$$S''_1(5) = 6a_2(5) + 2b_2 = a_2 30 + 2b_2 = 0$$
$$S''_0(2) = 6a_2(2) + 2b_2 = a_2 30 + 2b_2 = 0$$</td></tr>
</table>

Observe que tuvimos 2 intervalos y por cada función cúbica tenemos 4 coeficientes. Se puede verificar que con n intervalos se requerirán n polinomios cúbicos. Por lo tanto, se puede determinar sistema de 4 x n ecuaciones para que las funciones splines cumpla todas las condiciones. En este caso particular se necesitan entonces 4 x 2 = 8 ecuaciones para cumplir las condiciones. Como se puede verificar hemos generado entonces todas las ecuaciones que cumplen las condiciones.

Podemos representar estas 8 ecuaciones de manera matricial

$$\begin{aligned}
&8a_1+4b_1+2c_1+d_1=-1\\
&27a_1+9b_1+3c_1+d_1=2\\
&27a_2+9b_2+3c_2+d_2=2\\
&125a_2+25b_2+5c_2+d_2=-7\\
&27a_1+6b_1+c_1=27a_2+6b_2+c_2\\
&18a_1+2b_1=18a_2+2b_2\\
&12a_1+2b_1=0\\
&30a_2+2b_2=0
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1\\
27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0\\
18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0\\
12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1\\ d_1\\ a_2\\ b_2\\ c_2\\ d_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -1\\ 2\\ 2\\ -7\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Y resolver el sistema para obtener los valores de los coeficientes.

La pregunta que podemos hacernos ahora es, ¿Hay alguna forma de obtener sistemáticamente o algortimicamente todo el proceso que hemos realizado hasta ahora? **La respuesta es SI**

Supongamos que expresamos cada polinomio cúbico de la siguiente manera

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

A continuación, impondremos las condiciones de continuidad:

- Para (x_i, y_i) pertenecientes a $S_i(x)$:

  $S_i(x_i) = a_i(x_i-x_i)^3 + b_i(x_i-x_i)^2 + c_i(x_i-x_i) + d_i = d_i = y_i$ (1)

- Para (x_{i+1}, y_{i+1}) pertenecientes a $S_i(x)$:

  $S_i(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1}-x_i)^3 + b_i(x_{i+1}-x_i)^2 + c_i(x_{i+1}-x_i) + d_i =$

  $a_ih_i^3 + b_ih_i^2 + a_ih_i + d_i = y_{i+1}$ (2)

  Donde $h_i = (x_{i+1} - x_i)$

Entonces la condición de diferenciabilidad en los nodos interiores se puede expresar

- $S_i'(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i$ [Primera derivada] (3)
- $S_i''(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i$ [Segunda derivada] (4)

Definimos

$$S_i''(x_i) = M_i \text{ y } S_i''(x_{i+1}) = M_{i+1}$$

y reemplazando (4) tal que:

- Si $x = x_i$ $M_i = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i$ (5)
- Si $x = x_{i+1}$ $M_{i+1} = 6a_i(x_{i+1}-x_i) + 2b_i = 6a_ih_i + 2b_i$ (6)

Reordenando (5) y (6) se obtiene:

- $b_i = \frac{M_i}{2}$ (7)
- $a_i = \frac{M_{i+1}-2b_i}{6h_i} = \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}$ (8)

Si reemplazamos las ecuaciones (1), (7) y (8) en (2) queda:

$$y_{i+1} = \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}h_i^3 + \frac{M_i}{2}h_i^2 + c_ih_i + y_i$$

Con lo cual resulta que

- $c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{M_{i+1}-2M_i}{6}h_i$

Ahora evaluaremos las condiciones de empalme:

- Para la primera derivada:

$$S'(x_{i-1}) = S'(x_i) \tag{10}$$

Evaluando esto en (3) para x_{i-1} se obtiene

$$S_i'(x_{i-1}) = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_{i-1}{h_{i-1}}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} \tag{11}$$

También evaluamos en x_i

$$S_i'(x_i) = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i \tag{12}$$

Reemplazando (11) y (12) en (10) queda

$$3a_{i-1}{h_{i-1}}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} = c_i \tag{13}$$

Si reemplazamos en esta última expresión (7), (8) y (9)

$$3\frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}{h_{i-1}}^2 + 2\frac{M_i}{2}h_{i-1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{M_{i+1} - 2M_i}{6}h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{M_{i+1} - 2M_i}{6}h_i$$

Reordenando la expresión se concluye que

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6(y[x_i, x_{i+1}] - y[x_{i-1}, x_i])$$

Con $i = 1,2, \dots, n-1$. Además, recordemos que la diferencia dividida $y[x_i, x_{i+1}]$ es:

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

Si consideramos la condición de frontera natural entonces resulta que estamos ante un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} y[x_1,x_2] - y[x_0,x_1] \\ y[x_2,x_3] - y[x_1,x_2] \\ \vdots \\ y[x_{n-2},x_{n-1}] - y[x_{n-3},x_{n-2}] \\ y[x_{n-1},x_n] - y[x_{n-2},x_{n-1}] \end{bmatrix}$$

Donde una vez que se obtengan $M_1, \dots, M_{n-1}$ podremos obtener los coeficientes haciendo lo siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \\ b_i &= \frac{M_i}{2} \\ c_i &= y[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}h_i \\ d_i &= y_i \end{aligned}}$$

Si consideramos la condición de frontera sujeta, nuestro sistema tendrá la siguiente variante; producto del hecho de tener que agregar dos ecuaciones más:

$S_0'(x_0) = A \quad y \quad S_n'(x_n) = B$

$$2h_0 M_0 + h_0 M_1 = 6(y[x_0, x_1] - A)$$
$$h_{n-1} M_{n-1} + 2h_{n-1} M_n = 6(B - y[x_{n-1}, x_n])$$

Y llegamos a tener n+1 ecuaciones con n+1 incognitas:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} y[x_0,x_1] - A \\ y[x_1,x_2] - y[x_0,x_1] \\ \vdots \\ y[x_{n-1},x_n] - y[x_{n-2},x_{n-1}] \\ B - y[x_{n-1},x_n] \end{bmatrix}$$

Ejemplo Práctico

Apliquemos esto a un ejemplo: Obtener los polinomios de trazadores cúbicos que pasen por

X	0	1	1,5	2,25
Y	2	4,4366	6,7134	13,9130

Construimos nuestra tabla de diferencias

i	x_i	$f(x_i)$	$h_i = x_{i+1} - x_i$	$y[x_i, x_{i+1}]$
0	0	2	1-0=1	$\frac{4{,}4366 - 2}{1} = 2{,}4366$
1	1	4,4366	1,5-1=0,5	$\frac{6{,}7434 - 4{,}4366}{0{,}5} = 4{,}5536$
2	1,5	6,7134	2,25-1,5=0,75	$\frac{13{,}9130 - 6{,}7134}{0{,}75} = 9{,}5995$
3	2,25	13,9130		

Para este caso nuestro sistema de ecuaciones será formado con condición de frontera natural porque no poseemos información de la derivada en los extremos. Tenemos 4 puntos, por lo tanto, tendremos 3 subintervalos y en consecuencia tres splines cúbicos:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_1x_2] - f[x_0x_1] \\ f[x_2x_3] - f[x_1x_2] \end{bmatrix}$$

Entonces reemplazando tendremos

$$\begin{bmatrix} 2(1+0{,}5) & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2(0{,}5+0{,}75) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 4{,}5536 - 2{,}4366 \\ 9{,}5995 - 4{,}5536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}7020 \\ 30{,}2754 \end{bmatrix}$$

Lo que es igual a

$$3M_1 + 0{,}5M_2 = 12{,}7020$$

$$0{,}5M_1 + 2{,}5M_2 = 30{,}2754$$

Entonces

$$M_1 = \frac{12{,}7020 - 0{,}5M_2}{3}$$

y

$$0{,}5\frac{12{,}7020 - 0{,}5M_2}{3} + 2{,}5M_2 = 30{,}2754$$

$$0{,}5(4{,}234 - {}^{0{,}5}/_{3}\, M_2) + 2{,}5M_2 = 30{,}2754$$

$$2{,}117 + {}^{7{,}25}/_{3}\, M_2 = 30{,}2754$$

$${}^{7{,}25}/_{3}\, M_2 = 28{,}1554$$

$$7{,}25M_2 = 84{,}4752$$

$$M_2 = 11{,}6517$$

Por tanto

$$M_1 = 2{,}2921$$

y

$$M_0 = M_3 = 0$$

Finalmente podemos obtener los coeficientes, recordemos que

$$\boxed{\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \\ b_i &= \frac{M_i}{2} \\ c_i &= y[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h_i \\ d_i &= y_i \end{aligned}}$$

i	x_i	$f(x_i)$	h_i	$y[x_i,x_{i+1}]$	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0	2	1	2,4366	$\frac{2{,}2921 - 0}{6(1)} = 0{,}382$	$\frac{0}{2} = 0$	$2{,}4366 - \frac{2{,}2921 + 2(0)}{6}(1) = 2{,}0546$	2
1	1	4,4366	0,5	4,5536	$\frac{11{,}6517 - 2{,}2921}{6(0{,}5)} = 3{,}1199$	$\frac{2{,}2921}{2} = 1{,}146$	$4{,}5536 - \frac{11{,}6517 + 2(2{,}2921)}{6}(0{,}5) = 3{,}2005$	4,4366
2	1,5	6,7134	0,75	9,5995	$\frac{0 - 11{,}6517}{6(0{,}75)} = -2{,}5893$	$\frac{11{,}6517}{2} = 5{,}8259$	$9{,}5995 - \frac{0 + 2(11{,}6517)}{6}(0{,}75) = 6{,}6866$	6,7134
3	2,25	13,9130						

Con estos datos ahora

$$S(x) = \begin{cases} x \in [0,\ 1] & 0.382(x-0)^3 + 0(x-0)^2 + 2.0546(x-0) + 2 \\ x \in [1,\ 1.5] & 3.1199(x-1)^3 + 1.146(x-1)^2 + 3.2005(x-1) + 4.4366 \\ x \in [1.5,\ 2.25] & -2.5893(x-1.5)^3 + 5.8259(x-1.5)^2 + 6.6866(x-1.5) + 6.7134 \end{cases}$$