

Cálculo Numérico y Análisis de Errores

El puente entre las matemáticas ideales y
las soluciones reales.

Lo Exacto (Matemática Analítica)

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Procedimiento cerrado.
Solución perfecta.

Lo Intratable (El Mundo Real)

$$\cos(x) - x = 0$$

Imposible despejar analíticamente.
Requiere aproximación ($x \approx 0,739085$).

La Dualidad del Cálculo Numérico



El **método** es el **algoritmo matemático**, no la **herramienta** (calculadora o software) que lo ejecuta.

El Universo de los Problemas Numéricos



Raíces no lineales

Encontrar x tal que

$$f(x)=0$$



Sistemas Lineales

Resolver múltiples incógnitas:

$$Ax=b$$



Interpolación

Estimar $f(x)$ desde datos discretos:

$$(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$$



Integración

Calcular áreas sin antiderivadas exactas:

$$\int_a^b f(x)dx$$



Derivación

Estimar tasas de cambio:

$$f'(x)$$



Ecuaciones Diferenciales (EDOs)

Predecir evolución temporal:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

El Paradigma de la Aproximación



En cálculo numérico, el error no es una equivocación.
Es una diferencia aceptada y medida entre un valor y su representación.

$2 \neq 1,41$ (Pero puede ser suficiente para nuestro propósito)

Midiendo la Diferencia: Error Absoluto Verdadero

The diagram shows the formula for Absolute Error, $E_v = |x_v - x_a|$, with three labels and arrows pointing to the corresponding parts: 'Error Absoluto Verdadero' points to E_v , 'Valor Verdadero (Referencia)' points to x_v , and 'Valor Aproximado' points to x_a .

$$E_v = |x_v - x_a|$$

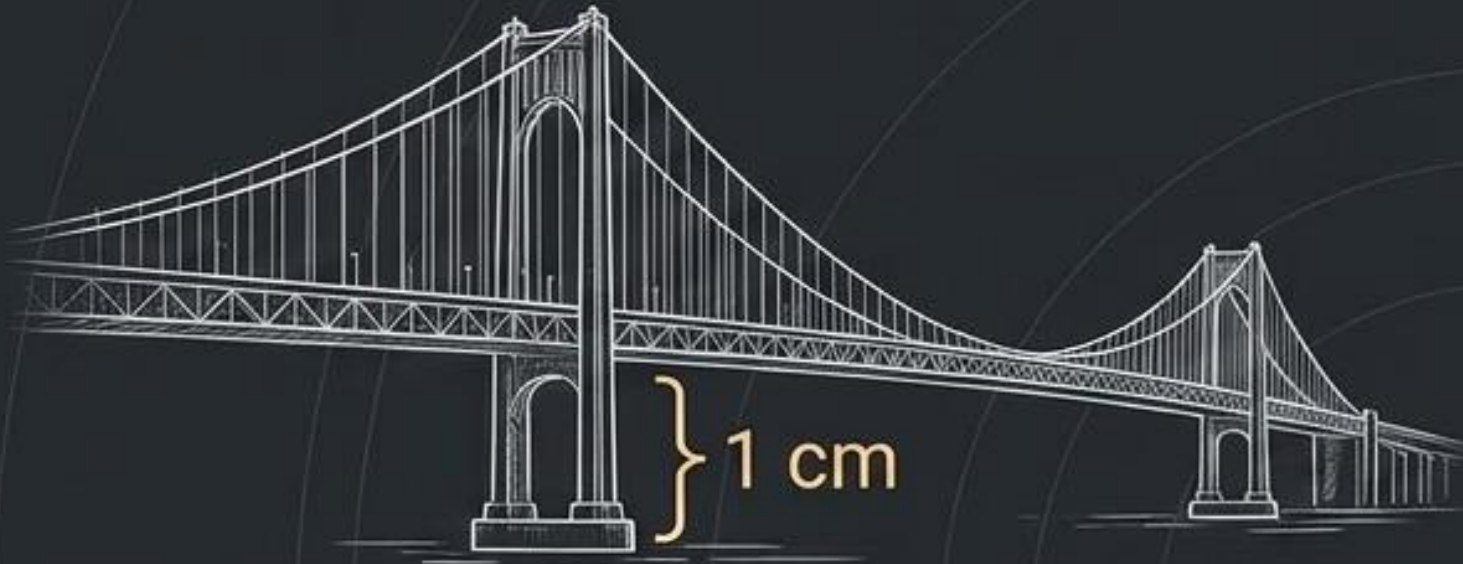
$$x_v \approx 1,41421356$$

$$x_a = 1,41$$

$$E_v = |1,41421356 - 1,41| = 0,00421$$

Nos dice cuánto difiere, pero no si esa diferencia es importante.

La Magnitud Importa: Error Relativo Verdadero



Un error absoluto de 1 cm es despreciable al medir un puente, pero catastrófico al medir un tornillo.

$$\varepsilon_v(\%) = \left| \frac{x_v - x_a}{x_v} \right| \times 100$$

La diferencia absoluta

Escala el error contra la magnitud real

Expresa qué tan importante es la diferencia respecto del valor original.

La Paradoja Numérica

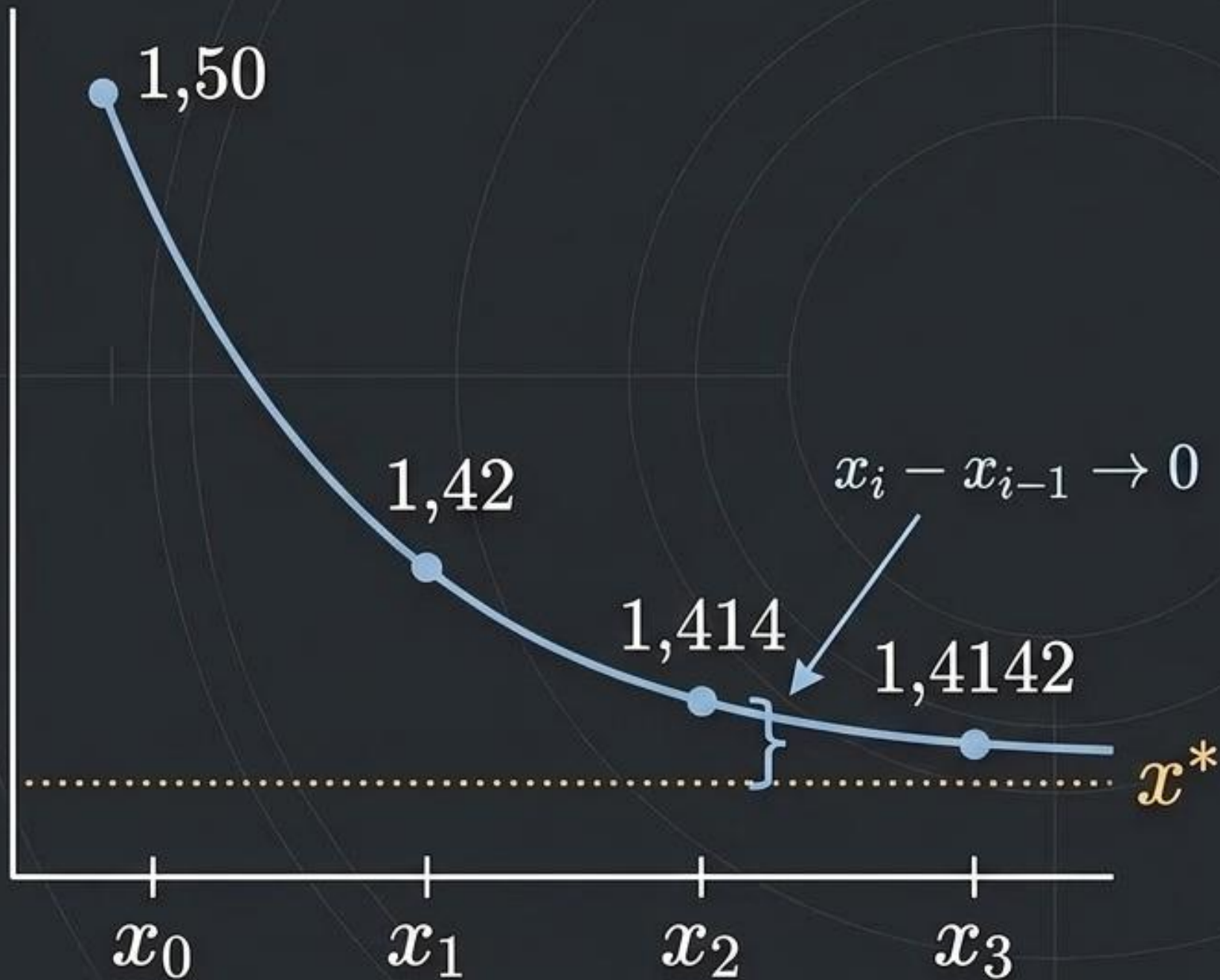

$$E_v = | \cancel{x_v} - x_a |$$

¿Cómo medimos la distancia al objetivo si no sabemos dónde está el objetivo?

En la mayoría de los problemas reales, el **valor verdadero** (x_v) es exactamente lo que estamos **intentando calcular**. No podemos usarlo para evaluar nuestro error.

Debemos abandonar la **comparación** con la realidad y empezar a compararnos con nuestros propios pasos.

El Motor Iterativo y la Convergencia



Un método iterativo genera una sucesión de aproximaciones $(x_0, x_1, x_2 \dots)$

Convergencia: El método converge si al avanzar las iteraciones, $x_i \rightarrow x^*$

Aunque no vemos x^* , sí vemos que la distancia entre nuestros pasos se reduce: $x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$

Error Absoluto Aproximado (E_a)

Aproximación actual

Aproximación de la iteración anterior

$$E_a = |x_i - x_{i-1}|$$

Iteración 4:	$x_4 = 1,41420$
Iteración 5:	$x_5 = 1,41421$
	$E_a = 0,00001$



¡Precaución Crítica!

Que el error aproximado disminuya NO demuestra, por sí solo, que el método esté convergiendo al valor correcto.

Error Relativo Aproximado (ε_a)

$$\varepsilon_a(\%) = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| \times 100$$

Cuánto cambió en el último paso

La aproximación más reciente y mejor disponible actúa como nuestra referencia

$$\varepsilon_a(\%) = \left| \frac{1,41421 - 1,41420}{1,41421} \right| \times 100 \approx 0,000707\%$$

Permite interpretar el cambio entre iteraciones en relación con la magnitud de la estimación actual.

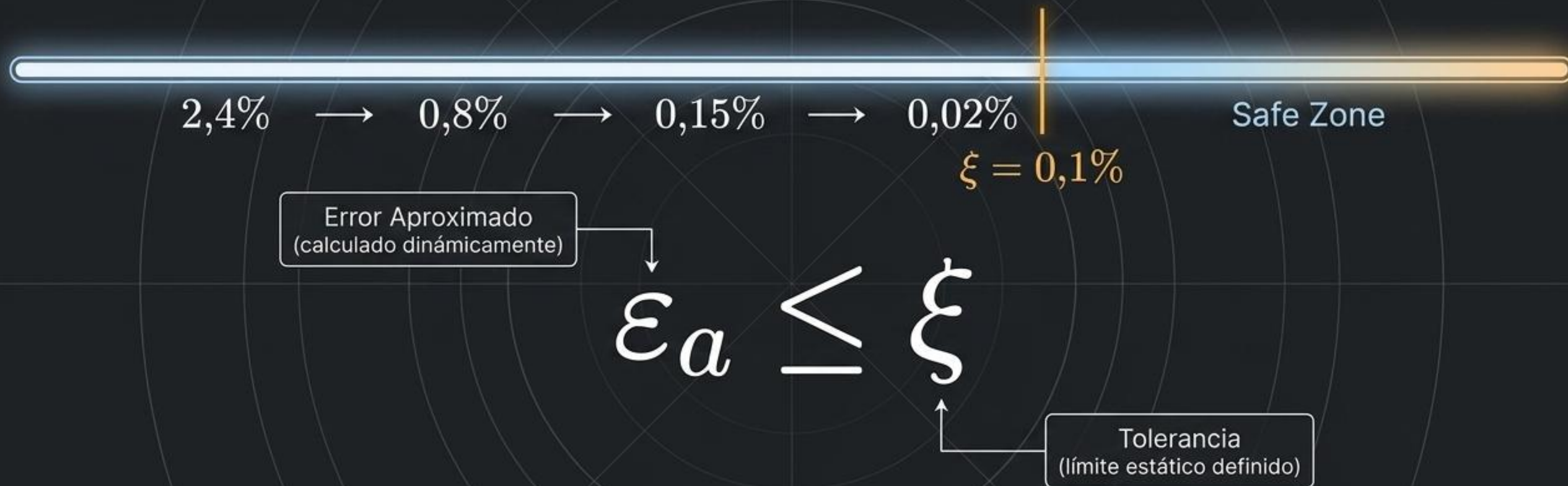
La Matriz Universal de los Errores

	Absoluto Diferencia directa	Relativo Proporción
Verdadero Conocemos la realidad	$E_v = x_v - x_a $	$\varepsilon_v = \left \frac{x_v - x_a}{x_v} \right $
Aproximado Trabajamos a ciegas	$E_a = x_i - x_{i-1} $	$\varepsilon_a = \left \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right $

Elegimos la medida según la información disponible (filas) y la necesidad de escalar por magnitud (columnas).

El Criterio de Parada y la Tolerancia (ξ)

No iteramos infinitamente. Nos detenemos cuando el error calculado es menor al máximo aceptable.



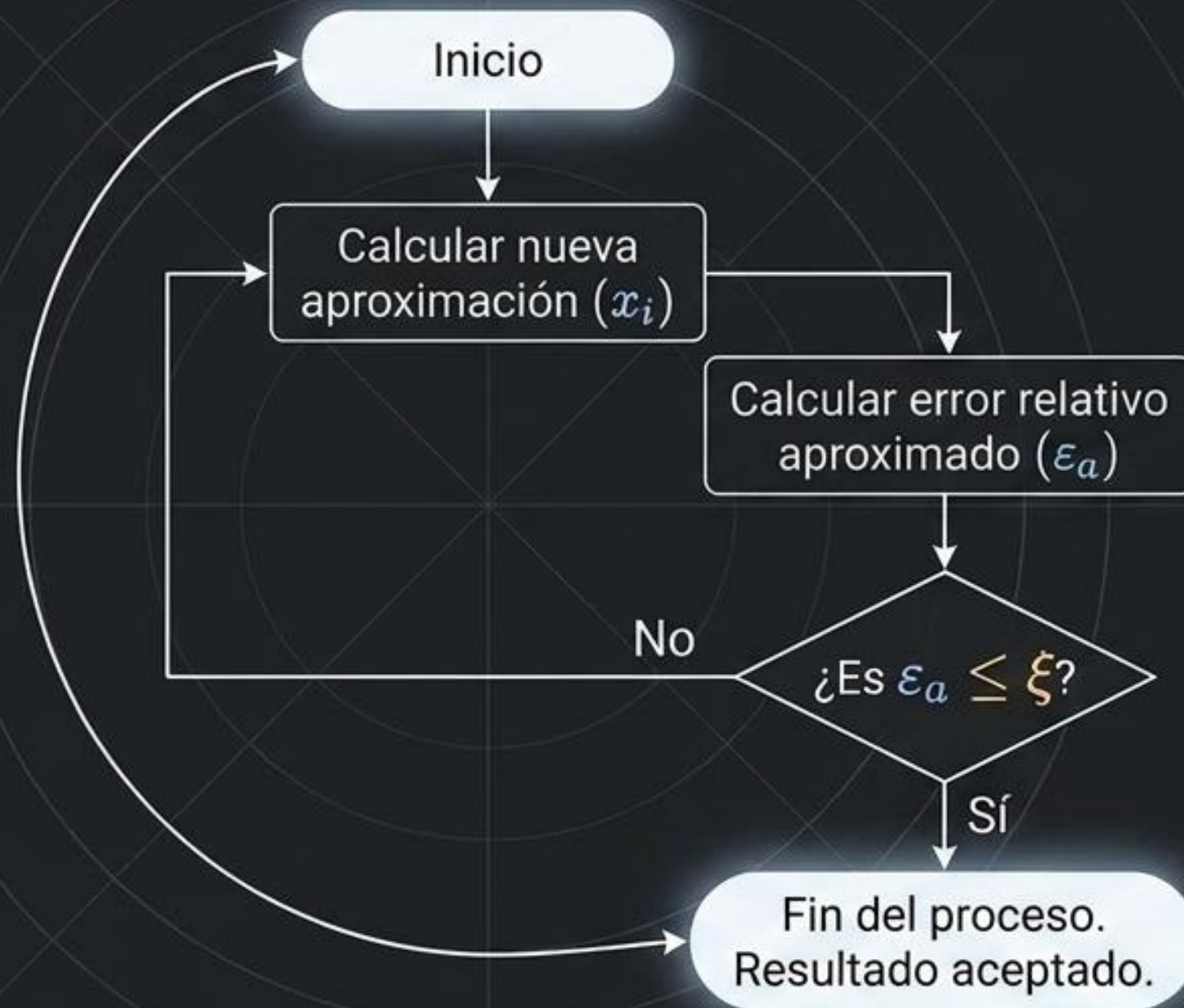
Error Aproximado (ϵ_a)

El valor dinámico que obtenemos y calculamos.

Tolerancia (ξ)

El límite estático que establecemos antes de empezar.

El Ciclo de Vida de un Método Iterativo



El cálculo numérico es la repetición automatizada de este ciclo hasta cruzar la frontera de la tolerancia.

Conclusión: El Equilibrio Computacional

Exigir una tolerancia menor
($\xi = 0,001\%$ vs 1%)
requiere más iteraciones.

Mayor Precisión /
Menor Tolerancia



Mayor Esfuerzo
Computacional

Representar
correctamente los
valores (cifras
significativas) es el
paso final para una
ingeniería confiable.

El objetivo del cálculo numérico no es buscar la perfección absoluta, sino encontrar el balance exacto entre la precisión requerida por el problema y los recursos disponibles.