Polinomio de Interpolación de Hermite

Vimos que con el conocimiento de las parejas $((x_i, f(x_i);\ x_i \in I = [a,b], i = 0, \dots, n$ se puede hallar un polinomio de interpolación de grado menor o igual a n.

Supongamos ahora que se quiere encontrar un polinomio "más parecido" a la función f usando información adicional disponible sobre esa mencionada función en los puntos $x_i, i = 0, \dots, n$.

Lo más natural es pensar en las derivadas de f en los puntos $x_i, i = 0, \dots, n$.

El problema se presenta entonces de la siguiente manera

Sea

$$I = [a,b]\ y\ x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

$(n+1)$ puntos en ese intervalo.

Sean

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$$

$(n+1)$ enteros no negativos y f una función definida en I tal que

$$f^{(j)}(x_i), \qquad i = 0, \dots, n \qquad j = 0, \dots, k_i$$

son definidos y conocidos.

Ahora denotemos

$$m = n + k_0 + \cdots + k_n$$

<u>Problemática para resolver:</u>

Encontrar un Polinomio P_m de grado menor o igual a m tal que

$$P_m{}^{(mj)}(x_i) = f^{(mj)}(x_i), \qquad i = 0, \dots, n \qquad j = 0, \dots, k$$

Un polinomio que cumple con estas condiciones se denomina Polinomio de Hermite. Además, este tipo de polinomios se embarca dentro de los denominados "Polinomios de Interpolación Osculatorios". En particular el polinomio de grado $2m + 1$ de la función f es un polinomio de la forma

$$P_{2m+1}(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i \phi_i(x) + \sum_{i=0}^{m} f_i{}' \psi_i(x)$$

Con

$$\phi_i(x) = [1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)]L_i^2(x)$$
$$\psi_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x), \qquad i = 0, \dots, m$$

Siendo $L_i(x)$ conocidos como factores o coeficientes de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Estos coeficientes son los mismos que son utilizados en el Polinomio de Lagrange (este polinomio forma parte de la teoría de introducción a la interpolación brindada en un apunte anterior). De hecho, el Polinomio de Lagrange puede considerarse como un caso particular de la interpolación de Hermite generalizada (el caso en el que no se conocen las derivadas de f).
La interpolación de Hermite puede extenderse al conocimiento de las derivadas sucesivas de la función a interpolar en las abscisas tomadas, de modo que se puede obtener un polinomio cada vez más ajustado a la función real, ya que éste podrá cumplir otros requisitos como una determinada monotonía, concavidad, etc.

En este caso, estaremos hablando de interpolación de Hermite generalizada y su cálculo se llevará a cabo de forma similar a la de otros polinomios, pero obteniendo polinomios de grado cada vez mayor debido a las sucesivas derivadas de los coeficientes $L_i(x)$
La diferencia esencial entre la Interpolación de Hermite y la Interpolación de Lagrange reside en la forma de los cálculos a través de la construcción de los Polinomios de Lagrange. En este caso, su cálculo es arduo, largo y complicado; por lo que el uso de las llamadas diferencias divididas generalizadas simplifica mucho el cálculo del polinomio interpolador.
Las diferencias divididas generalizadas se construyen de igual modo que las Diferencias Divididas de Newton, salvo que ahora necesitaremos escribir f_i tantas veces más una como derivadas de f conozcamos.

Nota: Aquí sólo veremos el caso en el que conocemos la primera derivada, siendo el resto una generalización de este
De esta forma el polinomio de interpolación de Hermite de grado $2m+1$ escrito usando las diferencias divididas tendrá la siguiente forma:

$$P_{2m+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2m+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1) \ldots (x - z_{k-1})$$

Donde

z	$f(z)$	First divided differences	Second divided differences
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Ejemplo práctico

Utilice el polinomio de Hermite que concuerda con los datos de la siguiente tabla para encontrar una aproximación al valor de $f(1{,}5)$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,3	0,6200860	-0,5220232
1	1,6	0,4554022	-0,5698959
2	1,9	0,2818186	-0,5811571

Primero construimos la tabla de diferencias divididas donde además agregamos la información de las derivadas de la siguiente manera

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

De donde se arma el polinomio de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
H_5(1.5) = {} & f[1.3] + f'(1.3)(1.5-1.3) + f[1.3, 1.3, 1.6](1.5-1.3)^2 \\
& + f[1.3, 1.3, 1.6, 1.6](1.5-1.3)^2(1.5-1.6) \\
& + f[1.3, 1.3, 1.6, 1.6, 1.9](1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2 \\
& + f[1.3, 1.3, 1.6, 1.6, 1.9, 1.9](1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9) \\
= {} & 0.6200860 + (-0.5220232)(0.2) + (-0.0897427)(0.2)^2 \\
& + 0.0663657(0.2)^2(-0.1) + 0.0026663(0.2)^2(-0.1)^2 \\
& + (-0.0027738)(0.2)^2(-0.1)^2(-0.4) \\
= {} & 0.5118277.
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Construyamos el polinomio de Hermite que concuerde con f y f' en los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, si

$$f(-1) = -9, \quad f'(-1) = 10, \qquad f(2) = 12, \quad f'(2) = 13.$$

Tabla de diferencias divididas (los datos iniciales están escritos con azul):

$$
\begin{array}{lllll}
z_0 = -1 & f[z_0] = -9 & & & \\
z_1 = -1 & f[z_1] = -9 & f[z_0, z_1] = 10 & & \\
z_2 = 2 & f[z_2] = 12 & f[z_1, z_2] = 7 & f[z_0, z_1, z_2] = -1 & \\
z_3 = 2 & f[z_3] = 12 & f[z_2, z_3] = 13 & f[z_1, z_2, z_3] = 2 & f[z_0, z_1, z_2, z_3] = 1
\end{array}
$$

Respuesta: $H(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$.