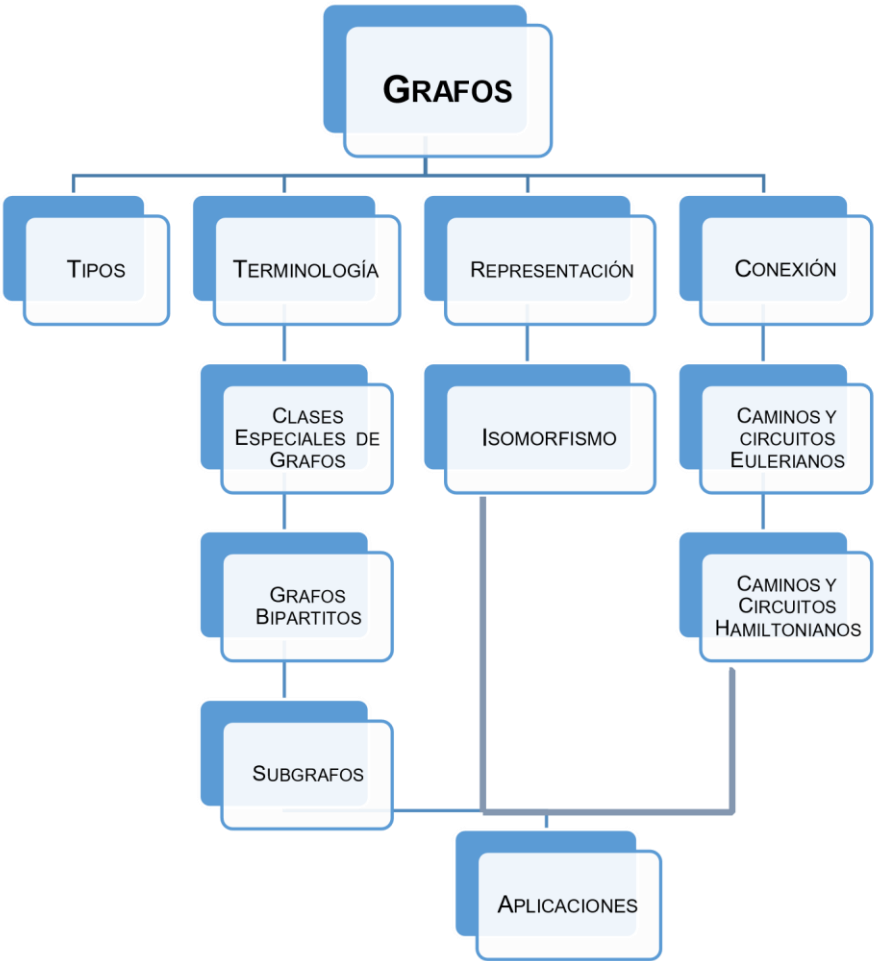
GRAFOS



OBJETIVOS

- ✓ Incorporar la terminología y simbología propia de la teoría de grafos.
- ✓ Reconocer las características de los grafos.

- ✓ Aplicar la teoría de grafos a problemas que se puedan resolver con las técnicas de esta teoría.
- ✓ Representar grafos por medio de matrices.
- ✓ Saber qué condiciones debe tener un grafo para poseer un circuito euleriano o hamiltoniano.
- ✓ Establecer cuando dos grafos son isomorfos.
- ✓ Aplicar los conceptos de la teoría de grafos en un lenguaje de programación.

GRAFOS

1.- INTRODUCCIÓN

A pesar de que la primera publicación sobre la teoría de grafos data del año 1736 y de que muchos resultados importantes se obtuvieron en el siglo XIX, no fue sino hasta 1920 que surgió un amplio y sostenido interés por esta teoría. Una de las razones del interés por los grafos, es sin duda alguna, su aplicabilidad en diversos campos.

Los grafos pueden utilizarse, por ejemplo, para determinar si se puede o no implementar un circuito sobre una placa de una sola capa. Se puede diferenciar dos compuestos químicos que tengan la misma fórmula molecular pero distinta estructura por medio de grafos. Se pueden utilizar los grafos para programar exámenes u organizar un torneo de futbol “todos contra todos”. Particularmente en ciencias de la computación se puede utilizar grafos para estudiar la estructura de la Red de Internet o para determinar si dos computadoras están conectadas o no por un enlace empleando modelos de grafos para redes informáticas.

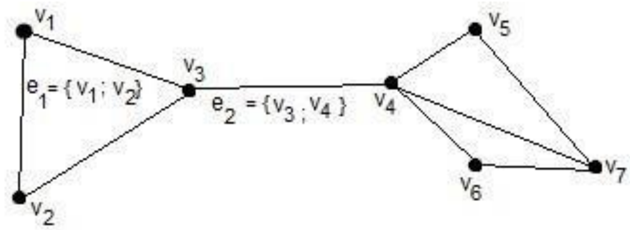
2.- TIPOS DE GRAFOS

Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y de aristas que conectan entre sí esos vértices. Hay varios tipos de grafos, que se diferencian entre sí por el tipo y el número de aristas que pueden conectar cada par de vértices.

Definición:

Un grafo simple G = (V, E) consta de V, un conjunto no vacío de vértices, y de E un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V. A estos pares se los llama aristas.

Los grafos admiten una representación gráfica, de ahí su nombre. Los vértices se representan por puntos y las aristas por líneas que conectan pares de vértices. Esta representación es de gran ayuda para estudiar propiedades de grafos no demasiados grandes. Por otro lado, el carácter intuitivo de estas representaciones sirve para formular y entender argumentos abstractos.
El siguiente es un ejemplo de grafo simple.

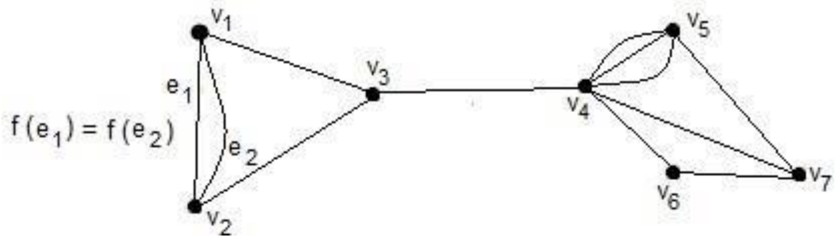


Debe observarse que los grafos simples no admiten la existencia de aristas múltiples entre pares de vértices, es decir, más de una arista conectada a un mismo par de vértices. Además no se puede usar simplemente un par de vértices para especificar la arista de un grafo si hay aristas múltiples. Para salvar esta situación se definen los multígrafos.

Definición:

Un multígrafo G = (V, E) consta de V, un conjunto no vacío de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} \ / \ u, v \in V, u \neq v\}$*. Se dice que las aristas* e_1 y e_2 *son aristas múltiples o paralelas si* $f(e_1) = f(e_2)$

Debe observarse que las aristas múltiples en un multígrafo están asociadas a un mismo par de vértices. No obstante se dice que $\{u, v\}$ es una arista del grafo G = (V, E) si hay al menos una arista e con $f(e) = \{u, v\}$. No se hará distinción entre la arista e y el conjunto $\{u, v\}$ asociado, a no ser que la identidad de alguna de las aristas múltiples en particular sea importante.
La relación entre los grafos simples y los multígrafos es la siguiente. “Todo grafo simple es un multígrafo. Sin embargo no todos los multígrafos son grafos simples, pues en un multígrafo puede haber dos o más aristas conectando un mismo par de vértices”. El siguiente es un ejemplo de multígrafo.



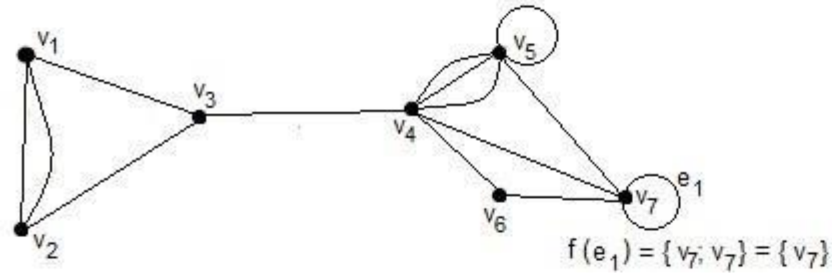
En la definición de multígrafo se establece una función f, cuyo conjunto de partida es E y el de llegada $\{\{u, v\} \;/\; u, v \in V, u \neq v\}$. En este último conjunto se pone como condición que los vértices u y v deben ser distintos. Esto trae como consecuencia la no aceptación de "bucles", es decir, aristas que conectan un vértice consigo mismo. En lugar de multígrafos, se puede utilizar pseudografos, que son más generales que los multígrafos ya que una arista de un pseudografo puede conectar un vértice consigo mismo.

A fin de definir formalmente los pseudografos, es necesario asociar aristas a conjuntos que contengan un solo vértice.

Definición:

Un pseudografo G = (V, E) consta de V, un conjunto no vacío de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} \;/\; u, v \in V\}$. Se dice que una arista e es un bucle o lazo si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.

El siguiente es un ejemplo de pseudografo.



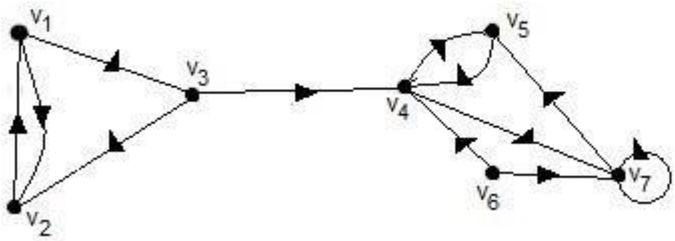
En la definición de grafo simple se establece un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V, y a estos pares se los llama aristas. Esto mismo ocurre en la definición de multígrafo y pseudografo. El hecho de que las aristas sean pares no ordenados de vértices, trae como consecuencia que sea lo mismo la arista $\{u, v\}$ que la $\{v, u\}$. Ahora bien, si se establece el conjunto E como un conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V, se habla, en este caso, de grafos dirigidos o dígrafos.

Las aristas de un dígrafo son pares ordenados. Se admiten bucles, pares ordenados con sus dos elementos iguales, pero no se admiten aristas múltiples en la misma dirección entre los vértices.

Definición:

Un grafo dirigido G = (V, E) consta de V, un conjunto no vacío de vértices, y de E un conjunto de pares ordenados de elementos de V. A estos pares se los llama aristas.

Se utiliza una flecha apuntando desde u hacia v para indicar la dirección de la arista (u, v) El siguiente es un ejemplo de grafo dirigido.

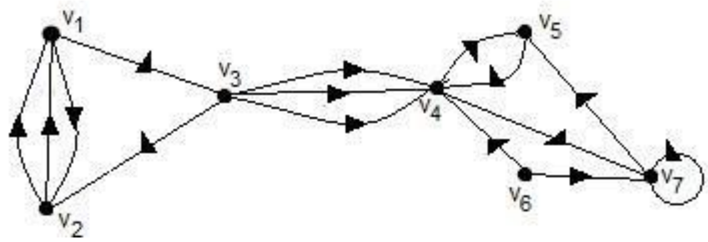


Finalmente si se aceptan aristas dirigidas múltiples desde un vértice a un segundo vértices se habla de multígrafos dirigidos. Eventualmente estos vértices pueden coincidir, ser uno solo, vale decir que también es posible la existencia de bucles o lazos.

<u>Definición:</u>

Un multígrafo dirigido G = (V, E) consta de V, un conjunto no vacío de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} / u, v \in V\}$*. Se dice que las aristas* e_1 *y* e_2 *son aristas múltiples si* $f(e_1) = f(e_2)$*.*

El siguiente es un ejemplo de multígrafo dirigido.



Obsérvese que las aristas dirigidas múltiples están asociadas a un mismo par de vértices. No obstante se dice que (u, v)es una arista del grafo G = (V, E) si hay al menos una arista e con $f(e) = (u, v)$. No se hará distinción entre la arista e y el par ordenado (u, v) asociado, a no ser que la identidad de alguna de las aristas múltiples, en particular, sea importante. La siguiente tabla resume las características de los diferentes tipos de grafos, definidos anteriormente.

Tipos	Aristas	¿Aristas múltiples?	¿Bucles?
Simple	No dirigidas	No	No
Multígrafo	No dirigidas	Si	No
Pseudografo	No dirigidas	Si	Si
Grafo dirigido	Dirigidas	No	Si

Multígrafo dirigido	Dirigidas	Si	Si

La palabra "grafo" se utilizará para describir grafos con aristas dirigidas o no dirigidas, con o sin bucles y aristas múltiples.

Los términos grafos no dirigidos o pseudografos, se utilizaran, para indicar grafos no dirigidos que pueden tener aristas múltiples y bucles.

El adjetivo dirigido se usará para referirse a grafos cuyas aristas estén asociadas a pares ordenados o bien se usará el término dígrafo.

3.- TERMINOLOGÍA EN TEORÍA DE GRAFOS

Debido a que el interés por la teoría de grafos es relativamente reciente y a que tiene aplicaciones en muy diversas disciplinas, se emplean muchas terminologías distintas. Por esta razón se introducirá a continuación, la terminología básica aquí utilizada; sugiriéndose que al consultar alguna bibliografía, se asegure que sentido se le da exactamente a los distintos términos utilizados en dicha bibliografía.

3.1.- TERMINOLOGÍA BÁSICA

Se verá a continuación la terminología que describe los vértices y aristas de grafos no dirigidos.

Definición:

Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido G, son adyacentes si $\{u, v\}$ es una arista de G. Si $e = \{u, v\}$ se dice que la arista e es incidente con los vértices u y v. Se dice que los vértices u y v son extremos de la arista e.

Para determinar cuántas aristas son incidentes en un vértice, se introduce la siguiente definición:

Definición:

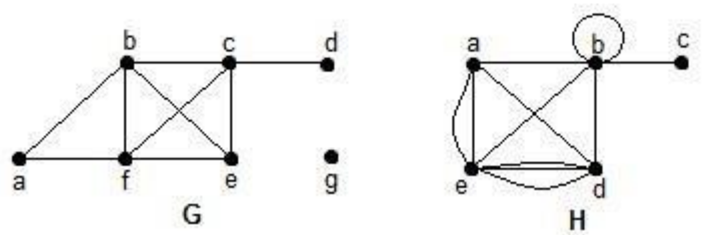
El grado de un vértice de un grafo no dirigido G, es el número de aristas incidentes en él, exceptuando los bucles, cada uno de los cuales contribuye con dos unidades al grado del vértice. El grado del vértice v se denota por $\delta(v)$.

Ejemplo:

Compruébese que en los grafos G y H se cumple que:

En G: $\delta(a) = 2, \delta(b) = \delta(c) = \delta(f) = 4, \ \delta(d) = 1, \delta(e) = 3 \ \ y \ \delta(g) = 0.$

En H: $\delta(a) = 4, \delta(b) = \delta(e) = 6, \delta(c) = 1 \ y \ \delta(d) = 5.$



A los vértices de grado cero se los llama vértices aislados. Claramente un vértice aislado no es adyacente a ningún otro vértice. Un ejemplo es el vértice g del grafo G. Se dice que un vértice es una hoja, si y sólo si tiene grado 1. Por lo tanto una hoja es adyacente a exactamente un vértice distinto de ella. Un ejemplo es el vértice d del grafo G.

¿Qué sucede cuando se suman los grados de todos los vértices de un grafo no dirigido G = (V, E)?

Cada arista contribuye con dos unidades a la suma de los grados de los vértices, ya que incide en dos de ellos (con la posibilidad de que sean iguales). Esto significa que la suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas. Esto se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1:

La suma de los grados $\delta(v)$ para todos los vértices v de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es el doble del número de aristas.

Sea $G = (V, E) \implies \sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \mid E \mid$

Nótese que esto es válido incluso cuando hay aristas múltiples y bucles en el grafo.

Demostración

Como $\delta(v_i)$ es el número de aristas que tienen al vértice v_i por extremo, entonces en la siguiente sumatoria:

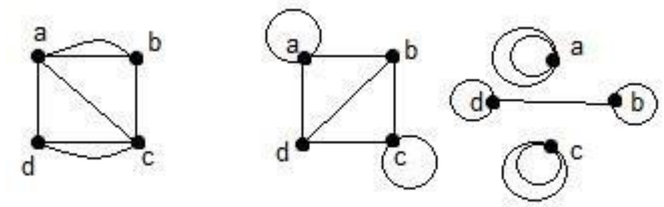
$\sum_{v \in V} \delta(v) = \delta(v_1) + \delta(v_2) + \ldots + \delta(v_n)$ se cuentan todas las aristas del grafo, pero dos veces, puesto que toda arista tiene dos vértices en los extremos. Es decir que la arista $\{v_i, v_j\}$ está contada dos veces, una en $\delta(v_i)$ y otra en $\delta(v_j)$, por lo tanto se puede afirmar que:

$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \mid E \mid$. Quedando así, demostrado el teorema.

Ejemplo:

Los grados de un grafo de cuatro vértices son: $\delta(a) = \delta(c) = 4 \ \ y \ \ \delta(b) = \delta(d) = 3$. ¿Cuántas aristas tiene el grafo? Representar un grafo que cumpla con estas condiciones.

Como la suma de los grados de los vértices es 14, se sigue que el grafo tiene siete aristas. Algunos de los posibles grafos que cumplen las condiciones establecidas, son los siguientes:



El teorema 1 indica que la suma de los grados de los vértices de un grafo no dirigido es un número par. Este hecho trae diversas consecuencias, una de las cuales se da en el siguiente teorema.

Teorema 2:

Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración

Sean V_P y V_I el conjunto de vértices de grado par y el conjunto de vértices de grado impar, respectivamente, de un grafo no dirigido $G=(V,E)$. Entonces

$2\mid E\mid=\sum_{v\in V}\delta(v)=\sum_{v\in VP}\delta(v)+\sum_{v\in VI}\delta(v)$.

Como $\delta(v)$ es par si $v\in V_P$ el primer sumando de la última igualdad es par. Además, la suma de los dos sumandos de dicho término es par, puesto que esa suma es $2\mid E\mid$. Por lo tanto el segundo sumando también es par. Como todos los términos que se suman en ese segundo sumando son impares, tiene que haber un número par de ellos. Por lo tanto hay un número par de vértices de grado impar, quedando demostrado así el teorema.

Particularmente, si los grados de todos los vértices de un grafo son iguales, se dice que el grafo es regular.

Por otro lado, para el caso de grafos dirigidos, la terminología refleja el hecho de que a las aristas de estos grafos se les asigna un sentido.

Definición:

Si (u,v) es una arista del grafo dirigido G, se dice que u es adyacente a v y que v es adyacente desde u. El vértice u se llama vértice inicial de la arista y v vértice final. Los vértices inicial y final de un bucle coinciden.

Como las aristas de un grafo dirigido son pares ordenados, se puede refinar la definición de grado de un vértice con el propósito de reflejar el número de aristas que tienen a ese vértice como vértice inicial o como vértice final.

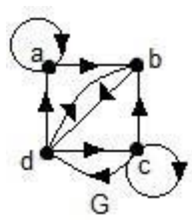
Definición:

En un grafo dirigido el grado de entrada de un vértice v, denotado por $\delta^-(v)$, es el número de aristas que tienen a v como vértice final. El grado de salida de un vértice v, denotado por $\delta^+(v)$, es el número de aristas que tienen a v como vértice inicial.

Nótese que un bucle contribuye con una unidad tanto al grado de entrada como al de salida del vértice correspondiente.

Ejemplo:

Sea el grafo dirigido G, compruébese que en el mismo se cumple lo siguiente.
Los grados de entrada son: $\delta^{-}(a) = 2, \delta^{-}(b) = 3, \delta^{-}(c) = 2 \;\; y \;\; \delta^{-}(d) = 2$
Los grados de salida son: $\delta^{+}(a) = 2, \delta^{+}(b) = 1, \delta^{+}(c) = 3 \;\; y \;\; \delta^{+}(d) = 3$



Como cada arista tiene un vértice inicial y uno final, la suma de los grados de entrada y la suma de los grados de salida de todos los vértices de un grafo dirigido coinciden. Ambas sumas son iguales al número de aristas que tiene el grafo. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3:

Sea $G = (V, E)$ *un grafo dirigido, entonces* $\sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = |\, E \,|$

Particularmente, un grafo dirigido es regular si para todo vértice de V se cumple: $\delta^{-}(v) = \delta^{+}(v) = \delta$

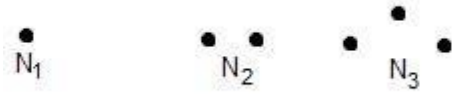
Hay muchas propiedades de un grafo dirigido que no dependen de la dirección de sus aristas. En consecuencia, a veces es conveniente ignorar esas direcciones. El grafo no dirigido que resulta de ignorar las direcciones de las aristas se llama grafo no dirigido subyacente. Un grafo dirigido y su grafo no dirigido subyacente tienen el mismo número de aristas.

3.2.- Clases especiales de grafos simples.

Algunos grafos han adquirido nombres que se podría decir son estándares, porque aparecen de forma frecuente en muchas aplicaciones. Se introducirá a continuación varias clases de grafos simples.

Grafos Nulos

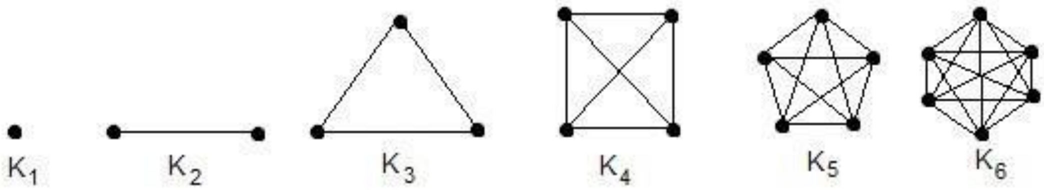
Si n es un entero positivo, el grafo nulo, denotado por N_n es el grafo que tiene por conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, . . ., v_n\}$ y ninguna arista. Se muestran a continuación los grafos nulos N_1, N_2 y N_3.



Grafos completos

Sea n un entero positivo, el grafo completo de n vértices, que se denota por K_n, es el grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Se muestran a continuación los grafos completos K_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.



Por la característica de los grafos completos, es fácil determinar el número de aristas que posee.

Teorema 4:

Un grafo completo de n vértices tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ *aristas.*

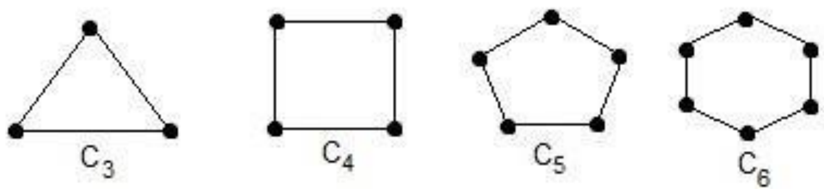
Demostración

En efecto, cada uno de los n vértices está conectado a los otros $(n-1)$; o sea que habría $n(n-1)$ aristas. Pero cada vértice se cuenta, de esta forma, dos veces. Por lo tanto el número de aristas es $\frac{n(n-1)}{2}$ que es lo que se quería demostrar.

Ciclos

Si n es un entero mayor o igual que 3, el ciclo n denotado por C_n es un grafo simple que tiene por conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, . . ., v_n\}$ y por conjunto de aristas $E = \{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, . . ., \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$

Se muestran a continuación los ciclos C_n para $n = 3, 4, 5$ y 6.

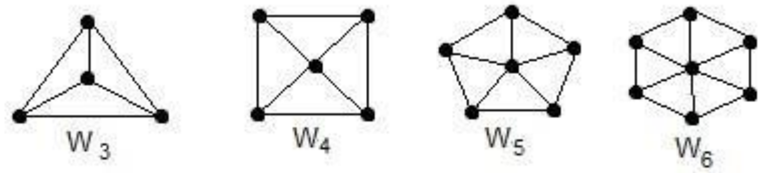


Ruedas

Se obtiene el grafo rueda, denotado por W_n ($n \geq 3$), al añadir un vértice adicional al Ciclo C_n y conectar este nuevo vértice a cada uno de los vértices del ciclo C_n mediante n nuevas aristas.

Nótese que el grafo rueda W_n tiene $(n+1)$ vértices ya que se define este tipo de grafo a partir del grafo ciclo C_n.

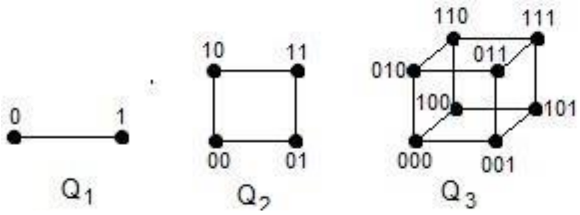
Se muestran a continuación los grafos ruedas W_n para $n = 3, 4, 5$ y 6.



n–Cubos

El cubo n–dimensional o $n-\ cubo$ denotado por Q_n es el grafo cuyos vértices representan las 2^n cadenas de bits de longitud n. Dos vértices son adyacentes si y sólo si, las cadenas de bits a las que representan difieren exactamente en un bit.

Se muestran a continuación los grafos Q_n para $n = 1, 2\ \ y\ \ 3$.



Nótese que se puede construir el $(n+1) - cubo$, Q_{n+1}, a partir del $n - cubo$, Q_n haciendo dos copias de Q_n, anteponiendo un cero a cada una de las etiquetas de los vértices de una de las copias de Q_n, anteponiendo un 1 en la otra copia y añadiendo aristas que conecten dos vértices cuyas etiquetas se diferencien en el primer bit. Es decir que Q_3 se construye a partir de Q_2 y este a partir de Q_1.

3.3.- Grafos Bipartitos.

Diversos problemas de Análisis Combinatorio consisten en determinar la cantidad de elementos de un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos, que cumplan una cierta relación. Dar una relación R entre dos conjuntos A y B es equivalente a dar un grafo bipartito[1]. Así dados $x \in A,\ \ y \in B$ se dice que x está relacionado con $y,\ \ x\ R\ y$, si y sólo si $\{x, y\}$ es una arista del grafo. Es evidente que el grafo así definido es bipartito ya que no hay relaciones entre los elementos de un mismo conjunto.

En otras palabras, hay ocasiones en las que un grafo tiene la propiedad de que su conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos tales que cada arista conecta un vértice de uno de esos subconjuntos con un vértice del otro subconjunto.

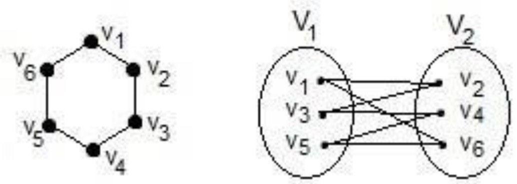
Definición:

Se dice que un grafo simple G es bipartito si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos subconjuntos disjunto V_1 y V_2 tales que cada arista del grafo conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de V_1 ni tampoco dos vértices de V_2).

[1] Que está constituido por dos partes o que se establece entre dos partes.

Ejemplo:

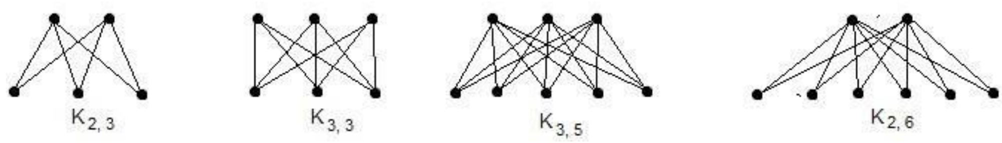
El grafo C_6 es bipartito ya que su conjunto de vértice puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}\ y\ V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ y cada arista de C_6 conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2.



El grafo K_3 no es bipartito. Nótese que si se parte el conjunto de vértices de K_3 en dos subconjuntos disjuntos, uno de los dos subconjuntos debe contener dos vértices. Si el grafo fuese bipartito, esos dos vértices no podrían estar conectados por ninguna arista, pero en K_3 cada vértice está conectado con cualquier otro vértice por medio de una arista.

¿Cómo determinar rápidamente si un grafo es bipartito o no? Un grafo es bipartito si y sólo si, se pueden colorear los vértices del grafo con dos colores de modo que ningún par de vértices adyacentes sean del mismo color.

El grafo bipartito completo $K_{m,n}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices está formado por dos subconjuntos con m y n vértices, respectivamente y hay una arista entre dos vértices si y sólo si un vértice esta en el primer subconjunto y el otro vértice está en el segundo subconjunto. Se muestran a continuación los grafos bipartitos completos $K_{2,3}, K_{3,3}, K_{3,5}, y\ \ K_{2,6}$



Aplicando principios del Análisis Combinatorio se puede establecer que si G es un grafo bipartito, entonces $\sum_{v\in V1} \delta(v) = \sum_{v\in V2} \delta(v) = |\ E\ |$.

Este resultado indica que la suma de los grados de los vértices de ambos subconjuntos son iguales y este número coincide con el número de aristas. Esto es fácilmente comprobable en los grafos bipartitos completos representados anteriormente.

3.4.- SUBGRAFOS

Hay ocasiones en las que solo se necesitan parte de un grafo para resolver un problema. En este caso, en un grafo dado se pueden eliminar algunos vértices y suprimir todas las aristas que son incidentes con alguno de los vértices descartados. Una vez eliminados esos vértices y aristas del grafo, sin eliminar ningún extremo de las aristas que quedan, se obtiene un grafo con menos aristas y vértices. Se dice que este grafo es un subgrafo del grafo original.

Definición:

Un subgrafo de un grafo G = (V, E) es un grafo H = (V', E') de tal forma que $V' \subseteq V$ *y* $E' \subseteq E$.

Nótese que al pedir que H contenga algunos de los vértices y aristas de G, no se debe llegar a situaciones sin sentido como incluir una arista pero no alguno de sus vértices.

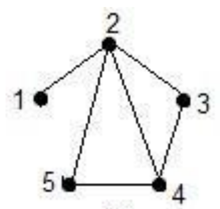
Un par de subgrafos especialmente relevantes son los siguientes:

Dados un par de grafos H y G, se dice que H es un subgrafo abarcador de G si H es un subgrafo de G y además V = V', es decir si H contiene a todos los vértices de G.

Se dice que el subgrafo H = (V', E') de G = (V, E) es un subgrafo inducido por sus vértices $V' \subseteq V$ si su conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyos puntos extremos pertenecen a los vértices en H. Es decir, H tiene como conjunto de vértices a un cierto subconjunto V' de los vértices de G y como conjunto de aristas, a todas aquellas de G cuyos extremos sean vértices de V'.

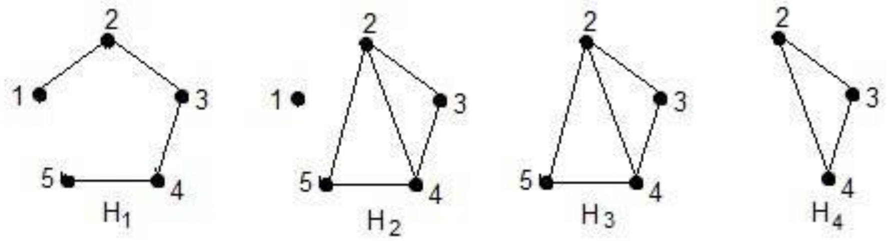
Ejemplo:

Sea el siguiente grafo G, cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mientras que el conjunto de aristas es $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

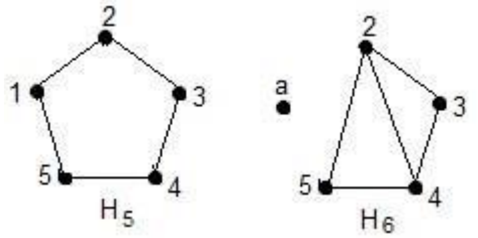


G

Los siguientes cuatros grafos son subgrafos de G.



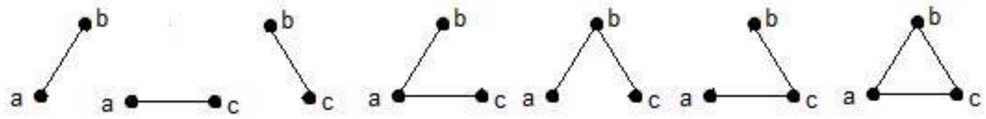
Los grafos H_1 y H_2 son además, subgrafos abarcadores de G porque incluyen a todos los vértices de G. El grafo H_3 es el subgrafo inducido de G para el subconjunto de vértices $\{2, 3, 4, 5\}$ y el grafo H_4 para los vértices $\{2, 3, 4\}$. Por el contrario los dos siguientes grafos no son subgrafo de G.



El grafo H_5 porque incluye una arista $\{1,\ 5\}$ que no está en G y el H_6 porque su conjunto de vértices no es un subconjunto de los vértices de G.

¿Cuántos grafos distintos se pueden construir que tengan como conjunto de vértices al conjunto $V = \{1, 2,\ \ .\ .\ .\ n\}$.

Primero se puede calcular cuantas aristas se pueden construir con los n vértices.
Las aristas son subconjuntos de dos elementos cada una, extraidas del conjunto $V = \{1, 2,\ \ .\ .\ .\ n\}$ o sea las combinaciones de n elementos tomados de a dos, es decir $\binom{n}{2}$ Por lo tanto el conjunto de aristas es $\{1,\ 2,\ \ .\ .\ .\ \binom{n}{2}\}$
Ahora el número de grafos distitnos con vértices $\{1, 2,\ \ .\ .\ .\ n\}$. Son los subconjuntos que se pueden formar con $\{1,\ 2,\ \ .\ .\ .\ \binom{n}{2}\}$ o sea $2^{\binom{n}{2}}$
Si $n = 3$ (vértices) el número de aristas será $\binom{3}{2} = 3$ Si los vetices son $\{a, b, c\}$ las aristas seran $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ y se podrán cosntruir $2^3 = 8$ grafos distintos.



El octavo grafo seria el grafo vacío, o sea $G = (V, E)$ con $V = \emptyset\ \ y\ \ E = \emptyset$

Si $n = 4$ habría $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ grafos distintos y si $n = 7$ habría (2^{21}) 2.097.152 grafos.

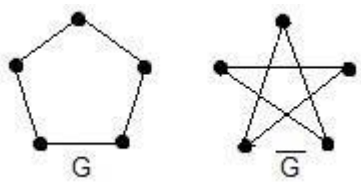
La idea de subgrafo permite, de una forma sencilla, desarrollar el concepto de grafo complementario.

Definición:

Sea G un grafo simple. El grafo complementario de G, que se denota $\overline{G}$, es el subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y todas las aristas del grafo completo K_n que no están en G.

De esta manera si dos vértices están conectados en G, no lo están en $\overline{G}$ y viceversa.

Ejemplo:



¿Cuál es el grafo complementario de K_n?

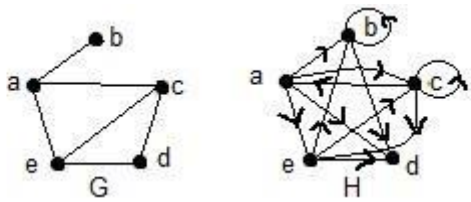
Es el grafo con n vértices y ninguna arista.

4.- REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

Una forma de representar grafos, sin aristas múltiples, es enumerar todas sus aristas. Otra forma, es utilizar listas de adyacencia, que especifican los vértices que son adyacentes a cada uno de los vértices del grafo.

Ejemplo:

Sean el grafo simple G y el grafo dirigido H.



Las listas de adyacencia para estos grafos son las siguientes:

Grafo G	
Vértices	Vértices adyacentes
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Grafo H	
Vértice inicial	Vértice final
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Ejecutar algoritmos para grafos cuya representación es por medio de listas de aristas o listas de adyacencias, puede resultar complicado si el grafo tiene muchas aristas. Para simplificar los cálculos, conviene representar los grafos por medio de matrices. Se utilizan, por lo general, dos tipos de matrices. Una se basa en la adyacencia de vértices y la otra en la incidencia entre vértices y aristas.

4.1.- MATRICES DE ADYACENCIA

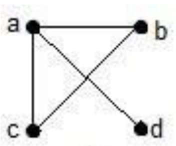
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$. Supóngase que los vértices de G se enumeran arbitrariamente como $v_1, v_2, \ . \ . \ . \ v_n$. La matriz de adyacencia A_G de G con respecto a ese listado de los vértices, es la matriz booleana $n\ x\ n$ que tiene un 1 en la posición (i, j) si v_i, v_j son adyacentes, si los vértices no son adyacentes tiene un 0. En otras palabras:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con #V = n, entonces la matriz de adyacencia es $A^{n}{}_{G}{}^{x\,n} = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; \{v_i, \; v_j\} \; es \; una \; arista \; de \; G \\ \quad 0 \; en \; caso \; contario \end{cases}$

Nótese que la matriz de adyacencia de un grafo depende del orden elegido para los vértices. Los n vértices pueden ordenarse (permutaciones) de $n!$ formas distintas, por lo tanto para un mismo grafo de n vértices hay $n!$ matrices distintas que lo representan.

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente grafo G.



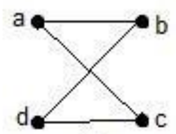
G

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando una ordenación arbitraria de los vértices por ejemplo: a, b, c y d la matriz que representa al grafo G es A_G.

Dibujar un grafo H que tenga por matriz de adyacencia a A_H

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



H

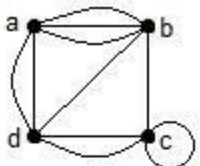
Respecto a la ordenación: a, b, c, d de los vértices, el grafo es H.

Nótese que tanto G como H son grafos simples, por lo tanto puede calcularse el grado de un vértice sumando los unos de la fila o columna que corresponden a ese vértice.

Las matrices de adyacencia pueden usarse también para representar grafos no dirigidos con bucles y con aristas múltiples. Un bucle en el vértice a_i se representa por medio de un 1 en la posición $(i, \; i)$ de la matriz de adyacencia. Cuando existen aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana debido a que el elemento en la posición (i, j) de esta matriz es igual al número de aristas asociada con $\{a_i, a_j\}$. Todos los grafos no dirigidos tienen matrices de adyacencia simétricas.

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente pseudografo G.



G

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

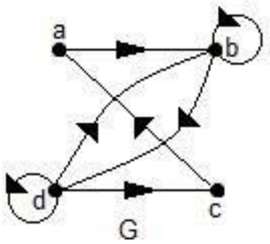
Tomando una ordenación arbitraria de los vértices por ejemplo: a, b, c y d la matriz que representa al grafo G es A_G.

La matriz de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene un 1 en la posición (i, j) si hay una arista de v_i a v_j siendo $v_1, v_2, \ . \ . \ . \ v_n$ un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. En otras palabras, la matriz de adyacencia del grafo dirigido con respecto a esta ordenación de los vértices, será:

$$A_G = [a_{ij}] \ / \ a_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ \{v_i, \ v_j\} \ es \ una \ arista \ de \ G \\ \quad 0 \ \ en \ caso \ contrario \end{cases}$$.

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente grafo G, dirigido.



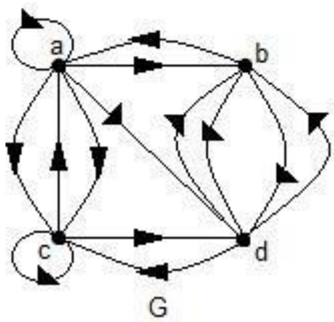
$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de adyacencia de un grafo dirigido no tiene por qué ser simétrica, ya que si hay una arista de a_i a a_j puede no haber una arista de a_j a a_i.

Las matrices de adyacencia se pueden emplear también para representar multígrafos dirigidos. Nuevamente estas matrices ya no son booleanas si hay aristas múltiples en el mismo sentido conectando dos vértices. En la matriz de adyacencia de un multígrafo dirigido, a_{ij} es igual al número de aristas asociadas con (v_i, v_j).

Ejemplo:

Escribir la matriz de adyacencia que representa el siguiente multígrafo G, dirigido.



$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.- MATRICES DE INCIDENCIA

Otra representación de grafos usada frecuentemente es la que emplea matrices de incidencia. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Supóngase que $v_1, v_2, \ . \ . \ . \ v_n$ son los vértices y que $e_1, e_2, \ . \ . \ . \ e_m$ son las aristas de G. Entonces la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz M de orden n x m dada por:

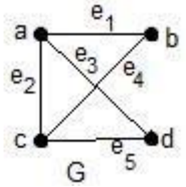
$$M_G{}^{nxm} = \left[m_{ij}\right] \ / \ m_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ la \ arista \ e_j \ es \ incidente \ con \ v_i \\ \qquad 0 \ en \ caso \ contrario \end{cases}$$

Nótese que la matriz tiene tantas filas como elementos tiene V y tantas columnas como elementos tiene el conjunto E.

En las matrices de incidencia se debe tener en cuenta que los dos conjuntos, V y E deben tener un determinado orden.

Ejemplo:

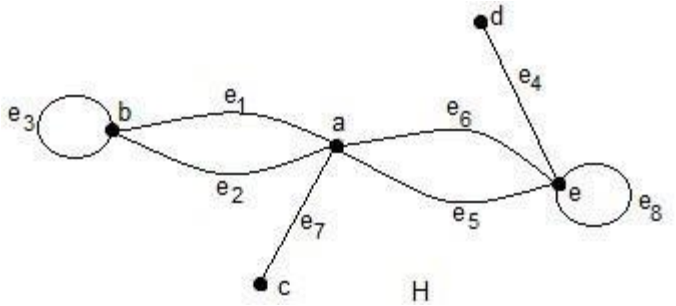
Escribir la matriz de incidencia que representa el siguiente grafo G.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \\ M_G = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tomando una ordenación arbitraria de los vértices por ejemplo: a, b, c, d y de las aristas: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, la matriz que representa al grafo G es M_G.

Escribir la matriz de incidencia que representa el siguiente pseudografo H.



Tomando una ordenación arbitraria de los vértices por ejemplo: a, b, c, d, e y de las aristas: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 la matriz que representa al pseudografo H es M_H.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} & \\ & M_H = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las matrices de incidencia permiten representar aristas múltiples y bucles. Nótese que las aristas múltiples se representan en la matriz de incidencia mediante columnas con todos sus elementos iguales, puesto que dichas aristas son incidentes en el mismo par de vértices. Los bucles se representan por medio de una columna con un único elemento igual a 1, que corresponde al vértice con el que es incidente el bucle.

Compruébese que en las matrices de incidencia al sumar los elementos de cada una de las filas, se obtiene el grado de los vértices y al sumar las columnas es posible distinguir cuando se trata de un lazo ya que la suma es 1. Cuando no se trata de lazos, la suma es 2.

4.3.- Isomorfismo de Grafos

Evidentemente lo importante de un grafo no son los nombres de los vértices ni su representación gráfica o cualquier otra representación. La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están unidos por las aristas, se podría llamar a esto la estructura de un grafo. Se dispone de una terminología muy útil para los grafos que tienen la misma estructura.

Definición:

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ *son isomorfos*[2] *si hay una función biyectiva f de* V_1 en V_2 *con la propiedad de que, para cada par de vértices* u y $v \in V_1$, u y v *son adyacentes en* G_1 *si y sólo si* $f(u)$ y $f(v)$ *son adyacentes en* G_2*. Se dice que esta función f es un isomorfismo.*

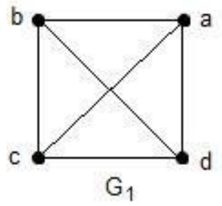
O sea que:

$$G_1 \simeq G_2 \Leftrightarrow \exists\, f: V_1 \longrightarrow V_2 \;/\; \begin{cases} f \text{ es biyectiva} \\ \{u,\ v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u),\ f(v)\} \in E_2 \end{cases}$$

En otras palabras, cuando dos grafos son isomorfos, hay una función biyectiva entre los vértices de los dos grafos que preserva la adyacencia. El isomorfismo de grafos simples es una relación de equivalencia.

Ejemplo:

Construir un grafo isomorfo, al grafo G_1



Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ el grafo dado y $G_2 = (V_2, E_2)$ el grafo buscado. Por lo tanto $V_1 = \{a, b, c, d\}$ y $E_1 = \{\{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ d\},\ \{b,\ c\},\ \{b,\ d\},\ \{c,\ d\}\}$ son el conjunto de vértices y aristas, respectivamente, de G_1

Se debe construir una función f entre los conjunto de vértices, que sea biyectiva. Por lo tanto V_2 debe tener el mismo número de vértices que V_1 es decir cuatro. Se puede escribir: $V_2 = \{a',\ b',\ c',\ d'\}$.

Por otra parte f debe conservar la adyacencia, es decir que se debe cumplir

[2] La palabra isomorfismo tiene raíces griegas: isos (iguales), morfos (forma), isomorfismo: igual forma.

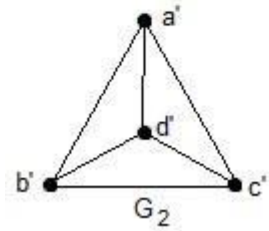
$$\begin{cases} f(\{a,b\}) \in E_2 \\ f(\{a,c\}) \in E_2 \\ f(\{a,d\}) \in E_2 \\ f(\{b,c\}) \in E_2 \\ f(\{b,d\}) \in E_2 \\ f(\{c,d\}) \in E_2 \end{cases}$$

Cuestión que se consigue sin más que definir:

$$f: V_1 \to V_2 : \begin{cases} f(a) = a' \\ f(b) = b' \\ f(c) = c' \\ f(d) = d' \end{cases}$$

Es decir que en $G_2,\ es\ E_2 = \{\{\{a',\ b'\},\ \{a',\ c'\},\ \{a',\ d'\},\ \{b',\ c'\},\ \{b',\ d'\},\ \{c',\ d'\}\}$ el conjunto de aristas.

Una representación grafica de G_2 puede ser la siguiente



Por lo general es difícil determinar si dos grafos simples son o no isomorfos, ya que hay $n!$ posibles biyecciones entre los conjuntos de vértices de dos grafos simples de n vértices. Intentar comprobar si cada una de estas funciones preserva o no la adyacencia, es un método poco práctico cuando n es grande.

A pesar de esto, con frecuencia se puede demostrar que dos grafos simples no son isomorfos demostrando que no comparten alguna propiedad que dos grafos isomorfos deberían tener en común. A tales propiedades se las llama “invariantes bajo isomorfismo de grafos simples”.

<u>Definición:</u>

Un invariante de un grafo G es un número asociado con G que tiene el mismo valor para cualquier grafo que sea isomorfo con él.

Por ejemplo:

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices ya que hay una función biyectiva entre los conjuntos de vértices de los grafos.

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de aristas, porque la función biyectiva entre los conjuntos de vértices establece una biyección entre las aristas.

Los grados de los vértices en grafos simples isomorfos deben ser los mismos. Es decir, un vértice v de grado d en G_1 se corresponde con un vértice $f(v)$ de grado d en G_2, ya que un vértice w en G_1 es adyacente a v sí y sólo si $f(v)$ y $f(w)$ son adyacentes en G_2.

Dado un grafo simple G, el grado de cualquiera de sus vértices es un invariante de G.

Demostración

Sean G_1, G_2 dos grafos simples y f un isomorfismo entre ambos. Si u es un vértice arbitrario de G_1 entonces $\delta(u) = \delta(f(u))$.

En efecto como f es una biyección que conserva la adyacencia, el número de vértices adyacentes a u en G_1 debe ser el mismo que el número de vértices adyacentes a $f(u)$ en G_2, por lo tanto el número de aristas con extremo en u debe coincidir con el número de aristas con extremo en $f(u)$ y, consecuentemente, sus grados serán iguales.

Las siguientes propiedades de los grafos, también son invariantes bajo isomorfismo de grafos simples:

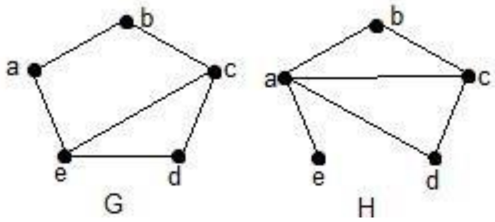
Si dos grafos son isomorfos, también lo son los correspondientes subgrafos. Por ejemplo si el grafo G_1 contiene un subgrafo completo K_n y G_2 es isomorfo a G_1 entonces G_2 contiene un subgrafo K_n

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si, sus grafos complementarios son isomorfos.

Si cualquiera de las cantidades o propiedades anteriores difieren en dos grafos simples, éstos no pueden ser isomorfos. Sin embargo, nótese que si estas cantidades o propiedades coinciden para dos grafos, esto no necesariamente significa que los grafos sean isomorfos. En realidad, no se conoce ningún conjunto de invariantes que pueda usarse para determinar si dos grafos simples son o no isomorfos.

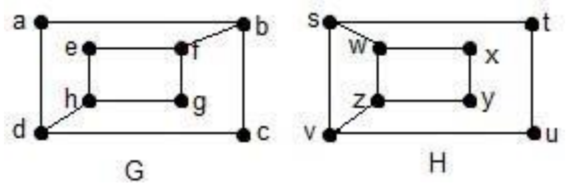
Ejemplo:

Se muestra a continuación los grafos G y H. ¿Son isomorfos?



Tanto G como H tienen cinco vértices y seis aristas. Sin embargo G no tiene ningún vértice de grado uno, mientras que H si lo tiene, por lo tanto no son grafos isomorfos.

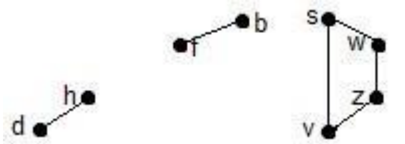
Se muestra a continuación los grafos G y H. ¿Son isomorfos?



Ambos grafos, G y H tienen ocho vértices y diez aristas. Ambos tienen cuatro vértices de grado dos (a, c, e, g en G y t, u, x, y en H) y cuatro de grado tres. (b, d, f, h en G y s, v, w, z en H). Como todos estos invariantes coinciden, se puede conjeturar que estos grafos son isomorfos. Sin embargo G y H no son isomorfos. Nótese que como $\delta(a) = 2$ en G, el vértice a debería corresponder a uno de los vértices: t, u, x ó y de H ya que éstos son los vértices de grado dos. Pero cada uno de estos cuatros vértices es adyacentes a un vértice de grado dos y otro de grado tres, en H. Esto no es cierto para el vértice a en G ya que es adyacente a dos vértices de grado tres.

Otra forma de ver que G y H no son isomorfos es observar que los subgrafos de G y de H formados por sus vértices de grado tres y por las aristas que los conectan deberían ser isomorfos.

Sin embargo estos subgrafos no son isomorfos, como se puede observar a continuación.



Para demostrar que una función f del conjunto de vértices del grafo G_1 en el conjunto de vértices del grafo G_2 es un isomorfismo, se debe demostrar que f preserva las adyacencias. Una manera apropiada de hacerlo es usando matrices de adyacencia.

Teorema 5:

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si y sólo si, para algún orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.

Demostración

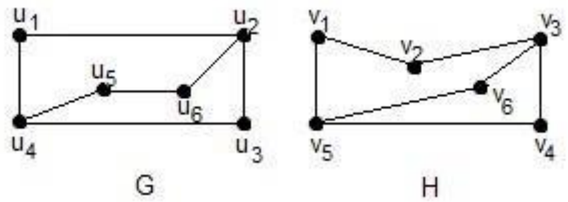
Supóngase que G_1 y G_2 son isomorfos. Entonces existe una función f *biyectiva de* V_1 *en* V_2 *con la propiedad de que, para cada par de vértices* u y $v \in V_1$, u y v *son adyacentes* G_1 *si y sólo si* $f(u)$ y $f(v)$ *son adyacentes en* G_2.

Sea $v_1, v_2, \ldots v_n$ un orden de los vértices de G_1. Sea A_{G1} la matriz de adyacencia de G_1, relativa a ese orden de los vértices. Sea A_{G2} la matriz de adyacencia de G_2 relativa al orden $f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_n)$. Supóngase que el elemento de la fila i y la columna j $(i \neq j)$ de M_{G1} es igual a k. Entonces existen k aristas, $e_1, e_2, \ldots e_k$ incidentes en v_i y v_j. Por lo tanto, hay exactamente k aristas $f(e_1), f(e_2), \ldots f(e_k)$ incidentes en $f(v_i)$ y $f(v_j)$ en G_2. Entonces el elemento en la fila i columna j en M_{G_2} que cuenta el número de aristas que inciden en

$f(v_i)\ y\ f(v_j)$ también es igual a k. Con un argumento similar se puede demostrar que los elementos de las diagonales de $A_{G_1}\ y\ A_{G_2}$ son iguales. Por lo tanto se concluye que $M_{G_1} = M_{G_2}$ La argumentación del reciproco "*Si las matrices de adyacencia de dos grafos $G_1\ y\ G_2$ para algún ordenamiento de sus vértices son iguales, entonces los grafos son isomorfos*" es similar.

Ejemplo:

Determinar si los grafos G y H que se muestran a continuación, son o no isomorfos.



Tanto G como H tienen seis vértices y siete aristas. Ambos tienen cuatro vértices de grados dos y dos vértices de grado tres. También es fácil ver que los subgrafos de G y H formados por los vértices de grados dos y las aristas que los conectan son isomorfos. Como G y H tienen estos invariantes en común, es razonable tratar de encontrar un isomorfismo f .

Se puede determinar una función f y luego determinar si es o no un isomorfismo.
Como $\delta(u_1) = 2$ y u_1 no es adyacente a ningún otro vértice de grado dos, la imagen de u_1 tiene que ser o bien v_4 ó v_6 que son los únicos vértices de grados dos en H que no son adyacentes a ningún otro vértice de grado dos. Se asigna arbitrariamente $f(u_1) = v_6$. Si se observará que esto no conduce a un isomorfismo, se puede intentar luego con $f(u_1) = v_4$. Como u_2 es adyacente a
u_1, las posibles imágenes de u_2 son v_3 ó v_5. Se asigna arbitrariamente $f(u_2) = v_3$. Si se sigue de esta manera tomando como guía la adyacencia de vértices y los grados, se puede asignar
$f(u_3) = v_4,\ f(u_4) = v_5,\ f(u_5) = v_1,\ f(u_6) = v_2$. Quedando de esta manera definida la función biyectiva entre el conjunto de vértices de G y el conjunto de vértices de H.
$f\,(u_1) = v_6,\ f(u_2) = v_3,\ f(u_3) = v_4,\ f(u_4) = v_5,\ f(u_5) = v_1,\ f(u_6) = v_2$
Para ver si f preserva o no la adyacencia, se examina la matriz de adyacencia de G,

$$A_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

y la matriz de adyacencia de H con

$$A_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

sus filas y sus columnas etiquetadas con las imágenes de los vértices correspondientes de G.

Como $A_G = A_H$ se sigue que f preserva las adyacencias. Se concluye que f es un isomorfismo, de modo que G y H son isomorfos. Nótese que si f no hubiese resultado un isomorfismo, no se podría haber establecido que G y H no son isomorfos, ya que podría haber alguna otra correspondencia entre los vértices de G y de H que sí fuese un isomorfismo.

Los mejores algoritmos para determinar si dos grafos son o no isomorfos tienen complejidad exponencial (en el número de vértices de los grafos) en el peor caso. No obstante se conocen algoritmos de complejidad polinómica en el caso promedio que resuelven el problema.

5. Conexión de grafos

Diversos problemas se pueden representar por medio de caminos que se forman al ir recorriendo las aristas de un grafo. Por ejemplo los problemas de planificar de forma eficiente las rutas de distribución de correo, de recogida de basura, los diagnósticos en redes de computadoras, determinar si se puede enviar o no un mensaje entre dos computadoras usando enlaces intermedios, entre otros tantos, se pueden resolver utilizando modelos que involucran caminos definidos sobre grafos.

Definición:

Sea G un grafo no dirigido. Un camino de longitud n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ *del vértice u al vértice v en G es una secuencia de n aristas* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *de G tal que* $f(a_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(a_2) = \{x_1, x_2\} \ldots f(a_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$ *de tal forma que* $x_0 = u$ *y* $x_n = v$. *Si el grafo es simple, se denota el camino por la secuencia de vértices* $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$.

Es decir que un camino es una secuencia de aristas que comienza en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas de él, siempre conectando pares de vértices adyacentes.

Otros términos relacionados con caminos, son circuitos y la denominación de éstos al recorrer o no, dos veces la misma arista.

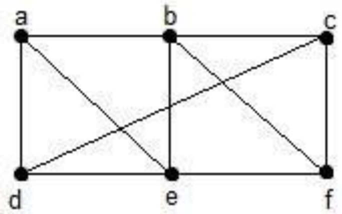
Definición:

Sea G un grafo no dirigido, un circuito en G es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y tiene longitud mayor que cero. Se dice que un camino o un circuito pasa por los vértices $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$. *o también que recorre las aristas* a_1, $a_2, \ldots a_n$. *Un camino o un circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.*

Nótese que cuando no es necesario distinguir entre aristas múltiples se puede identificar un camino mediante los vértices por los que pasa. Puede haber más de un camino que pase por esa secuencia de vértices. Nótese también que un camino de longitud cero consiste en un único vértice.

Ejemplo:

Sea el grafo simple que se muestra a continuación.



Obsérvese que en este grafo se cumple:

Secuencia	Camino	Circuito	Aristas	Longitud	Simple
a, d, c, f, e	Si	No	{a, d}, {d, c}, {c, f}, {f, e}	4	Si
d, e, c, a	No	-.-	-.-	-.-	-.-
b, c, f, e, b	Si	Si	{b, c}, {c, f}, {f, e}, {e, b}	4	Si
a, b, e, d, a, b	Si	No	{a, b}, {b, e}, {e, d}, {d, a}, {a, b}	5	No

Para multígrafos dirigidos, las definiciones anteriores son similares.

Definición:

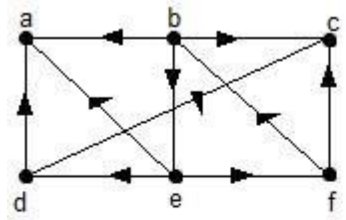
Sea G un multígrafo dirigido. Un camino de longitud n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ *del vértice u al vértice v en G es una secuencia de n aristas* $a_1, a_2, \ . \ . \ . \ a_n$ *de G tal que* $f(a_1) = \{x_0, x_1\}, f(a_2) = \{x_1, x_2\} \ . \ . \ . \ f(a_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$ *de tal forma que* $x_0 = u$ *y* $x_n = v$. *Si no hay aristas múltiples en el grafo dirigido, se denota el camino por la secuencia de vértices* $x_0, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ x_n$. *Un camino de longitud mayor que cero que comienza y termina en el mismo vértice* $(u = v)$ *es un circuito. Se dice que un camino o un circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.*

Nótese que cuando no es necesario distinguir entre aristas múltiples se puede identificar un camino mediante los vértices por los que pasa. Puede haber más de un camino que pase por esa secuencia de vértices.

De manera similar que en los grafos no dirigidos, un camino de longitud cero consiste en un único vértice.

Ejemplo:

Sea el grafo dirigido que se muestra a continuación.



Obsérvese que en este grafo dirigido se cumple:

Secuencia	Camino	Circuito	Aristas	Longitud	Simple
b, e, f, c	Si	No	{b, e}, {e, f}, {f, c}	3	Si
d, a, b, e	No	-.-	-.-	-.-	-.-
b, e, f, b	Si	Si	{b, e}, {e, f}, {f, b}	3	Si
b, e, f, b, e, d	Si	No	{b, e}, {e, f}, {f, b}, {b, e}, {e, d}	5	No

5.1.- Grafos conexos

¿Cuándo una red de área local tiene la propiedad de que cualquier par de computadoras de la misma puede compartir información? Si la red esta modelada mediante un grafo, la pregunta sería en términos de la teoría de grafos, ¿Hay siempre un camino entre cualquier par de vértices del grafo?

Una de las propiedades más elementales de las que puede gozar cualquier grafo es que sea conexo.

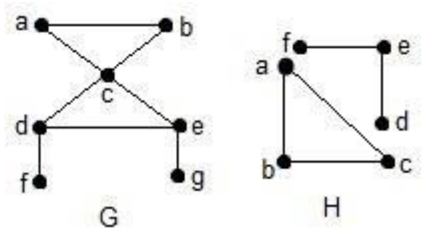
<u>Definición:</u>

Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo. Es decir que:

$G = (V, E)\ es\ conexo \Leftrightarrow \forall\ u, v \in V: \exists\ \pi = \langle u, v\rangle$ *En donde π es un camino que une el vértice u con el v.*

Ejemplo:

Sean los grafos G y H cuyas representaciones se muestran a continuación.



G es un grafo conexo, mientras que H no lo es, ya que por ejemplo no existe un camino entre los vértices a y d.

Para saber exactamente si un grafo es conexo o no, se puede utilizar una condición simple, expresada en términos del número de aristas.

Teorema 6:

Sea n el número de vértices de un grafo. Si el número de aristas es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces el grafo es conexo.

Demostración

Supóngase que hay al menos dos componentes conexas[3] en el grafo. Sea k el número de vértices en una de las componentes y por lo tanto $n-k$ vértices en la otra. El máximo número de aristas cuando hay dos componentes conexas es cuando ambas componentes son grafos completos. Por lo tanto, el número de aristas en el grafo entero es $\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ que no es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Esto es una contradicción, por lo tanto el grafo es conexo.

Obsérvese que si en el grafo hay menos de $n-2$ aristas el grafo no es conexo. Luego cualquier grafo con n vértices debe tener al menos $n-1$ aristas para ser conexo.

Para el caso de los grafos no conexos se puede hacer uso de una relación denominada "estar conectado con" que se establece en el conjunto de los vértices.

Teorema 7:

Dado un grafo no dirigido, la relación "estar conectado con" definida en el conjunto de sus vértices es una relación de equivalencia.

Demostración

Sea el grafo $G=(V,E)$, se define en el conjunto V de sus vértices la relación:

$$u\ R\ v \Leftrightarrow u\ \textit{está conectado con}\ v.$$

Esta relación es de equivalencia.

Sea u un vértice cualquiera de V. Entonces el camino $\pi=\langle u,u\rangle$ conecta a u consigo mismo. Luego $\forall\ u \in V: u\ R\ u$. Esto equivale a decir que la relación es reflexiva.

Sean $u\ y\ v$ dos vértices cualesquiera de V. Entonces:

$$u\ R\ v \Leftrightarrow \exists\ \pi=\langle u,v\rangle \Rightarrow \pi'=\langle v,u\rangle \Leftrightarrow v\ R\ u$$ Luego, $\forall u,v \in V: u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ u$ o sea que la relación es simétrica.

Sean u,v,w tres vértices cualesquiera de V. Entonces

[3] Un grafo que no es conexo es la unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen ningún vértice en común. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama componentes conexas del grafo. En el siguiente apartado se define, más rigurosamente componentes conexas de un grafo.

$$\left.\begin{array}{r} u\ R\ v \Leftrightarrow \exists\ \pi_1 = \langle u,\ v\rangle \\ v\ R\ w \Leftrightarrow \exists\ \pi_2 = \langle v,\ w\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \pi = \langle u,\ w\rangle \Leftrightarrow u\ R\ w$$

Basta con unir los caminos $\pi_1\ y\ \pi_2$ Por lo tanto se puede afirmar que $\forall\, u, v, w \in V\colon u\ R\ v\ \wedge\ v\ R\ w \Longrightarrow u\ R\ w$, es decir que R es transitiva. Por todo lo anterior la relación "estar conectado con" es de equivalencia.

5.2.- Componentes conexas de un grafo

Debido a que la relación "estar conectado con" definida en el conjunto de vértices de un grafo G, es una relación de equivalencia, divide al conjunto en clases de equivalencias, que reciben el nombre de componentes conexas. Así lo establece la siguiente definición.

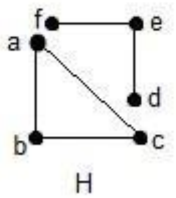
Definición:

Dado un grafo $G = (V, E)$, las clases de equivalencia definidas en el conjunto de vértices, V, por la relación de equivalencia "estar conectado con" reciben el nombre de componentes conexas del grafo G.

Obsérvese que de esta manera un grafo G no conexo, puede ser "partido" por la relación "estar conectado con" en subgrafos conexos que son las citadas componentes conexas de G.

Ejemplo:

Sea el siguiente grafo H.



Su conjunto de vértices es: $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ Si consideramos en este grafo la relación de equivalencia definida anteriormente, las clases de equivalencia serán:

$[\ a\ ] = \{a, b, c\} = [\ b\ ] = [\ c\ ]$ y $[\ d\ ] = \{d, e, f\} = [\ e\ ] = [\ f\ ]$. Por lo tanto el grafo H tiene dos componentes conexas que son los dos subgrafos $H_1\ y\ H_2$ cuyos conjuntos de vértices son $[\ a\ ]\ y\ [\ d\ ]$. Es decir que en:

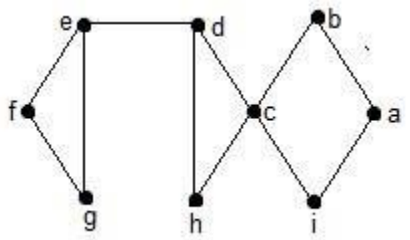
H_1 es $V_1 = \{a, b, c\}\ y\ E_1 = \{\ \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\ \}$ y en H_2 es

$V_2 = \{d, e, f\}\ y\ E_2 = \{\ \{f, e\}, \{e, d\}\ \}$.

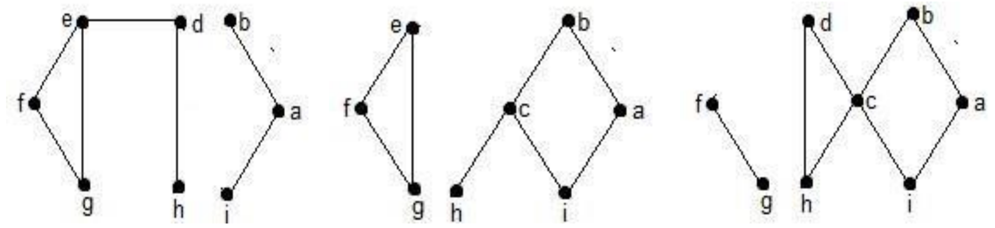
En muchas ocasiones, eliminar un vértice y todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con más componentes conexas que las que tenía el grafo original. A estos vértices se los llama *"vértices de corte"*. Eliminar un punto de corte de un grafo conexo produce un subgrafo que no es conexo. Análogamente, una arista que produce un grafo con más componentes conexas que el grafo original se llama *"arista de corte o puente".*

Ejemplo:

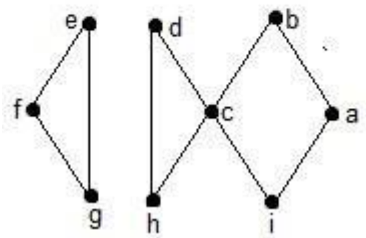
Hallar los vértices de corte y los puentes del grafo dado a continuación.



Los vértices de corte son c, d y e ya que al eliminarlos, juntos con las aristas que inciden en ellos, se producen subgrafos con más componentes conexas que el original. Tal como se puede observar a continuación.



Respecto de los puentes, el unico que existe en el grafo propuesto es la arista que une los vértices d y e ya que en el grafo resultante existen vértices que no están conectados, es decir, no es conexo.



5.3.- Conexión en grafos dirigidos

Hay dos nociones de conexión en grafos dirigidos, dependiendo de si se considera o no la dirección de las aristas.

Definición:

Se dice que un grafo dirigido es fuertemente conexo si hay un camino de u a v y un camino de v a u para cualquier par de vértices u y v del dígrafo.

Es decir, para que un grafo dirigido sea fuertemente conexo debe haber una secuencia de aristas dirigidas desde cualquier vértice del grafo a cualquier otro vértice. Un grafo dirigido puede no ser fuertemente conexo, pero existir al menos un camino entre cualquier par de vértices.

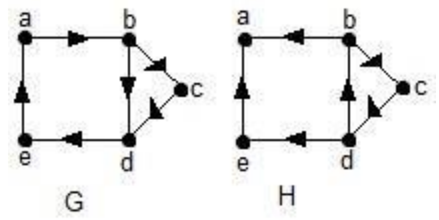
<u>Definición:</u>

Se dice que un grafo dirigido es débilmente conexo si hay un camino entre cada par de vértices del grafo no dirigido subyacente.

Esto es, al ignorar las direcciones de las aristas, hay siempre un camino entre dos vértices cualesquiera del grafo.

Ejemplo:

¿Son fuertemente conexos los grafos dirigidos G y H? ¿Son débilmente conexos?



Compruébese que G es fuertemente conexo, ya que existe un camino entre cada par de vértices de este grafo. Consecuentemente G es también débilmente conexo. El grafo H no es fuertemente conexo ya que por ejemplo no hay un camino dirigido del vértice a hacia el b. Sin embargo, compruébese que H es débilmente conexo porque hay un camino entre cada par de vértices en el grafo no dirigido subyacente de H. El grafo no dirigido de un dígrafo G, es aquel grafo que se obtiene al ignorar las direcciones de las aristas de G.

5.4.- Caminos e isomorfismo de grafos

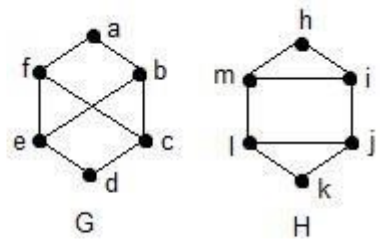
Hay, entre muchas otras, dos formas en las que los caminos y circuitos pueden ayudar a determinar si dos grafos son isomorfos o no. Primero, la existencia de un circuito simple de longitud k, siendo k un entero positivo mayor que dos, es un invariante bajo isomorfismo útil para determinar si dos grafos simples son o no isomorfos. Es decir que la existencia de un circuito simple de una longitud concreta es un invariante útil que se puede emplear a la hora de mostrar que dos grafos no son isomorfos.

En segundo lugar, se puede hacer uso de los caminos a la hora de construir posibles isomorfismos.

Se mostrará estos usos, de los caminos y circuitos, mediante dos ejemplos.

Ejemplos:

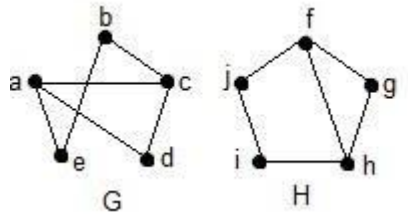
Determinar si los grafos G y H son isomorfos.



Ambos grafos tienen seis vértices y ocho aristas. Además tienen cuatro vértices de grado tres (b, c, e, f para G y para H: i, j, l, m) y dos vértices de grado dos (a, d para G y para H: h, k). Al coincidir estos tres invariantes en ambos grafos se podría sospechar que son isomorfos. Sin embargo, H contiene un circuito simple de longitud tres: h, i, m, h, mientras que G no contiene ningún circuito simple de longitud tres. Compruébese esto, verificándose que todos los circuitos simples de G, tienen al menos longitud cuatro.

Como la existencia de un circuito simple de longitud tres es un invariante bajo isomorfismo, G y H no son isomorfos.

Determinar si los grafos G y H son isomorfos.



Tanto G como H tienen cinco vértices y seis aristas, ambos tienen dos vértices de grado tres (a, c y f, h respectivamente) y tres vértices de grado dos (b, d, e y g, i, j respectivamente) y ambos tienen un circuito simple de longitud tres (a, c, d, a y f, g, h, f respectivamente) un circuito simple de longitud cuatro (a, c, b, e, a y f, h, i, j, f respectivamente) y un circuito simple de longitud cinco (b, c, d, a, e, b y g, h, i, j, f, g respectivamente). Como todos estos invariantes coinciden, G y H pueden ser isomorfos.

Para hallar un posible isomorfismo, se puede seguir caminos que pasen por todos los vértices de manera que los vértices correspondientes tengan el mismo grado en los dos grafos. Por ejemplo los caminos a, d, c, b, e en G y f, g, h, i, j en H pasan por todos los vértices del grafo, comienzan en un vértice de grado tres, pasan por vértices de grado dos, tres y dos respectivamente y acaban en un vértice de grado dos.

Siguiendo estos caminos, uno en cada grafo, se puede definir la función f de la siguiente manera:

$f(a) = f, f(d) = g, f(c) = h, f(b) = i, f(e) = j$. Verifíquese que al definir f de esta forma se mantienen las adyacencias. Otra manera de verificar el isomorfismo es hacer, para las ordenaciones adecuadas de los vértices, las matrices de adyacencia de G y H que deben resultar iguales.

5.5.- El número de caminos entre dos vértices

El número de caminos que hay entre dos vértices de un grafo se puede determinar usando su matriz de adyacencia.

Teorema 8:

Sea G un grafo y sea M_A su matriz de adyacencia con respecto a la ordenación $v_1, v_2, \ . \ . \ . \ v_n$ (se admiten aristas dirigidas o no dirigidas, aristas múltiples y bucles). El número de caminos distintos de longitud n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ de v_i a v_j es igual al elemento que ocupa la posición (i, j) en la matriz $(M_A)^n$.

Demostración

Se demostrara el teorema por inducción matemática.

PB) Para $n = 1$ es $(M_A)^1$es la matriz M_A o sea la matriz de adyacencia del grafo. Entonces por definición de la misma, si $a_{ij} = 1$ hay una arista entre los vértices i y j, es decir que hay un camino de longitud uno entre ambos vértices. En cualquier otro caso $a_{ij} = 0.$ Por lo tanto se verifica el teorema para el primer elemento.

PI) Supóngase que el teorema es cierto para $n = k$, es decir que el elemento en la posición (i, j) de la matriz $(M_A)^k$ es el número de caminos de longitud k de v_i a v_j. Esta es la hipótesis inductiva.

Se debe demostrar que el teorema es cierto para $n = k + 1$. Obsérvese que $(M_A)^{k+1} = (M_A)^k. M_A$ de tal forma que el elemento a_{ij} de $(M_A)^{k+1}$ se obtiene multiplicando los elementos de la i–ésima fila de $(M_A)^k$ por la j–ésima columna de la matriz M_A y sumándolos, es decir que:

$a_{ij} = b_{i1}. c_{1j} + b_{i2}. c_{2j} + \ . \ . \ . \ + b_{in}. c_{nj}.$

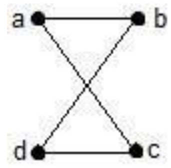
En la expresión anterior, b_{im} es un elemento de $(M_A)^k$ y por hipótesis inductiva es el número de caminos longitud k de v_i a v_m.

Un camino de longitud $k + 1$ de v_i a v_j está formado por un camino de longitud k de v_i a algún vértice intermedio v_m y por una arista de v_m a v_j. Por la regla del producto, el número de caminos de ese tipo es el producto del número de caminos de longitud k de v_i a v_m, que es b_{im}, por el número de aristas de v_m a v_j. Al sumar todos esos productos para todos los posibles vértices intermedios v_m se obtiene el resultado que se busca en virtud a la regla de la suma.

De esta manera se concluye que el teorema es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo:

¿Cuántos caminos de longitud cuatro hay entre los vértices a y d del siguiente grafo simple.



Al ordenar los vértices del grafo de la forma a, b, c, d, su matriz de adyacencia es:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el número de caminos de longitud 4 entre los vértices a y d es el elemento que ocupa la posición $(1, 4)$ de $(M_A)^4$. Como

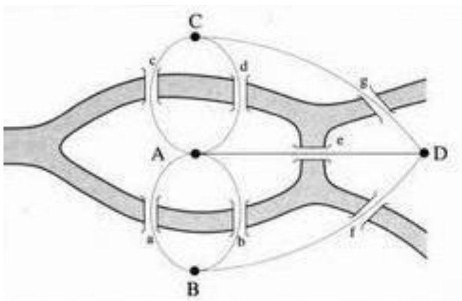
$$(M_A)^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que hay exactamente ocho caminos de longitud cuatro entre a y d. Inspeccionando el grafo estos caminos son:

a, b, a, b, d	a, b, a, c, d	a, b, d, b, d	a, b, d, c, d a,
c, a, b, d	a, c, a, c, d	a, c, d, b, d	a, c, d, c, d

6. CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

En el Siglo XVIII la ciudad de Königsberg en Prusia Oriental (hoy Kaliningrado en Lituania) estaba dividida por el río Pregel (hoy Pregolya) en cuatro zonas como muestra la figura. Las dos orillas B y C del río, una isla A llamada Kneiphof y la parte de tierra D entre los ríos Pregel y Nuevo Pregel. Existían siete puentes, dos entre A y B, dos entre A y C, uno entre A y D, uno entre B y D y uno entre C y D.



Durante los paseos dominicales, los habitantes de la ciudad intentaban encontrar un camino en el cual cada uno de los puentes se cruzase exactamente una vez y se volviese al punto de partida. Aunque era ampliamente conocido que tal camino no existía, ninguno de los interesados habitantes podría explicar por qué.

En 1736 el matemático suizo Leonhard Euler publicó el artículo "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (La solución de un problema relativo a la geometría de posición), en el cual resolvió lo que se conocía con el nombre de "*Problema de los puentes de Königsberg*".

Este trabajo se considera el primer artículo sobre lo que hoy se conoce como la Teoría de Grafos.

6.1.- Caminos y circuitos eulerianos

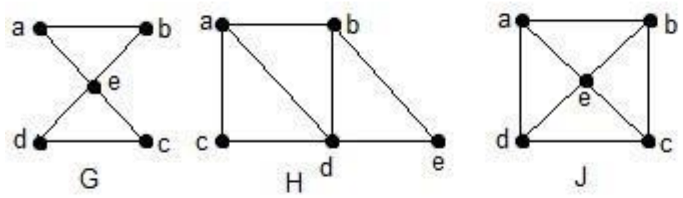
Antes de poder plantear la resolución del "*Problema de los puentes de Königsberg*" en términos de la teoría de grafos, se verá las definiciones de camino y circuitos eulerianos como también las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los mismos.

Definición:

Un circuito euleriano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todas las aristas de G. Un camino euleriano es un camino simple que contiene a todas las aristas de G.

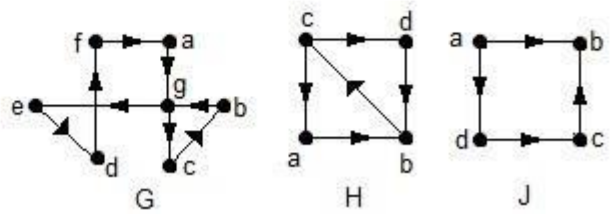
Ejemplo:

Sean los grafos simples G, H y J cuyas representaciones son las siguientes.



Un ejemplo de circuito euleriano, en el grafo G, es: a, b, e, c, d, e, a. Compruébese que ni H ni J tienen un circuito euleriano. El grafo H contiene un camino euleriano: a, c, d, e, b, d, a, b. Compruébese que el grafo J no contiene ningún camino euleriano.

Sean los grafos dirigidos G, H y J cuyas representaciones son las siguientes.



Un ejemplo de circuito euleriano, en el grafo G, es: a, g, c, b, g, e, d, f, a. Compruébese que ni H ni J tienen un circuito euleriano. El grafo H contiene un camino euleriano: c, a, b, c, d, b. Compruébese que el grafo J no contiene ningún camino euleriano.

¿Cuál sería la condición necesaria para la existencia de un circuito euleriano en un multígrafo conexo?

Si un multígrafo conexo contiene un circuito euleriano lo que se puede demostrar es que todos los vértices tienen grado par.

Demostración:

Supóngase que G es un multígrafo conexo que contiene un circuito euleriano. Sea v un vértice cualquiera de G. Puede ocurrir que si v:

i) No es el primer vértice del circuito, cada una de las veces que el circuito pase por v entrará y saldrá por dos aristas distintas de la vez anterior, luego esto, contribuirá con dos al grado de v. ii) Es el primer vértice del circuito, el circuito contribuye con dos al grado de v por cada una de las veces que pasa por v, salvo en primera y en la última en las que añade uno cada vez.

Por lo tanto, en cualquier caso, el grado de v es par.

Esta condición necesaria para la existencia de un circuito euleriano, ¿es también suficiente? Es decir, ¿tiene que existir un circuito euleriano en un multígrafo conexo con todos los vértices de grado par? Esta pregunta se puede responder afirmativamente y ser demostrada por medio de un argumento constructivo.

Demostración:

Supóngase que G es un multígrafo conexo y que el grado de cada uno de sus vértices es par. Se forma un circuito simple que comienza en un vértice arbitrario a. Sea $x_0 = a$, se elige arbitrariamente una arista $\{x_0, x_1\}$ incidente con a. Se continúa construyendo un camino simple $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ . \ . \ . \ \{x_{n-1}, x_n\}$ tan largo como sea posible.

El circuito se acaba puesto que el multígrafo tiene un número finito de aristas. Comienza en a con una arista de la forma $\{a, x\}$ y termina en a con una arista de la forma $\{y, a\}$. Esto es así porque cada vez que el circuito atraviesa un vértice con grado par, usa una sola arista cuando entra, de manera que queda al menos otra arista para que el circuito abandone ese vértice. Puede que este circuito haga uso de todas las aristas o puede que no.

Si se han usado todas las aristas, se ha construido un circuito euleriano. De no ser así, se considera el subgrafo H que se obtiene de G al eliminar las aristas ya utilizadas y los vértices que no son incidentes con ninguna de las aristas que quedan.

Como G es conexo, H tiene al menos un vértice en común con el circuito que se ha eliminado. Sea w ese vértice.

Todos los vértices de H tienen grado par, porque todos los vértices de G tenían grado par y en cada uno de ellos se han eliminado aristas por parejas para formar H. Nótese que H puede ser no conexo.

Se construye, comenzando en w, un circuito simple eligiendo tantas aristas como sea posible tal cual se hizo en G.

A continuación se forma un circuito en G concatenando el circuito en H con el circuito original en G. Esto se puede hacer porque w es uno de los vértices del circuito en G.

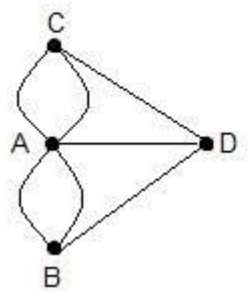
Este proceso continúa hasta que se usan todas las aristas, el proceso tiene que acabar ya que hay un número finito de aristas en el multígrafo. Esto produce un circuito euleriano. La construcción demuestra que si todos los vértices de un multígrafo conexo tienen grado par, entonces el grafo contiene un circuito euleriano.

Estos dos últimos resultados (condición necesaria y suficiente) se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema 9:

Un multígrafo conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si cada uno de sus vértices tiene grado par.

Este teorema permite resolver el "*Problema de los puentes de Königsberg*" que se enunció en la introducción del tema. El multígrafo que modela el problema, (cada porción de tierra está representada por un vértice y cada puente por una arista) es el siguiente.



Dado que el multígrafo tiene cuatro vértices de grado impar, no contiene ningún circuito euleriano. No hay ninguna forma de comenzar en un punto, cruzar cada puente exactamente una vez y volver al mismo punto de partida.

El siguiente es el Algoritmo de Fleury, que es utilizado para obtener un circuito euleriano.

Algoritmo de Fleury: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con todos sus vértices de grado par. Paso 1: Elíjase cualquier vértice v de V como vértice inicial del circuito a construir. Sea π: v el inicio del circuito por construir.

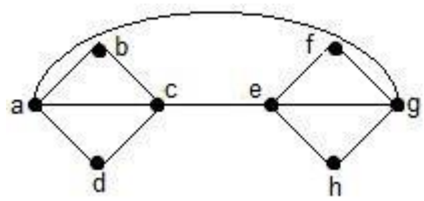
Paso 2: Supóngase que ya se ha construido π: $v, u, \ . \ . \ . \ w$. Si en w sólo existe una arista $\{w, z\}$ se extiende π: $v, u, \ . \ . \ . \ w, z$. Se elimina $\{w, z\}$ de E y w de V. Si en w existen varias aristas, se elige una que no sea un puente $\{w, z\}$. Se extiende π a π: $v, u, \ . \ . \ . \ w, z$ y se elimina $\{w, z\}$ de E.

Paso 3: Repítase el paso 2 hasta que no sobren aristas en E.

Fin del algoritmo.

Ejemplo:

Utilizar el Algoritmo de Fleury para construir un circuito euleriano para el siguiente grafo.



Por el paso 1, se puede comenzar en cualquier vértice. Se elige el vértice a de manera arbitraria.

A continuación se resume la aplicación del paso 2.

Circuito	Arista eliminada	Vértice eliminado
{a}	-.-	-.-
{a, b}	{a, b}	-.-
Circuito	Arista eliminada	Vértice eliminado
{a, b, c}	{b, c}	b
{a, b, c, a}	{c, a}	-.-
{a, b, c, a, d}	{a, d}	-.-
{a, b, c, a, d, c}	{d, c}	d
{a, b, c, a, d, c, e}	{c, e}	c
{a, b, c, a, d, c, e, g}	{e, g}	-.-
{a, b, c, a, d, c, e, g, f}	{g, f}	-.-
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e}	{f, e}	f
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e, h}	{e, h}	e
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e, h, g}	{h, g}	h
{a, b, c, a, d, c, e, g, f, e, h, g, a}	{g, a}	g

En general, si un grafo contiene un circuito euleriano, contiene varios circuitos distintos.

Todo circuito es, por definición un camino, pero no necesariamente todo camino es un circuito. Se demostrará a continuación un teorema relacionado con los caminos eulerianos.

<u>Teorema 10:</u>

Un multígrafo conexo contiene un camino euleriano, pero no un circuito, si y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar.

<u>Demostración:</u>

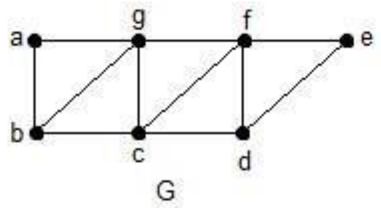
Supóngase que un multígrafo conexo contiene un camino euleriano del vértice a al vértice b, pero no contiene ningún circuito euleriano. La primera arista del camino contribuye con uno al grado de a. Cada vez que el camino atraviesa a se hace una contribución de dos a su grado. La última arista contribuye con uno al grado de b. Cada vez que el camino atraviesa b se hace una contribución de dos a su grado. Por lo tanto, ambos vértices $a\ y\ b$ tienen grado impar. Cualquier otro vértice tiene grado par, puesto que el camino contribuye con dos al grado de un vértice cada vez que lo atraviesa.

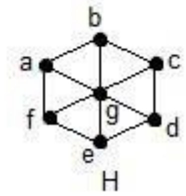
Considérese ahora el recíproco. Supóngase que un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar: $a \; y \; b$. Téngase en cuenta el grafo que se obtiene al añadir al grafo original una arista $\{a, b\}$. Cada vértice de este nuevo grafo tiene grado par, por lo que contiene un circuito euleriano.

Eliminando de ese circuito la nueva arista, se obtiene un camino euleriano en el grafo original.

Ejemplo:

Sea los siguientes grafos.





El grafo G tiene exactamente dos vértices de grado impar b y d, por lo tanto tiene un camino euleriano con esos extremos. Un camino euleriano cuyos extremos son b y d, puede ser: b, a, g, c, f, e, d, c, b, g, f.

El grafo H tiene exactamente seis vértices de grado impar, por lo tanto no contiene un camino euleriano.

6.2.- Caminos y circuitos hamiltonianos

Otro tipo de problemas relacionados con grafos, son aquellos donde la tarea consiste en visitar cada vértice solo una vez, con la excepción del vértice inicial, si este también debe ser el último. Por ejemplo, esta situación podría ser útil para una persona que deba visitar regularmente ciertos lugares. Se puede representar dichos lugares mediante un vértice e idear un circuito para que los visite una vez y vuelva al punto de partida.

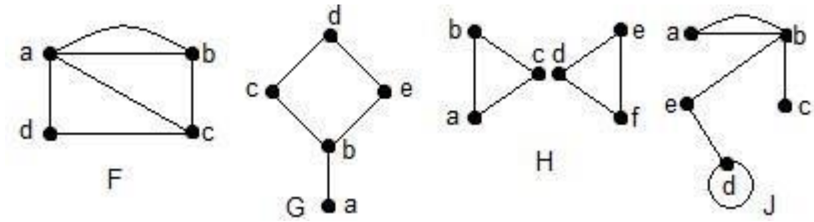
Un camino hamiltoniano es aquel que contiene cada vértice solo una vez, mientras que un circuito hamiltoniano es aquel que contiene cada vértice una solo una vez a excepción del primero que también es el último.

Definición:

Un circuito hamiltoniano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todos los vértices de G. Un camino hamiltoniano es un camino simple que contiene a todos las vértices de G.

Ejemplo:

Sean los siguientes grafos.



Se puede observar que en el grafo F existe un circuito hamiltoniano, a, b, c, d, a. En el grafo G existe un camino hamiltoniano, por ejemplo c, d, e, b, a; pero verifíquese que no existe un circuito hamiltoniano.

Al no ser conexo el grafo H, no existe ni camino ni circuito hamiltoniano. Si bien el grafo J es conexo, verifíquese que tampoco existe camino ni circuito hamiltoniano.

Otro clásico ejemplo en donde se puede observar circuitos hamiltonianos son los grafos completos K_n. De hecho se puede partir de cualquier vértice y visitarse los demás en forma secuencial y en el orden deseado.

Pudiere pensarse que el problema de decidir si un grafo contiene un circuito hamiltoniano es muy similar al problema de decidir si un grafo contiene o no un circuito euleriano y se podría esperar hallar una condición necesaria y suficiente para que un grafo contenga un circuito hamiltoniano. Sorprendentemente tal condición no se conoce. Sin embargo, se conocen teoremas que dan condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos, así como propiedades que pueden ser utilizadas para probar si un grafo contiene ciclos hamiltonianos.

Por ejemplo:

Un grafo con un vértice de grado 1 no puede contener un ciclo hamiltoniano, ya que en estos ciclos cada vértice es incidente con dos aristas del ciclo.

Si $G = (V, E)$ tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $\forall\, v \in V, \delta(v) \geq 2$.

Si $v \in V\ y\ , \delta(v) = 2$, entonces las dos aristas incidentes en el vértice v deben estar incluidas en cualquier ciclo hamiltoniano de G.

Si $v \in V\ y\ , \delta(v) > 2$, cuando se trata de construir un ciclo hamiltoniano, una vez que se pasa por el vértice v se deja de tener en cuenta las aristas no utilizadas incidente en v.

Si al quitar k vértices del grafo G se producen más de k componentes conexas, entonces G no puede contener un ciclo hamiltoniano. Esto se deduce del hecho de que en un ciclo la anterior situación es imposible.

Si un grafo G de n vértices tiene un circuito hamiltoniano, entonces G debe tener al menos n aristas.

A continuación se presentarán dos de los más importantes resultados que establecen condiciones suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos. Estos enunciados son de existencia, no proporcionan métodos para construir un circuito hamiltoniano.

Teorema 11 (Teorema de Ore):

Sea G un grafo simple con n vértices $(n \geq 3)$ tal que $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes u y v, entonces G tiene un circuito hamiltoniano.

Se omitirá la demostración de este teorema, pero mediante él se puede demostrar el siguiente corolario.

Corolario (Teorema de Dirac):

Sea G un grafo simple con n vértices $(n \geq 3)$ tal que todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que $\frac{n}{2}$, entonces G contiene un circuito hamiltoniano.

Demostración:

La suma de los grados de cualesquiera dos vértices es al menos $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ por lo que satisface la hipótesis del teorema de Ore.

El siguiente teorema recurre al número de aristas y al teorema de Ore para establecer otra condición suficiente para la existencia de un circuito hamiltoniano.

Teorema 12:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices y $\#E = m$ (nº de aristas). Si $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$, entonces G tiene un circuito hamiltoniano.

Demostración:

Supóngase que u y v son dos vértices cualesquiera, no adyacentes, de G. Sea H el subgrafo que se obtiene al eliminar u y v de G junto con las aristas que inciden en ellos. Entonces H tiene $(n - 2)$ vértices y $m - \delta(u) - \delta(v)$ aristas (habría que eliminar una arista más si u y v fueran adyacentes). El número máximo de aristas que H podría tener es $C_{n-2,\ 2}$. Esto sucede cuando existe una arista que une a cada par distintos de vértices. Por lo tanto el número de aristas de H es a lo sumo:

$$C_{n-2,\ 2} = \frac{(n-2)!}{2(n-4)!} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

$$C_{n-2,\ 2} = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

Entonces se tiene que:

$m - \delta(u) - \delta(v) \leq \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$ entonces

$\delta(u) + \delta(v) \geq m - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$

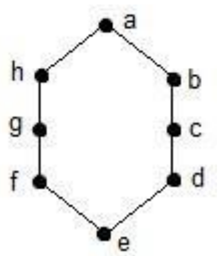
Por la hipótesis del teorema $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$

$\delta(u) + \delta(v) \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6) - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$

$\delta(u) + \delta(v) = n$

Así el resultado es consecuencia del teorema de Ore. Por lo tanto G tiene un circuito hamiltoniano.

Los recíprocos de los tres teoremas anteriores no son válidos, es decir, las condiciones dadas son suficientes, pero no necesarias. Obsérvese el siguiente grafo simple.



En este caso $n = 8$ el número de vértices, cada uno de los cuales tiene grado 2. Obsérvese que $\delta(u) + \delta(v) = 4$ para cada par de vértices no adyacentes $u\ y\ v$, con lo cual no se satisfacen las premisas del teorema de Ore. El número de aristas es 8 o sea $m = 8$ con lo que no se satisface la premisa del teorema 12. A pesar de esto existen en el grafo dado, circuitos hamiltonianos.

7. Aplicaciones de Grafos

Los problemas que se pueden resolver con técnicas de la teoría de grafos aparecen en diversas disciplinas. Por ejemplo se puede usar grafos para representar la competición de distintas especies en un mismo nicho ecológico ó bien para representar los resultados de un torneo deportivo. Incluso se puede usar grafos para diseñar pasatiempos.

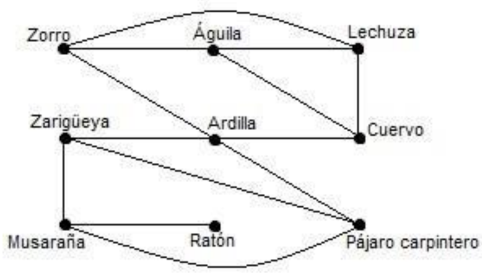
7.1.- Grafos como modelos

Se presentan a continuación algunos modelos de distintas áreas.

Grafos de solapamiento de nichos en Ecología

Los grafos se pueden emplear en muchos modelos que tienen que ver con las interacciones entre especies animales distintas. Por ejemplo, la competición entre especies en un ecosistema puede representarse mediante un *grafo de solapamiento de nichos.* Cada especie se representa por un vértice. Una arista no dirigida conecta dos vértices si las dos especies representadas por esos vértices compiten entre sí, es decir, si algunas de las fuentes de alimento de las que se nutren son las mismas.

Se presenta a continuación un pequeño ejemplo.



Obsérvese que los zorros y las ardillas compiten entre sí, mientras que los cuervos y las musarañas no lo hacen.

Grafos de la Red

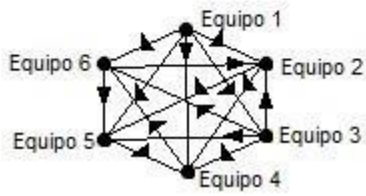
La red de internet se puede representar por medio de un grafo dirigido en el que cada página web está representada por un vértice y en el que cada arista comienza en una página a y termina en la página b si existe un enlace entre ambas páginas. Como cada segundo se crean páginas web nuevas y otras desaparecen, el grado de la red está en estado de cambio permanente. Se estima que el grafo de la red tiene más de mil millones de vértices y decenas de miles de millones de aristas.

Hay muchas personas estudiando las propiedades del grafo de la red, para entender mejor la naturaleza de la red de internet.

Grafos torneo todos contra todos

Un torneo en donde cada equipo se enfrenta exactamente una vez a cada uno de los restantes se llama *torneo de todos contra todos*. Estos torneos se pueden representar usando grafos dirigidos en los que cada equipo se representa mediante un vértice. Nótese que el par ordenado (a, b) es una arista si el equipo a vence al equipo b.

Se muestra a continuación un grafo de este tipo.



Obsérvese que el Equipo 1 no perdió ningún partido, mientras que el Equipo 4, de los cinco partidos disputados, ganó uno y perdió los restantes cuatro.

Grafos de colaboración

Los llamados *grafos de colaboración* sirven para modelar las coautorías de artículos académicos. En un grafo de colaboración, los vértices representan personas –restringidas tal vez, a una cierta comunidad científica– y una arista conecta a dos personas si éstas han escrito conjuntamente un artículo.

7.2.- Grafos como pasatiempos

En muchos pasatiempos se pide dibujar una figura con un solo trazo continuo sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún trazo. Estos pasatiempos se pueden resolver utilizando caminos y circuitos eulerianos. Por ejemplo, ¿pueden dibujarse así las *Cimitarras de Mahoma* que se muestran a continuación, comenzando y terminando el dibujo en el mismo punto?