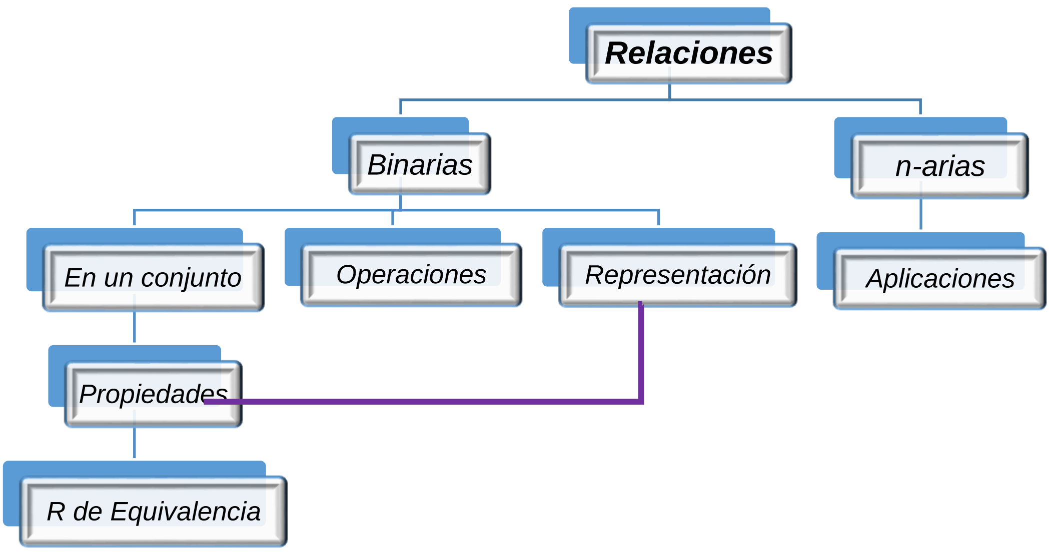
Relaciones



Relaciones
Binarias
n-arias
En un conjunto
Operaciones
Representación
Aplicaciones
Propiedades
R de Equivalencia

OBJETIVOS

- ✓ Adquirir el concepto de relación.
- ✓ Reconocer las distintas propiedades que cumple una relación.
- ✓ Representar relaciones mediante matriz y dígrafo.
- ✓ Reconocer las propiedades de las relaciones analizando la matriz y/o dígrafo correspondiente.
- ✓ Operar con relaciones
- ✓ Distinguir las características de las relaciones de equivalencia.
- ✓ Aplicar los conceptos de relación en un lenguaje de programación.

RELACIONES

1.- INTRODUCCIÓN

Las relaciones entre los elementos de conjuntos se dan en distintos contextos. Seres humanos, edificios, profesiones, códigos postales, medios de transporte, entre otros muchos, son algunos de los conjuntos más comunes de interés para las personas y a diario se establecen relaciones entre ellos para organizar distintas actividades. Por ejemplo la relación que hay entre una persona y su número de teléfono, entre profesiones y salarios, etc.

En matemática, en general, se suele establecer la relación que pudiere existir entre dos números reales (mayor, menor o igual), entre dos ángulos (adyacentes, complementarios, suplementarios, opuestos, etc.). Particularmente en informática se utilizan relaciones como la que hay entre un programa informático y una de las variables que emplea ó bien entre un lenguaje de programación y una sentencia válida en dicho lenguaje.

2.- RELACIONES BINARIAS

La noción de relación entre dos conjuntos de objetos es bastante común e intuitivamente clara, la forma más directa de expresar este tipo de relaciones es usar pares ordenados de elementos relacionados entre sí. Por eso se llaman relaciones binarias a los conjuntos de pares ordenados.

Definición:

> *Sean A y B dos conjuntos, una relación R binaria, de A en B es un subconjunto del producto cartesiano A X B.*
>
> *Sean A y B conjuntos* $\Longrightarrow R \subseteq A\ X\ B$ *o sea* $R = \{(x, y)/\ x \in A \wedge y \in B\}$

Es decir que una relación binaria entre conjuntos, es otro conjunto R, de pares ordenados, en los que el primer elemento de cada par es un elemento de A y el segundo es un elemento de B. Si el par $(x,\ y)$ pertenece a la relación se escribe $x\ R\ y$, y se dice que el elemento x está relacionado con y; caso contrario $x \not R\, y$ o sea que $(x, y) \notin R$.

Recuérdese que una función f definida de un conjunto A en un conjunto B, asigna a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B, es decir que en una función se establece una relación biunívoca[1] entre los elementos de los conjuntos A y B.

---

[1] De bi y unívoca, es la correspondencia entre dos conjuntos en la que a cada elemento del primer conjunto corresponde, a lo sumo, uno del segundo y a cada elemento del segundo conjunto corresponde, a lo sumo, uno del primero.

Una relación R se puede utilizar para expresar una relación multívoca entre los elementos de los conjuntos A y B, de modo que un elemento de A puede estar relacionado con más de un elemento de B.

Se puede considerar que las relaciones son una generalización de las funciones y suelen emplearse para expresar una clase mucho más amplia de relaciones entre conjuntos.

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{2,\ 3,\ 4\}$ y $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ si se define la relación R de la siguiente manera: $R = \{(x, y)\ /\ \ x\ divide\ a\ y\ \}$, se obtiene:

$$R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\ \}$$

Las relaciones se pueden representar gráficamente de muchas maneras, por ahora, se verán dos de ellas: por diagrama de flechas y por tabla de doble entrada. Continuando con el ejemplo anterior, la representación gráfica de la relación por estos métodos, sería la siguiente

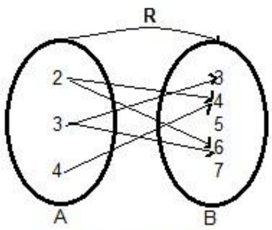


Diagrama de flechas

R	3	4	5	6	7
2		X		X	
3	X			X	
4		X			

Tabla de doble entrada

2.1.- Relaciones en un conjunto

En la definición de relación binaria no se establece condición alguna para los conjuntos A y B, por lo tanto estos por ejemplo, pueden ser iguales. Esta situación provoca que solo se trabaje con un conjunto. Las relaciones de un conjunto A en sí mismo son de un interés particular.

Definición:

Una relación R binaria, en un conjunto A es una relación de A en A.

En otras palabras, una relación en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano: A X

A.

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, una relación definida en este conjunto puede ser $R =$

$\{(a, b), (a, c),\ \ (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$

Con este segundo ejemplo se muestra que es posible establecer una relación con sólo especificar que pares ordenados pertenecen a ella, mientras que en el ejemplo anterior se estableció la regla de pertenencia a la relación.

¿Cuántas relaciones se pueden establecer en un conjunto de n elementos?

Si A tiene n elementos, o sea # A = n, el producto cartesiano $A\ X\ A$ tendrá n^2 elementos. Los subconjuntos que se pueden formar con los m elementos de un conjunto B es 2^m. Como una relación en un conjunto A es un subconjunto de $A\ X\ A$, entonces hay 2^{n2} relaciones en un conjunto de n elementos.

Ejemplo:

Si $A = \{a, b\}$ habrá $2^{22} = 2^4 = 16$ relaciones. ¿Cuáles son esas 16 relaciones?

Primeramente A x $A = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$ Por lo tanto las relaciones son

A x A $\emptyset$ $\{(a, a)\}$ $\{(a, b)\}$ $\{(b, b)\}$ $\{(b, a)\}$

$\{(a, a), (a, b)\}$ $\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$

$\{(a, a), (b, b)\}$ $\{(a, a), (a, b), (b, a)\}$

$\{(a, a), (b, a)\}$ $\{(a, a), (b, b), (b, a)\}$

$\{(a, b), (b, b)\}$ $\{(a, b), (b, b), (b, a)\}$

$\{(a, b), (b, a)\}$ $\{(b, b), (b, a)\}$

Si $A = \{a, b, c\}$ habrá $2^{32} = 2^9 = 512$ relaciones que se pueden establecer en el conjunto A.

Si $A = \{a, b, c, d\}$ habrá $2^{42} = 2^{16} = 65.536$ relaciones que se pueden establecer en el conjunto A.

3.- PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Las relaciones en un conjunto pueden ser clasificadas según las propiedades que cumplan sus elementos. A continuación se definirán estas propiedades.

Reflexividad

Se dice que una relación R en un conjunto A es reflexiva si $(x, x) \in R$ *para cada elemento*

$x \in A$.

Si $\forall x \in A$: $(x, x) \in R \implies R\ es\ reflexiva$.

Una relación definida en un conjunto A es reflexiva si cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

Sea el conjunto A y $R_I = \{(x, x) /\ x \in A\}$ esto quiere decir que R_I es la relación de igualdad en A. Entonces R_I es reflexiva, ya que $(x, x) \in R_I$ para todo $x \in A$.

R_I se puede usar para identificar si una relación R es reflexiva, ya que R es reflexiva si y sólo si $R_I \subseteq R$.

Irreflexividad

Se dice que una relación R en un conjunto A es irreflexiva si $(x,\ x) \notin R$ *para cada elemento* $x \in A$.

Si $\forall x \in A: (x, x) \notin R \implies R\ es\ irreflexiva.$

Una relación definida en un conjunto A es irreflexiva si cada elemento del conjunto no está relacionado consigo mismo.

Para identificar si una relación es irreflexiva, también es útil la R_I ya que R es irreflexiva si y sólo si $R_I \cap R = \emptyset$.

Simetría

Se dice que una relación R en un conjunto A es simétrica si para todo par de elementos x, y *de A;* $(x, y) \in R$ *entonces* $(y, x) \in R$.

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \implies (y, x) \in R) \implies$ *R es simétrica.*

Esto quiere decir que una relación es simétrica si y sólo si, el hecho de que un elemento cualquiera x esté relacionado con otro y, implica que y también está relacionado con x.

Asimetría

Se dice que una relación R en un conjunto A es asimétrica si para todo par de elementos x, y *de A,* $(x, y) \in R$ *entonces* $(y, x) \notin R$.

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \implies (y, x) \notin R) \implies$ *R es asimétrica.*

Si un elemento está relacionado con otro y este último no lo está con el primero, la relación se dice asimétrica.

Antisimetría

Se dice que una relación R en un conjunto A es antisimétrica si para cualesquiera $x, y \in A$ *se tiene que* $(x, y) \in R\ \ y\ \ (y, x) \in R\ \ sólo\ si\ x = y$

Si $\forall x, y \in A: ((x, y) \in R \wedge\ (y, x) \in R\ ) \implies x = y$, *R es antisimétrica*

Una segunda manera de expresar la antisimetría es:

Se dice que una relación R en un conjunto A es antisimetríca si para todo $x, y \in A$, *si* $(x, y) \in R\ \ con\ \ x \neq y\ \ entonces\ \ (y, x) \notin R$

Si $\forall\ x, y \in A: ((x, y) \in R\ \wedge\ x \neq y\ ) \implies (y, x) \notin R$, *R es antisimétrica.*

Recordando que la contrarecíproca de una proposición tiene el mismo valor de verdad que ésta, también puede ayudar a entender el concepto de antisimetría, la contrarecíproca de la primera definición. Es decir que una relación R es antisimétrica si:

$\forall x, y \in A: x \neq y \Longrightarrow ((x, y) \notin R \vee \ (y, x) \notin R\ )$, R es antisimétrica

Es decir que una relación es antisimétrica si no hay pares de elementos distintos $x \quad e \quad y$ tales que x está relacionado con y, también y está relacionado con x.

Los términos simétrico y antisimétrico no son opuestos, ya que una relación puede tener ambas propiedades o carecer de ellas. Una relación no puede ser a la vez simétrica y antisimétrica si contiene algún par de la forma $(x, y) \ \ con\, x \neq y$

Transitividad

Se dice que una relación R en un conjunto A es transitiva si para cualesquiera x, y, $z \in A$ *tales que* $(x, y) \in R\ \ y\ \ (y, z) \in R$ *se tiene que* $(x, z) \in R$.

Si $\forall x, y, z \in A\ ((x, y) \in R\ \wedge\ (y, z) \in R) \Longrightarrow (x, z) \in R$, *entonces R es transitiva.*

Ejemplos:

a) Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considérese las siguientes relaciones:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), \ (1, 3), (1, 4), (2, 2), \ (2, 3), (2, 4), (3, 3), \ (3, 4), (4, 4)\}$,

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$,

$R_3 = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

R_1 es reflexiva ya que $\forall\ x\ \in\ A$: $(x,\ x)$ está en la relación, mientras que R_2 no es reflexiva porque $(3, 3) \notin R_2$, R_3tampoco es reflexiva.

R_3 es irreflexiva, obsérvese que $\forall\ x\ \in\ A$: $(x,\ x)$ no está en la relación. R_2 no es irreflexiva pues por ejemplo $(1, 1)$ pertenece a la relación. R_1 no es irreflexiva.

R_3 es simétrica, mientras que R_1 no lo es, porque $(1,\ 2)\ \in\ R_1$ pero $(2,\ 1)\ \notin\ R_1$. R_2 no es simétrica pues $(3, 4) \in R_2$ pero $(4, 3) \notin R_2$

Ninguna de las tres relaciones es asimétrica. En R_1 esta, por ejemplo, el par $(1,\ 1)$ y su simétrico que es el mismo par $(1,\ 1)$. Para las relaciones $R_2 \ \ y \ \ R_3$ se cumple que figura el par $(1,\ 2)$ y su simétrico $(2,\ 1)$. Si en la relación R_1 se eliminasen los pares $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)\ \ y$ $(4, 4)$ la misma se convertiría en una relación asimétrica.

La relación R_1 es antisimétrica, mientras que la R_2 no lo es, pues $1 \neq 2$, $(1,\ 2) \in R_2\ \ y\ (2,\ 1) \in R_2$. La relación R_3 tampoco es antisimétrica por razones similares a R_2.

Respecto de la transitividad se puede afirmar que R_1 es transitiva y R_2 no; porque $(3, 4)\ y\ (4, 1) \in R_2\ pero\ (3, 1) \notin R_2$. La relación R_3 tampoco es transitiva.

b) Sea el conjunto de los números enteros, considérese las siguientes relaciones:

$R_4 = \{(x, y) \ / \ x = y \}$

$R_5 = \{(x, y) \ / \ x = y + 1 \}$

$R_6 = \{(x, y) \ / \ x + y \leq 3 \}$

La reflexividad la cumple R_4 (todo número entero es igual a sí mismo), mientras que R_5 no es reflexiva porque no puede ocurrir que $x = x + 1$ para algún número entero. R_6 no es reflexiva.

R_5 es irreflexiva, puesto que no existe un numero entero x tal que se cumpla $x = x + 1$ y R_6 no es irreflexiva ya que existe por ejemplo el entero 1 tal que $1 + 1 \leq 3$.

La relación R_4 es simétrica porque si un número entero es igual a otro, este es igual al primero. R_5 no es simétrica ya que para cualquier par de números enteros, si $x = y + 1$ no puede ocurrir que $y = x + 1$ sino que es $y = x - 1$. Por esta misma razón R_5 es asimétrica. R_6 es simétrica.

La relación R_6 no es asimétrica porque, por ejemplo, el par de números enteros $(1, 2)\ y\ (2, 1)$ pertenecen a la relación.

R_4 es antisimétrica ya que dos elementos están relacionados por medio de esta relación si y sólo si son iguales. R_6 no es antisimétrica puesto que si un par de números enteros x, y cumplen que $x + y \leq 3$ siempre se cumplirá que $y + x \leq 3$. R_5 es antisimétrica.

En cuanto a la transitividad se puede observar que R_4 es transitiva (por el carácter transitivo de las igualdades), mientras que R_5 no es transitiva pues, $(2, 1)\ y\ (1, 0)$ pertenecen a la relación pero $(2, 0)$ no. R_6 tampoco es transitiva ya que $(1, 0)\ y\ (0, 3)$ pertenecen a R_6 pero $(1, 3)$ no pertenece a R_6 .

3.1.- Operaciones con relaciones

Debido a que las relaciones de un conjunto A en un conjunto B son subconjuntos de A X B, dos relaciones de A en B se pueden combinar de las distintas maneras que se pueden combinar dos conjuntos. Mediante los siguientes ejemplos se evidenciará tres de las operaciones con relaciones: unión, intersección y diferencia.

Sean los conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y las siguientes relaciones que fueron definidas de A en B:

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Se pueden obtener las siguientes relaciones:

$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2,2), (3, 3)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$

$R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
$R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y las relaciones $R_1 = \{(x, y) \ / \ x < y \}$, $R_2 = \{(x, y) \ / \ x > y \}$. Obtener $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$.

Un par ordenado (x, y) pertenece a $R_1 \cup R_2$ si y sólo si pertenece a R_1 ó a R_2 se sigue que debe cumplirse que $x < y$ ó bien $x > y$, esta condición significa que $x \neq y$. Por lo tanto la relación unión será: $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \ / \ x \neq y \}$.

Razonando en forma análoga se puede establecer que la intersección de estas dos relaciones no puede tener elemento alguno ya que no puede cumplirse simultáneamente que para dos números reales x e y sea $x < y$ y también $x > y$ Luego se sigue que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Como R_1 y R_2 son disjuntos[2], se puede establecer que $R_1 - R_2 = R_1$ y $R_2 - R_1 = R_2$.

3.2.- Relación complementaria

También es posible usar otras operaciones de conjuntos con relaciones, por ejemplo el complemento de una relación R es conocido como relación complementaria.

<u>Definición:</u>

Sea R la relación de un conjunto A en un conjunto B, la relación complementaria, que se denotada por $\overline{R}$, *es la relación definida por* $\overline{R} = \{(x, y) \ / \ (x, y) \notin R\}$.

Forman parte de la relación complementaria todos aquellos pares ordenados que pertenecen al producto cartesiano de los conjuntos A y B pero que no pertenecen a la relación R.

3.3.- Relación Inversa

Un tipo diferente de operación en una relación R, es la formación de la relación inversa, esta relación es una relación de B en A (orden invertido de R).

<u>Definición:</u>

[2] Dos conjuntos son disjuntos cuando su intersección es el conjunto vacío, no tienen elementos en común.

Sea R la relación de un conjunto A en un conjunto B, la relación inversa denotada por R^{-1} es la relación definida por $R^{-1} = \{(y, x)\ /\ (x, y) \in R\ \}$

Forman parte de la relación inversa todos aquellos pares ordenados que se obtienen al intercambiar las posiciones de sus componentes, es decir que si el par $(x,\ y)$ pertenece a R, entonces el par (y, x) pertenecerá a R^{-1}.

Un caso particular es $R_I = \{(x,\ x)/\ x\ \in\ A\ \}$ al intercambiar las posiciones de las componentes de los pares ordenados, se obtiene el mismo par ordenado, esto quiere decir que $R_I = R_I{}^{-1}$.

Ejemplos:

Sean $A = \{1, 2, 3\}\ \ y\ \ B = \{a, b, c\}$ Se establece entre estos dos conjuntos la siguiente relación $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (2, c), (3, a)\}$ Por lo tanto:

$\overline{R} = \{(1,\ b),\ (2,\ a),\ (3,\ b),\ (3,\ c)\}$ es la relación complementaria, mientras que la relación inversa es: $R^{-1} = \{(a, 1), (c, 1), (b, 2), (c, 2), (a, 3)\}$

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros y la relación $R = \{(x, y)/\ x\ divide\ a\ \ y\ \}$. Por lo tanto:

$\overline{R} = \{(x, y)\ /\ x\ no\ divide\ a\ \ y\ \}$ y $R^{-1} = \{(x, y)\ /\ y\ divide\ a\ \ x\ \}$

3.4.- Composición de Relaciones

Hay otra manera de combinar relaciones que es análoga a la composición de funciones. Supóngase que A, B y C son conjuntos y R es una relación de A en B y S otra relación de B en C. Entonces se puede definir una nueva relación, llamada composición de R y S, aplicando primero la relación R y después la relación S. La composición de la relaciones generaliza la composición de funciones.

Definición:

Sean R una relación de un conjunto A en un conjunto B y S una relación de B en un conjunto C. La composición de R y S, denotada por $S\ \circ\ R$, *es la relación constituida por los pares*

(x, z) *con* $x \in A\ \ y\ \ z \in C$ *para los cuales existe un elemento* $y \in B$ *tal que* $(x, y) \in R\ \ e\ \ (y, z) \in S$.

$S \circ R = \{\ (x, z)\ /\ \exists\ y \in B \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\ \}$

Determinar los pares ordenados de la composición de dos relaciones, significa hallar elementos que sean la segunda componente de algún par ordenado de la primera relación y a su vez la primera componente de algún par ordenado de la segunda relación.

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ la relación de A en B, $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ y los conjuntos $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, la relación $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Por lo tanto: $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1),$

$(2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

Nótese que, por ejemplo, el par $(2, 3)$ de R y el par $(3, 1)$ de S, producen el par $(2, 1)$ de $S \circ R$.

Por otra parte: $R \circ S = \{(3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

Nótese que, por ejemplo, el par $(4, 1)$ de S y el par $(1, 4)$ de R, producen el par $(4, 4)$ de $R \circ S$.

Observando los resultados obtenidos de $S \circ R$ y $R \circ S$ se puede afirmar que en general $S \circ R \neq R \circ S$.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de n^{os} reales y las relaciones $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$ y $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < y\}$. Por lo tanto: $S \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < y\} = S$.

Esto significa que al realizar la composición de la relación que tiene por elementos pares de números reales e iguales con la que tiene pares de números reales tal que el primero es menor que el segundo, se obtiene como resultado los pares ordenados de esta última relación.

Se demostrará a continuación, algunas propiedades útiles acerca de las combinaciones de relaciones. Como las relaciones son conjuntos, para las demostraciones se utilizan las técnicas proporcionadas por la teoría conjuntista.

<u>Teorema 1:</u>

Sean A y B dos conjuntos, R y S dos relaciones definidas de A en B.

$a)$ $Si\ R \subseteq S, entonces\ \ R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

$b)$ $Si\ R \subseteq S, entonces\ \ \overline{S} \subseteq \overline{R}$.

$c)$ $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ y $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

$d)$ $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$ y $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$.

<u>Demostración</u>

$a)$ Sea $(a,\ b)\in R^{-1}$ entonces por definición de relación inversa, $(b\ \ a)\in R$, de manera que $(b,$ $a)\in S$, pues por hipótesis $R\subseteq S$. Esto último a su vez implica que $(a,\ b)\in S^{-1}$ por definición de relación inversa. Puesto que cada elemento de R^{-1} esta en S^{-1} queda demostrado que R^{-1} $\subseteq S^{-1}$.

$b)$ Si $(a,b)\in R$ entonces $(a,b)\in S$ por definición de inclusión. La contrarecíproca de esta proposición es: Si $(a,b)\notin S$ entonces $(a,b)\notin R$. Por lo tanto $(a,b)\in \overline{S}$ implica que $(a,b)\in$ $\overline{R}$ esto último significa que $\overline{S}\subseteq\overline{R}$.

$c)$ Si $(a,\ b)\ \in\ (R\ \cap\ S)^{-1}$ entonces $(b,\ a)\ \in\ R\ \cap\ S$ de tal manera que por definición de intersección $(b,\ a)\in R\ \ y\ \ (b,\ a)\in S$, esto significa que $(a,\ b)\in R^{-1}\ \ y\ \ (a,\ b)\in S^{-1}$ por la definición de relación inversa, de modo que $(a,\ b)\in R^{-1}\cap\ S^{-1}$ lo que implica que $(R\ \cap\ S)^{-1}\subseteq$ $R^{-1}\cap\ S^{-1}$. Para la contención inversa, si $(a,\ b)\ \in\ R^{-1}\cap\ S^{-1}$ por la definición de intersección esto significa que $(a,b)\in R^{-1}\ \ y\ \ (a,b)\in S^{-1}$ que por la definición de relación inversa $(b,a)\in$ $R\ \ y\ \ (b,a)\in S$. Se sigue que $(b,a)\in R\cap S$ por lo tanto se puede afirmar que $(a,b)\in(R\cap S$ $)^{-1}$ lo que implica que $R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}$. Como se cumple que
$(R\ \cap\ S)^{-1}\subseteq\ R^{-1}\cap\ S^{-1}$ y también $R^{-1}\cap\ S^{-1}\subseteq\ (R\ \cap\ S)^{-1}$ se concluye que $(R\ \cap\ S)^{-1}=\ R^{-1}\cap$ S^{-1}. De manera similar se puede demostrar la segunda parte de este inciso.

$d)$ Sea $x\in\overline{(R\cup S)}$ entonces se sabe que $x\notin(R\cup S)$ de manera tal que $x\notin R\ \wedge\ x\notin S$ por la definición de intersección, por lo tanto $x\in\overline{R}\ \wedge\ x\in\overline{S}$ se sigue que $x\in\overline{R}\cap\overline{S}$ y, por lo tanto, queda demostrado que $\overline{(R\cup S)}\subseteq\overline{R}\cap\overline{S}$. Recíprocamente, si $x\in\overline{R}\cap\overline{S}$ implica que $x\notin$ $R\ \ y\ \ x\notin S$, lo que significa que $x\notin R\cup S$ por lo tanto $x\in\overline{R\cup S}$. Todo esto implica que $\overline{R}\cap\overline{S}\subseteq$ $\overline{(R\cup S)}$. Como $\overline{(R\cup S)}\subseteq\overline{R}\cap\overline{S}$ y también $\overline{R}\cap\overline{S}\subseteq\overline{(R\cup S)}$ se concluye que $\overline{(R\cup S)}=\overline{R}\cap\overline{S}$. De manera similar se puede demostrar la segunda parte de este inciso.

Teorema 2:

Sean R y S relaciones sobre un conjunto A.

$a)$ $Si\ R\ es\ reflexiva, también\ lo\ es\ R^{-1}$.

$b)$ $Si\ R\ y\ S\ son\ reflexivas, también\ lo\ son\ R\cap S\ \ y\ \ R\cup S$.

$c)$ $R\ es\ reflexiva\ si\ y\ solo\ si\ \overline{R}\ es\ irreflexiva$.

Demostración

$a)$ Sea R_I la relación de igualdad sobre un conjunto A. Se sabe que $R\ es\ reflexiva \Leftrightarrow R_I \subseteq R$ y que $R_I = R_I^{-1}$. Por hipótesis R es reflexiva, o sea que $R_I \subseteq R$ y por el teorema anterior inciso $a)$ $R_I^{-1} \subseteq R^{-1}$ por lo tanto $R_I \subseteq R^{-1}$ pues $R_I = R_I^{-1}$. Esto demuestra que R^{-1} es reflexiva.

$b)$ Por hipótesis $R_I \subseteq R \quad y \quad R_I \subseteq S$ por lo tanto $R_I \subseteq R \cap S \quad y \quad R_I \subseteq R \cup S$ lo que permite afirmar que $R \cap S \ \ y \ \ R \cup S$ son reflexivas.

$c)$ Se sabe que $R\ es\ irreflexiva \Leftrightarrow R \cap R_I = \emptyset$ Por hipótesis, R es reflexiva si y sólo si $R_I \subseteq R$ si y sólo si $R_I \cap \overline{R} = \emptyset$ si y sólo si $\overline{R}\ es\ irreflexiva.$

<u>Teorema 3:</u>

Sea R una relación sobre un conjunto A. Entonces

$a)$ $R\ es\ simétrica\ si\ y\ sólo\ si\ \ R \subset R^{-1}\ si\ y\ sólo\ si\ \ R = R^{-1}.$

$b)$ $R\ es\ asimétrica\ si\ y\ sólo\ si\ \ R \cap R^{-1} = \emptyset.$

$c)$ $R\ es\ antisimétrica\ si\ y\ sólo\ si\ R \cap R^{-1} \subset R_I.$

<u>Demostración</u>

$a)$ Sea $(x, y) \in R$, como R es simétrica significa que $(y, x) \in R$ lo que quiere decir que $(x, y) \in R^{-1}$. Esto demuestra que $R \subset R^{-1}$. Para llegar a demostrar la igualdad solo falta demostrar que $R^{-1} \subseteq R$. Supóngase que $(x, y) \in R^{-1}$ entonces $(y, x) \in R$ y como $R \subseteq R^{-1}$ $(y, x) \in R^{-1}$.
Por la definición de R^{-1} se concluye que $(x, y) \in R$ con lo que queda demostrado que $R^{-1} \subseteq R$.
Finalmente se debe demostrar que si $R \subset R^{-1} \implies R\ es\ simétrica$. Supóngase que $(x, y) \in R$ como $R \subseteq R^{-1}$ se tiene que $(x, y) \in R^{-1}$ entonces por definición de relación inversa se concluye que $(y, x) \in R$ por lo que R es simétrica.

$b)$ Si R es asimétrica, quiere decir que no hay pares de tal modo que $(x, y) \in R\ y \ \ (y, x) \in R$ pero esta condición es equivalente a decir que $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Por lo tanto la asimetría de R significa que no hay pares (x, y) tales que $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ o sea que $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

$c)$ Si R es antisimétrica significa que si $(x, y) \in R \ \ y \ \ (y, x) \in R$ entonces $x = y$ como se vio en el inciso anterior, esto se puede reformular como $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ entonces $x = y$. Todos los elementos x e y del conjunto A que cumplen con el antecedente de este condicional son aquellos iguales, o sea $x = y$. Por lo tanto la antisimetría de R significa que para cada par de elementos x, y, si $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ entonces $(x, y) \in R_I$ lo cual simplemente quiere decir que $R \cap R^{-1} \subset R_I$.

Teorema 4:

Sean R y S relaciones sobre el conjunto A.

$a)$ *Si R es simétrica, también lo son* R^{-1} *y* $\overline{R}$.

$b)$ *Si R y S son simétricas, también lo son* $R \cap S$ *y* $R \cup S$.

Demostración

$a)$ Si R es simétrica, entonces $R = R^{-1}$ y en consecuencia $(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$ lo que significa que R^{-1} también es simétrica. También $(x, y) \in (\overline{R})^{-1}$ si y sólo si $(y, x) \in \overline{R}$ si y sólo si $(y, x) \notin R$ si y sólo si $(x, y) \notin R^{-1} = R$ si y sólo si $(x, y) \in \overline{R}$ de modo que $\overline{R}$ también es simétrica.

$b)$ Se demostró anteriormente que $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$ como R y S son simétricas se tiene que $R^{-1} = R$ y $S^{-1} = S$ por lo tanto la unión de dos relaciones simétricas es otra relación simétrica. De manera idéntica se demuestra para la intersección.

4.- Representación de relaciones

Hay diversas maneras de representar una relación entre conjuntos finitos; como se vio previamente una de ellas puede ser enumerando los pares ordenados que la conforman, otra forma es usando una tabla de doble entrada ó bien usando un diagrama de flechas. A continuación se presentaran dos métodos alternativos para representar relaciones: usando matrices y por medio de grafos dirigidos.

4.1.- Representación mediante matrices booleanas

Una relación entre conjuntos finitos se puede representar utilizando una matriz booleana. Sea R la relación del conjunto $A = \{x_1, x_2, . . ., x_m\}$ en $B = \{y_1, y_2, . . ., y_n\}$, R puede representarse por medio de la matriz ${M_R}^{mxn} = [m_{ij}]$ en donde cada elemento $m_{ij} =$

$$\begin{cases} 1 \; si \; (x_i, y_j) \in R \\ 0 \; si \; (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Es decir que, la matriz booleana, de dimensión mxn, que representa a R tendrá un 1 como elemento (i, j) si x_i está relacionado con y_j caso contario, en esa posición tendrá un 0. Los elementos de los conjuntos A y B están escrito en un orden arbitrario, además cuando A = B se usa la misma ordenación para ambos conjuntos. Esto quiere decir que la representación de una relación por medio de matrices dependerá de la ordenación de los elementos de los conjuntos A y B, es decir que una misma relación puede estar representada por distintas matrices.

Ejemplos:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $R = \{(x, y) \in R \mid x > y\}$ es decir que:

$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ ó bien $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sean los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ¿Qué pares ordenados están en la relación R representada por la siguiente matriz? $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_4)\}$

Si el conjunto A tiene n elementos, entonces estos se pueden ordenar (permutaciones) de $n!$ formas distintas. Por lo tanto una relación definida en un conjunto con n elementos podrá representarse por medio de $n!$ matrices distintas.

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y R definida en A tal que $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$. Los elementos de A se pueden ordenar de 6 maneras distintas (3! = 6), las cuales son: {1, 2, 3 }, {1, 3, 2}, {2, 3, 1}, {2, 1, 3}, {3, 1, 2} y {3, 2, 1}. Por lo tanto R tiene 6 matrices distintas que la representan. Ellas son, para cada ordenación posible, las siguientes.

$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Las matrices de una relación en un conjunto A de n elementos, que siempre son cuadradas, pueden usarse para determinar si la relación cumple o no con determinadas propiedades.

Una relación es reflexiva si todo elemento del conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots ; x_n\}$ está relacionado consigo mismo. Por lo tanto R es reflexiva si $(x_i, x_i) \in R$ para $\forall\ i$. Entonces R es reflexiva si y sólo sí $m_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, esto quiere decir que R es reflexiva si todos los elementos de la diagonal principal de M_R son 1.

De manera análoga una relación R es irreflexiva si ningún elemento está relacionado consigo mismo; en este caso la matriz de la relación deberá contener únicamente ceros en la diagonal principal.

Si la diagonal principal de una matriz que representa una relación, contiene ceros y unos, dicha relación no es ni reflexiva ni irreflexiva.

Esquemáticamente las matrices de relaciones reflexivas e irreflexivas se pueden representar, respectivamente, de la siguiente manera:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad M_R = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

La relación R en $A = \{x_1, x_2, . \;. \;., x_n\}$ es simétrica si para todo par ordenado (x_i, y_j) que pertenece a la relación, el par ordenado (y_j, x_i) también pertenece a R. En términos de los elementos de M_R, R es simétrica si y sólo si $m_{ij} = 1$ entonces $m_{ji} = 1$. Esto también significa que si $m_{ij} = 0$ entonces $m_{ji} = 0$. Por consiguiente R es simétrica si sólo si, $m_{ij} = m_{ji}$ para todo i, j con $i = 1, 2, . \;. \;., n$ $j = 1, 2, . \;. \;., n$. Una forma rápida de ver si la relación R es simétrica es comparar la matriz de la relación con su traspuesta, si son iguales entonces se concluye que la relación R es simétrica. Por lo tanto R es simétrica si y sólo si $M_R = (M_R)^T$.

La matriz $M_R = [m_{ij}]$ de una relación R asimétrica; satisface la propiedad de que si $m_{ij} = 1$ entonces $m_{ji} = 0$. Si R es asimétrica se desprende que $m_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, . \;. \;. , n$ vale decir que la diagonal principal de la matriz M_R consta en su totalidad de ceros. Esto es verdadero ya que la propiedad asimétrica implica que si $m_{ii} = 1$ entonces $m_{ii} = 0$ lo cual es una contradicción.

Finalmente la matriz $M_R = [m_{ij}]$ de una relación R antisimétrica; satisface la propiedad de que si $i \neq j$ entonces $m_{ij} = 0$ ó bien $m_{ji} = 0$ para todo i, j con $i = 1, 2, . \;. \;., n$ y $j = 1, 2,$

$. \;. \;., n.$

Esquemáticamente las matrices de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas se pueden representar, respectivamente, de la siguiente manera:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

La relación R en $A = \{x_1, x_2, . \;. \;. ; \; x_n\}$ es transitiva si el par ordenado (x_i, y_j) y el par (y_j, z_k) pertenecen a la relación, el par (x_i, z_k) debe pertenecer a R. En términos de los elementos de M_R, R es transitiva si y sólo si su matriz $M_R = [m_{ij}]$ tiene la propiedad de que si $m_{ij} = 1$ y $m_{jk} = 1$ entonces $m_{ik} = 1$. El antecedente de este enunciado significa simplemente que M_R [2] tiene un 1 en la posición i, k. Así la transitividad de la relación R significa que si $M_R{}^{[2]}$[3] tiene un 1 en cualquier posición, entonces M_R debe tener un 1 en la misma posición. Por tanto, en particular si $M_R{}^{[2]} = M_R$, entonces R es transitiva. La inversa de esta proposición no es verdadera.

Ejemplos:

Sean $R_1 \quad y \quad R_2$ dos relaciones definidas en un conjunto y representadas por sus respectivas matrices.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observando la matriz, se puede decir que la relación no es ni reflexiva ni irreflexiva porque en la diagonal principal existen ceros y unos.

R_1 no es ni simétrica ni asimétrica, en este último caso porque en su diagonal principal existen unos.

R_1 si cumple con las propiedades: antisimétrica y transitiva, en este último caso se puede comprobar fácilmente que $M_{R1}{}^{[2]} = M_{R1}$.

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[3] $M_{R_1}{}^{[2]} = M_R \odot M_R$. Recordar que el símbolo $\odot$ significa producto booleano.

Observando la matriz, se puede decir que la relación es irreflexiva pero no es simétrica. Tampoco es asimétrica ni antisimétrica debido al 1 en las posiciones 1, 4 y 4, 1. Se puede comprobar fácilmente que R_2 no es transitiva.

Las operaciones booleanas de unión e intersección pueden emplearse para determinar las matrices que representan la unión y la intersección de dos relaciones.

Si $R_1 \ y \ R_2$ son dos relaciones en un conjunto A representadas por las matrices $M_{R1} \quad y \quad M_{R2}$ respectivamente, la matriz que representa la unión de estas dos relaciones tiene un 1 en aquellas posiciones en las que bien M_{R1} o bien M_{R2} tienen un 1. La matriz que representa la intersección de estas dos relaciones tiene un 1 en aquellas posiciones en las que tanto M_{R1} como M_{R2} tienen un 1. Por lo tanto, las matrices que representan la unión y la intersección de estas relaciones son: $M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$ y $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Ejemplo:

Sean $R_1 \, y \; R_2$ dos relaciones en un conjunto A, representadas por las matrices:

$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Las matrices de $R_1 \cup R_2 \; y \; R_1 \cap R_2$ son:

$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz de la composición de relaciones puede hallarse usando el producto booleano de las matrices de las relaciones.

Dados los conjuntos A con m elementos, B con n elementos y C con p elementos. Sean R una relación de A en B y S una relación de B en C. Sean las matrices $M_R{}^{mxn} = [r_{ij}]$, $M_S{}^{nxp} = [s_{ij}]$ y $M_{S \circ R}{}^{mxp} = [t_{ij}]$ las matrices booleanas asociadas a R, $S \; y \; S \circ R$ respectivamente. El par ordenado $(x_i, \, y_j)$ pertenece a $S \circ R$ sí y sólo sí existe un elemento z_k tal que $(x_i, \, z_k)$ pertenece a R y $(z_k, \, y_j)$ pertenece a S. Se sigue que $t_{ij} = 1$ sí y sólo sí $r_{ik} = s_{kj} = 1$ para algún k. Por la definición de producto booleano, esto significa que: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$.

Ejemplo:

Sean $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ las matrices de las relaciones R y S respectivamente, entonces $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Las matrices de la relación complementaria y la relación inversa de una relación R, se pueden obtener a partir de su matriz.

Para obtener la matriz de la relación complementaria, se intercambia en la matriz de R, los unos por ceros y los ceros por uno; mientras que para obtener la matriz de la relación inversa se intercambian, en la matriz de R, filas por columnas, es decir se hace la traspuesta de la matriz de la relación.

Ejemplo:

Sea $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ la matriz de la relación R; entonces:

$M_{\overline{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.2.- Representación mediante dígrafos

Hay otra manera de representar una relación definida en un conjunto, usando una representación gráfica. Cada elemento del conjunto se representa mediante un punto (vértice) y cada par ordenado de la relación se representa mediante una flecha (arista) del vértice x_i al vértice y_j si y solamente si $x_i \ R \ y_j$. La representación resultante de R se llama grafo dirigido o dígrafo.

Definición:

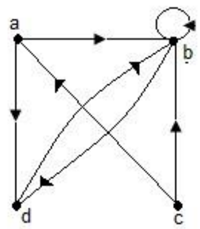
Un grafo dirigido o dígrafo consta de un conjunto V de vértices y un conjunto E de pares ordenados de elementos de V llamados aristas. Al vértice x_i se le llama vértice inicial de la arista (x_i, y_j) y al vértice y_j vértice final de la arista.

Una arista de la forma (x_i, x_i) se representa usando un arco que conecta al vértice x_i consigo mismo. Una arista de esta forma se llama bucle.

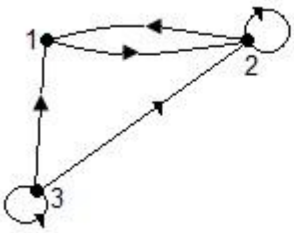
Ejemplo:

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y definida en él:

$R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$, el dígrafo correspondiente es:



El siguiente dígrafo representa una relación en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$



Los pares que forman la relación son:

$$\{(2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Si una relación R en un conjunto A esta representada por el dígrafo que tiene por vértices los elementos de A y por aristas los pares ordenados (x_i, y_j) tales que $(x_i, y_j) \in R$ entonces esta asignación establece una biyección entre las relaciones en un conjunto A y los dígrafos cuyos conjunto de vértices es A. Así cada afirmación acerca de las relaciones se corresponde con una afirmación acerca de los dígrafos y viceversa.

El dígrafo que representa a una relación puede utilizarse para determinar si la relación cumple o no, con determinadas propiedades.

Una relación es reflexiva si y sólo sí hay un bucle en cada vértice del dígrafo, de modo que todos los pares ordenados de la forma $(x_i, \ x_i)$ pertenecen a la relación; mientras que la relación es irreflexiva si no posee ningún bucle en su dígrafo.

El dígrafo de una relación R simétrica, tiene la propiedad de que si hay una arista del vértice i al vértice j, entonces hay una arista del vértice j al vértice i. En consecuencia si dos vértices están conectados debe ser por medio de dos aristas, una en cada dirección posible.

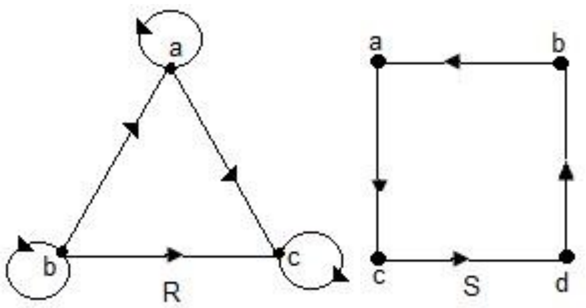
Si R es una relación asimétrica, entonces el dígrafo de R no puede tener simultáneamente una arista del vértice i al vértice j y otra arista del vértice j al vértice i. Esto es cierto para cualquier i y cualquier j y en particular si i es igual a j. En consecuencia en el dígrafo no puede haber bucles.

Si R es una relación antisimétrica, entonces para diferentes vértices $i \ y \ j$ no puede haber una arista del vértice i al vértice j y otra del vértice j al vértice i. Cuando $i = j$ no se impone condición alguna, en consecuencia el dígrafo puede contener bucles.

Finalmente una relación es transitiva sí y sólo sí, siempre que hay una arista uniendo un vértice i con un vértice j y una arista uniendo el vértice j con el vértice k, hay una tercera arista que une i con k. De esta forma las aristas que intervienen forman un triángulo en el que cada una está orientada en la dirección correcta.

Ejemplos:

Sean las relaciones R y S representadas respectivamente por los siguientes dígrafos

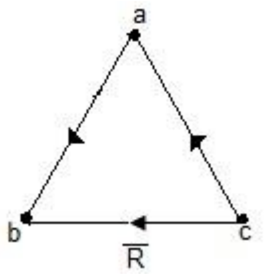


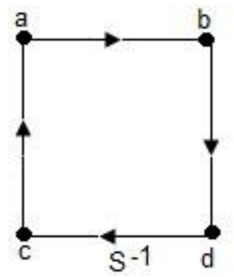
Se puede afirmar, observando el dígrafo de R, que la misma es reflexiva ya que existe un bucle en cada uno de los vértices. También es antisimétrica pues entre dos vértices distintos solo existe una arista en un solo sentido que las une. Por último la relación es transitiva.

Respecto de S, se puede observar que la misma es irreflexiva debido a que ningún vértice posee bucle y es antisimétrica. S tampoco es transitiva, ya que hay una arista que une a con c y otra arista que une c con d, pero no hay una arista que una los vértices a y d. S es asimétrica.

A partir del dígrafo de una relación R, se puede hallar el dígrafo de la relación complementaria y el de la relación inversa. Para hallar el dígrafo de la relación complementaria se deben eliminar del dígrafo que representa el producto cartesiano, las aristas que están en el dígrafo de la relación y para hallar el dígrafo de la relación inversa solo se deben invertir el sentido de cada una de las aristas del dígrafo de la relación R.

Se presentan a continuación el dígrafo de la relación complementaria de R y el dígrafo de la relación inversa de S, definidas en el ejemplo anterior.





5.- Relaciones de equivalencia

Existen relaciones con una combinación particular de propiedades que permiten usarlas para relacionar objetos que son semejantes en algún sentido. Estas relaciones reciben el nombre de “relaciones de equivalencia”.

<u>Definición:</u>

Una relación R en un conjunto A se dice de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y definida en él la relación:

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. La matriz que representa esta relación será:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observando M_R se puede afirmar que la relación es reflexiva (todos los elementos de la diagonal principal son 1) simétrica $(M_R = (M_R)^T)$. Se puede comprobar que R es transitiva $(M_R \odot M_R = M_R)$. En consecuencia R es una relación de equivalencia.

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros y sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ x - y \in \mathbb{Z}\}$

Se puede afirmar que R es reflexiva pues, $x - x = 0$ y cero es un número entero. Además, suponiendo que $x - y$ es un número entero se sigue que $y - x$ es también un número entero, por lo que R es simétrica. Por último $x - y$ es entero e $y - z$ es entero, entonces $x - z = (x - y) + (y - z)$ es también un entero. En consecuencia R es una relación de equivalencia.

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros y sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ x \leq y\}$
Puesto que $x \leq x$, R es reflexiva. Si $x \leq y$ no implica necesariamente que $y \leq x$ por lo tanto R no es simétrica. Se puede afirmar que R no es una relación de equivalencia, aunque incidentalmente sea transitiva ya que si $x \leq y$ y también $y \leq z$ implica que necesariamente es $x \leq z$.

Una relación de equivalencia muy conocida en el conjunto de números enteros, es la relación "congruencia módulo m".
Sea m un entero positivo mayor que1 y la relación:
$R = \{(x, y) \in Z^2 \ / \ x \equiv y \ (mod\ m) \ \}$, entonces R es de equivalencia.
En primer lugar, se debe recordar que $x \equiv y \ (mod\ m) \Leftrightarrow m \mid (x - y)$.
R es reflexiva ya que para todo entero se cumple que:
$x \equiv x \ (mod\ m) \Leftrightarrow m \mid (x - x)$ o sea que $m \mid 0$ lo que es verdad, pues $0 = m \ . \ 0$ Respecto a la simetría, se puede establecer que:
Si $x \equiv y \ (mod\ m)$ entonces $m \mid (x - y)$. Por lo tanto
$x - y = k. m$ para algún $k \in Z$. Se sigue que
$y - x = (-k). m$ de modo tal que $y \equiv x \ (mod$
$m)$.

Por lo tanto la congruencia modulo m es simétrica.
Respecto a la transitividad:
Si $x \equiv y \ (mod\ m)$ entonces $m \mid (x - y)$. Por lo tanto
$x - y = k. m$ para algún $k \in Z$ (1)
Si $y \equiv z \ (mod\ m)$ entonces $m \mid (y - z)$. Por lo tanto
$y - z = p. m$ para algún $p \in Z$ (2)
Sumando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene

$$x - y = k. m$$
$$y - z = p. m$$

$(x - y) + (y - z) = km + pm$. Se sigue que

$$x - y + y - z = m(k + p)$$
$$x - z = m(k + p)$$

$x - z = h.m$ con $h = k + p$, $h \in Z$. Ó sea que

$m \mid (x - z)$. Por lo tanto

$x \equiv z\ (mod\ m)$

Esto demuestra que la relación es transitiva.

Se concluye, finalmente, que relación "congruencia módulo m" es una relación de equivalencia.

5.1.- CLASES DE EQUIVALENCIA

Las clases de equivalencias, son conjuntos que contienen a todos los elementos "y" que están relacionados con otro elemento "x" del conjunto A.

Definición:

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. El conjunto de todos los elementos que están relacionados con algún elemento x de A se llama clase de equivalencia de x. La clase de equivalencia de x con respecto a R se denota por $[x]_R$.

Sea R una relación de equivalencia, entonces la clase de equivalencia del elemento x se define como $[x]_R = \{y \,/\, (x, y) \in R\}$

Si se considera una única relación se puede suprimir el subíndice R y se escribe $[x]$ para denotar la clase de equivalencia.

Cualquier elemento de una clase se puede usar como representante de esa clase, es decir no hay nada especial que distinga al elemento concreto elegido como representante de la clase.

Ejemplos:

Se demostró, en los ejemplos anteriores, que la relación R definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es de equivalencia

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ por lo tanto: $[1] = \{1, 2, 3\}$, $[2] = \{1, 2, 3\}$, $[3] = \{1, 2, 3\}$ y $[4] = \{4\}$

Las clases de equivalencia de la relación de congruencia módulo m, se llaman clases de congruencia módulo m. La clase de congruencia módulo m de un entero x se denota por $[x]_m$ por lo tanto se puede establecer que $[x]_m = \{. . ., x - 2m, x - m, x, x + m, x + 2m, . . .\}$ Por ejemplo si $m = 4$, las distintas clases son $[0]_4 = \{. . . , -8, -4, 0, 4, 8, . . .\}$ $[1]_4 = \{. . . , -7, -3, 1, 5, 9, . . .\}$, $[2]_3 = \{. . . , -6, -2, 2, 6, 10, . . .\}$ por último $[3]_4 = \{. . . , -5, -1, 3, 7, 11, . . .\}$

Hay que observar que en ningún caso las clases de equivalencia son vacías ya que la propiedad reflexiva hace que cuando menos contenga un elemento.

5.2.- CLASES DE EQUIVALENCIAS Y PARTICIONES

Las clases de equivalencias de una relación de equivalencia definida en un conjunto A, dividen a este en subconjuntos disjuntos y no vacíos. El siguiente teorema muestra que las clases de equivalencia de dos elementos del conjunto A son o bien idénticas o bien disjuntas.

<u>Teorema 5:</u>

Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$i)\ x\,R\,y \quad ii)\ [x\,] = [\,y\,] \quad iii)\ [x\,] \cap [\,y\,] \neq \emptyset$

i) $x\,R\,y \Longrightarrow [x\,] = [\,y\,]$

Tomamos un elemento arbitrario z talque $z \in [\,x\,]$, entonces $x\,R\,z$. Como $x\,R\,y$ y R es simétrica se sigue que $y\,R\,x$. Como R es transitiva; se sigue que $y\,R\,x \ \wedge\ x\,R\,z$ implica que $y\,R\,z$. Por lo tanto $z \in [\,y\,]$, lo que demuestra que $[x\,] \subset [\,y\,]$

Tomamos un elemento arbitrario w talque $w \in [\,y\,]$, entonces $y\,R\,w$. Como R es transitiva se puede afirmar que $x\,R\,y \ \wedge\ y\,R\,w$ implica que $x\,R\,w$ Por lo tanto $w \in [\,x\,]$, lo que demuestra que $[y\,] \subset [\,x\,]$.

Como $[x\,] \subset [\,y\,] \ \wedge\ [y\,] \subset [\,x\,]$ se sigue que $[x\,] = [\,y\,]$ ii)

$[x\,] = [\,y\,] \Longrightarrow [x\,] \cap [\,y\,] \neq \emptyset$

Si $[x\,] = [\,y\,]$ se sigue que $[x\,] \cap [\,y\,] \neq \emptyset$ ya que $[\,x\,]$ no es vacía porque $x \in [\,x\,]$ al ser R reflexiva.

iii) $[x\,] \cap [\,y\,] \neq \emptyset \Longrightarrow x\,R\,y$

Si $[x\,] \cap [\,y\,] \neq \emptyset$ se sigue que existe un elemento z con $z \in [\,x\,]$ y $z \in [\,y\,]$, es decir, $x\,R\,z \ \wedge\ y\,R\,z$. Por la propiedad simétrica de R, $z\,R\,y$. Como $x\,R\,z \ \wedge\ z\,R\,y$ por propiedad transitiva $x\,R\,y$

Como $(\,i\,)$ implica $(\,ii\,)$; $(\,ii\,)$ implica $(\,iii\,)$ y $(\,iii\,)$ implica $(\,i\,)$ las tres expresiones son equivalentes.

Ahora, se puede mostrar cómo una relación de equivalencia divide un conjunto. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. La unión de las clases de equivalencia de R es todo el conjunto A, ya que cada elemento $x \in A$ está en su propia clase de equivalencia, es decir, en $[x\,]_R$. En otras palabras: $\bigcup_{x\in A}[\,x\,]_R = A$

Además se sigue por el teorema demostrado anteriormente que estas clases de equivalencia ó bien son iguales ó bien disjuntas, por lo que si $[x]_R \neq [y]_R$ entonces $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

Estas dos observaciones ponen de manifiesto que las clases de equivalencias forman una partición del conjunto A, ya que dividen al conjunto A en subconjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos y cuya unión es el conjunto A.

Ejemplo:

Se mostró anteriormente que:

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ es una relación de equivalencia definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y que sus clases de equivalencia son:

$[1] = \{1, 2, 3\}$, $[2] = \{1, 2, 3\}$, $[3] = \{1, 2, 3\}$ y $[4] = \{4\}$

Se puede observar que todas las clases de equivalencias son no vacías, y que además $[1] = [2] = [3]$ y que $[1] \cap [4] = \emptyset$ por lo que se puede afirmar que $\{1, 2, 3\}$ y $\{4\}$ forman una partición de A.

Se mostró que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia en un conjunto forman una partición de dicho conjunto. Los subconjuntos de la partición son las clases de equivalencia. A la inversa, ¿Cualquier partición de un conjunto se puede utilizar para formar una relación de equivalencia? El siguiente teorema confirma la respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 6:

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto S. Entonces las clases de equivalencia de R forman una partición de S. Recíprocamente, dada una partición $\{A_i \,/\, i \in I\}$ (donde I es un conjunto de índices) del conjunto S, hay una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son los conjuntos A_i, $i \in I$

Solo resta demostrar la parte reciproca de este teorema. Para ver esto, se supone que $\{A_i \,/\, i \in I\}$ es una partición de S.

Sea R la relación en S que consta de pares (x, y) tales que x e y pertenecen al mismo subconjunto A_i de la partición. Para demostrar que R es una relación de equivalencia se debe demostrar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

R es reflexiva porque para cada x que pertenece a S, (x, x) pertenece a R ya que x está en el mismo subconjunto de la partición que él mismo.

R es simétrica porque si (x, y) pertenece a R, entonces y y x están en el mismo subconjunto de la partición, por lo que (y, x) pertenece a R.

Si $(x,\ y)$ pertenece a R e $(y,\ z)$ pertenece a R, entonces x e y están en el mismo subconjunto, por ejemplo X, de la partición también y con z están en el mismo subconjunto, Y por ejemplo, de la partición. Como los subconjuntos de la partición son disjuntos e y pertenece tanto a X como a Y, se sigue que X = Y. En consecuencia x y z pertenecen al mismo subconjunto de la partición, de modo tal que $(x,\ z)$ pertenece a R. Por lo tanto R es transitiva. Quedando, así demostrado que R es de equivalencia.

De esta manera el teorema demostrado resume los vínculos que se establecen ente relaciones de equivalencia y particiones.

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considérese la siguiente partición $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$, $A_3 = \{6\}$. Hallar la relación de equivalencia R en A, determinada por la partición dada.

Los subconjuntos de la partición son clases de equivalencia de R. Cada elemento de un subconjunto está relacionado con cada uno de los demás elementos del mismo bloque y solamente con estos elementos, puesto que el par $(x,\ y) \in R$ si y sólo si x e y están en el mismo subconjunto de la partición.

Como $A_1 = \{1, 2, 3\}$ los pares $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1),$ $(3,\ 2)\ y\ (3,\ 3)$ pertenecen a R. Los pares $(4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5)$ pertenecen a R ya que $A_2 = \{4,\ 5\}$ es también una clase de equivalencia. Finalmente el par $(6,\ 6)$ pertenece a la relación. Ningún otro par pertenece a la relación R. Es decir que:

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3),(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

6.- Aplicaciones de las relaciones

En muchos casos se establecen relaciones entre los elementos de más de dos conjuntos. Por ejemplo hay una relación entre el nombre de un estudiante, su número de documento, la carrera en la que está inscripto y la nota media del estudiante. De manera similar hay una relación que vincula la línea área, el número de vuelo, el punto de partida, el destino, la hora de salida y la hora de llegada de un vuelo. Un ejemplo de estas relaciones en el ámbito de las matemáticas es la relación de intercalamiento de los puntos de una recta, tal que tres puntos están relacionados cuando el segundo punto está entre el primero y el tercero.

Se presentaran a continuación relaciones entre los elementos de más de dos conjuntos.

6.1.- Base de datos relacionales

Cuando se representa una relación binaria mediante una tabla, esta tiene dos columnas. Con frecuencia es útil permitir que una tabla tenga un número arbitrario de columnas. Si la tabla tiene n columnas, la relación correspondiente se dice $n-\ aria$.

Por ejemplo, la siguiente tabla "Estudiantes" representa una relación $4-\ aria$ y expresa la relación que hay entre apellidos, número de documento, carrera y nota media de estudiantes de una institución educativa.

Tabla: Estudiante			
Apellidos	D N I	Carrera	Nota
Alejo	39.654.853	Ingeniería Informática	7,65
Chorolque	40.518.398	Ingeniería de Minas	6,23
García Moreno	42.760.871	Licenciatura en Cs. Geológicas	8,23
Jaramillo	38.421.908	Analista Programador Universitario	9,21
Kramich	44.511,309	Licenciatura en Sistemas	4,34
Mamani Quispe	38.456.081	Ingeniería Informática	5,67
Poclava	37.384.816	Licenciatura en Sistemas	7,90
Santander	40.432.765	Analista Programador Universitario	6,66

La tabla anterior se puede expresar como el conjunto:

{ (Alejo, 39.654.853, Ingeniería Informática, 7,65), (Chorolque, 40.518.398, Ingeniería de Minas, 6,23), (García Moreno, 42.760.871, Licenciatura en Cs. Geológicas, 8,23), . . ., (Santander, 40.432.765, Analista Programador Universitario, 6,66) }

Una $base\ de\ datos$ es una colección de registros que maneja una computadora. El tiempo que requiere manipular la información en una base de datos, depende de cómo este almacenada la información. Las operaciones de añadir y borrar registros, actualizar registros, buscar determinados registros, así como combinar registros de bases de datos que se solapan, se llevan a cabo muchísimas veces al día en una base de dato grande. Debido a la importancia de estas operaciones, se han desarrollado diversos métodos para representar las bases de datos. Uno de estos modelos llamado $modelo\ de\ base\ de\ datos\ relacional$, inventado por E.F. Codd, se basa en el concepto de una relación $n-\ aria$.

Se realizará una breve introducción de algunas ideas fundamentales en la teoría de bases de datos relacionales, ya que no es intención ahondar en dicho tema sino presentar una aplicación del tema que se estudia: Relaciones.

Las columnas de una relación $n-\ aria$ se llaman $atributos\ (o\ campos)$. El dominio de un atributo es un conjunto al que pertenecen todos los elementos de ese atributo. Por ejemplo, en la tabla Estudiantes, el atributo Nota puede tomarse como el conjunto de todos los números reales mayores a cero y menores que 10. El atributo Apellidos puede tomarse como todas las cadenas en el alfabeto con longitud 30 o menor. Un solo atributo o combinación de atributos para una relación es una $clave\ (o\ llave)$, si los valores de los atributos definen de manera única una n–tupla. Por ejemplo, en la tabla Estudiante se puede tomar el atributo el número de documento como una clave, ya que se supone que cada persona tiene un único número de identificación. El atributo Apellidos no es una clave porque es posible que diferentes personas tengan el mismo apellido.

Un sistema de administración de bases de datos responde a $consultas$. Una consulta es una petición de información de la base de datos. Estas peticiones permiten, por ejemplo, responder preguntas como: ¿Qué estudiantes tienen una nota media mayor o igual a 5,5?, ¿Qué estudiantes cursan la carrera Analista Programador Universitario? Se analizarán varias operaciones sobre las relaciones que se utilizan para responder a las consultas en el modelo de base de datos relacional.

Selección:

El operador seleccionar elige ciertas n–tuplas de una relación. Las elecciones se hacen estableciendo condiciones sobre los atributos. Por ejemplo, para la relación establecida en la tabla Estudiante: Estudiante [Nota > 8] seleccionará los siguientes cuartetos:

(García Moreno, 42.760.871, Licenciatura en Cs. Geológicas, 8,23),

(Jaramillo, 38.421.908, Analista Programador Universitario, 9,21)

Proyección:

Mientras que el operador selección elige filas de una relación (tabla) el operador proyección elige columnas. Además, elimina los duplicados. Por ejemplo, para la relación Estudiante:

Estudiante [Apellidos, Nota] seleccionará las parejas:

(Alejo, 7,65) (Chorolque, 6,23) (García Moreno, 8,23)

(Jaramillo, 9,21) (Kramich, 4,34) (Mamani Quispe, 5,67)

(Poclava, 7,90) (Santander, 6,66).

Unión:

Los operadores selección y proyección manejan una sola relación; la unión maneja dos relaciones.

La operación unión sobre las relaciones R_1 y R_2 comienza por examinar todos los pares de n–tuplas, una de R_1 y otra de R_2. Si la condición de unión se satisface, las n–tuplas se combinan para formar nuevas n–tuplas. La condición de unión especifica una relación entre un atributo de R_1 y un atributo de R_2. Por ejemplo, se realizará una operación unión sobre las tablas: Docente y Horario. Como condición se tomará Cod_asig = Num_asig.

Se presentan a continuación las tablas: Docentes y Horarios.

Tabla: Docente		
Profesor	Depto.	Cod_asig
Condori	Matemática	224
Condori	Matemática	321
Grageda	Química	675
Grageda	Química	876
Medina	Física	345
Medina	Física	598
Pérez	Informática	378
Pérez	Informática	034

Tabla: Horario			
Depto.	Num_asig	Aula	Hora
Informática	378	I11	14:00
Física	598	F45	15:30
Química	675	Q46	18:45
Matemática	224	M97	17:00
Informática	139	I34	09:00
Física	345	F48	10:30
Matemática	321	M76	11:45
Química	876	Q90	19:30

Tomamos una fila de la tabla Docente y una de Horario y si se cumple que Cod_asig = Num_asig, se combinan las filas. Por ejemplo, la primera fila de la tabla Docente coincide con la cuarta fila de la tabla Horario, es decir que, (Cod_asig = Num_asig = 224). Estas n–tuplas se combinan escribiendo primero la de la tabla Docente seguida de la n–tupla de la tabla Horario y eliminando los elementos iguales en los atributos especificados. Obteniéndose:

(Condori, Matemática, 224, M97, 17:00).

Esta operación se expresa como: Docente [Cod_asig = Num_asig] Horario. La relación obtenida al ejecutar esta unión se muestra en la siguiente tabla.

Tabla: Docente [Cod_asig = Num_asig] Horario				
Profesor	Depto.	Cod_asig	Aula	Hora
Condori	Matemática	224	M97	17:00
Condori	Matemática	321	M76	11:45
Grageda	Química	675	Q46	18:45
Grageda	Química	876	Q90	19:30
Medina	Física	345	F48	10:30

Medina	Física	598	F45	15:30
Pérez	Informática	378	I11	14:00

En otras palabras, el operador unión produce a partir de dos relaciones una nueva relación combinando todas las n–tuplas de la primera relación con todas las n–tuplas de la segunda relación.

Casi todas las consultas a una base de datos relacional requieren varias operaciones para proporcionar la respuesta.

6.2.- Una lista enlazada es una relación.

Mediante un ejemplo se evidenciará como una lista enlazada es una relación.

Sea A un vector (matriz) de dimensión N que contiene nombres de personas, los que fueron colocados según el orden de llegada, sea P otro vector de la misma dimensión para guardar la dirección del siguiente nombre y sea X la variable que guarda la posición en donde inicia la tabla de nombres.

a) Si el orden en que llegan los nombres es: María, Juan, Ana, Pedro, Jaime ¿Cuál es el valor de la variable X y como quedarían los vectores A y P?

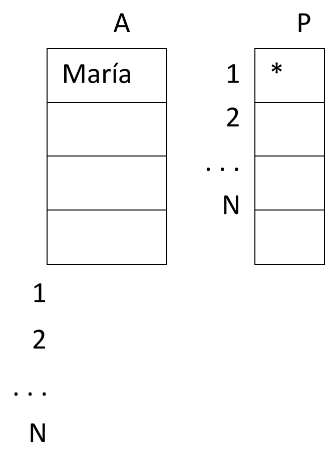
b) ¿Cuál es el dígrafo de la relación formada por los vectores A, P y la variable X?

c) Supóngase que se dan de alta los nombres: Benito y Luis y se da de baja a Juan ¿Cómo quedaría la información en los vectores y cuál es el dígrafo?

Solución de a)

Considérese que los vectores A y P están vacíos y que la variable que indica el inicio de la lista es X = * en donde * significa fin de la lista.

Al llegar el primer nombre los vectores quedan de la siguiente manera



X = 1

La variable X = 1 indica que el primer nombre de la lista está en la posición 1 del vector A. El * en P indica que ya no hay más nombres y ahí termina la lista.

Cuando llega el segundo nombre, los vectores tienen la siguiente información:

	A		P
	María	1	*
	Juan	2	1
		. . .	
		N	

1

2

. . .

N

X = 2

Como el nombre Juan se coloca alfabéticamente antes que María, ahora la variable que indica el inicio de la lista apunta a la posición de ese nombre X= 2. En esa posición pero para el arreglo P, se coloca el número 1 que indica que la posición del siguiente nombre a recorrer está en la posición 1 del vector A y el * en P significa que ahí termina la lista.

Al agregar los nombres de Ana, Pedro y Jaime los vectores quedan como se muestra a continuación:

	A		P
	María	1	4
	Juan	2	1
	Ana	3	5
	Pedro	4	*
	Jaime	5	2
		. . .	
		N	

1 2 3 4 5

. . .

N

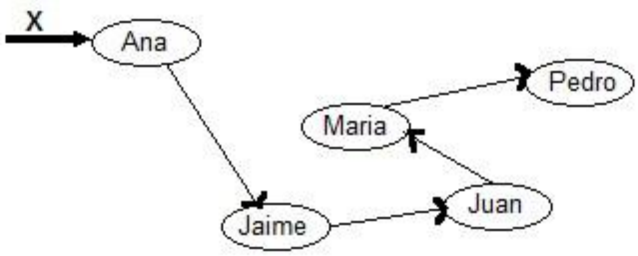
X = 3

Obsérvese que al colocar la información de esta forma es posible recorrerla en orden alfabético, permitiendo así un acceso más rápido. El primer nombre está en la posición 3 (X = 3 en el vector A), el que le sigue está en la posición 5 (Jaime) como lo indica el vector P. El que le sigue en la posición 2 (Juan) como lo indica el vector P y así sucesivamente hasta llegar al final de la lista indicado por *.

En el contexto de Estructura de Datos esta manera de arreglar la información se conoce como lista enlazada, ya que tiene la ventaja de que cuando se busque algo se encuentre de manera más eficiente. Por ejemplo si se busca el nombre de Jaime se encontrará en el segundo paso, ya que está inmediatamente después de Ana y no es necesario recorrer toda la lista. Si se buscará un nombre que no existe en el vector, por ejemplo Carlos, y si se hiciera un programa que además de recorrer la información, comparara alfabéticamente los nombres, en el segundo paso se mandaría el mensaje de que Carlos no está en la lista.

Esta lista enlazada es una relación en la que los nodos son los nombres de las personas y la flecha que relaciona los nodos es la información del arreglo P. Además de que se indica en dónde comienza el recorrido de la información.

Solución de b)



Solución de c)

Debe considerarse que cada vez que se da de alta un nuevo nombre (Benito y Luis), se llevan a cabo los ajustes necesarios en los apuntadores y cuando se da de baja a alguna persona simplemente se realiza la desconexión correspondiente (Juan).

Después de dar de alta los nombres de Benito y Luis, y de baja el de Juan, los vectores quedan de la siguiente manera:

A		P
María	1	4
Juan	2	1
Ana	3	6
Pedro	4	*

Jaime	5	7
Benito	6	5
Luis	7	1
	. . .	
	N	

1 2

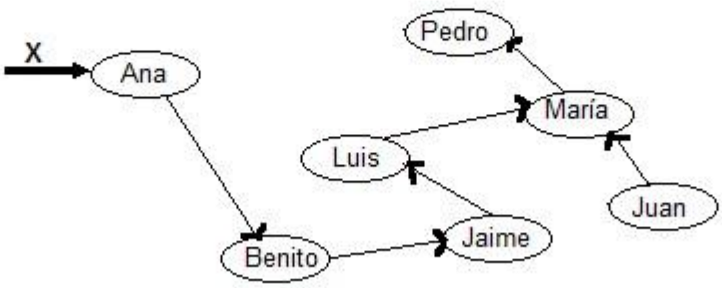
3 4 5 6 7

. . .

N

X = 3

Por otro lado el dígrafo queda de la siguiente manera:



En este dígrafo se puede observar que al desconectar el nodo Juan, no tiene ninguna flecha apuntando hacia él, y aunque él tiene una flecha que apunta hacia María ésta no importa ya que ella no produce ningún efecto. Para no desperdiciar espacio en memoria se puede guardar una lista de espacios disponibles y se pueden volver a ocupar cuando se necesiten, de forma que al lugar en donde esta Juan se le pondría una marca y posteriormente se ocuparía ese lugar para guardar otro nombre que se quisiera dar de alta.

Lo importante en este caso es observar que una lista enlazada es una relación. Pero aunque en los nodos solamente se presenta un dato, realmente puede ser el registro de un archivo o bien una fila de una tabla en donde no solo se tenga el nombre de la persona, sino otros datos como edad, dirección, código postal, etc. De esta forma al llegar al nombre de una persona, se puede acceder también a la información restante.