

EJERCICIO 2.a) - TP 2

Recurrencia: $T(n) = 3T(n/2) + n^2$

Resolución por Teorema Maestro. Caso 3

El caso 3 del teorema maestro es cuando, en una recurrencia de la forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

la función $f(n)$ crece **más rápido** que $n^{\log_b a}$

o sea, cuando el trabajo que se hace **fuera** de las llamadas recursivas domina al trabajo recursivo.

Formalmente

Se cumple si: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$

y además debe cumplirse la **condición de regularidad**:

$$af(n/b) \leq cf(n) \text{ para algún } c > 0$$

Si eso pasa, entonces: $T(n) = \Theta(f(n))$

Desarrollo

Comparamos con la forma general: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

Entonces:

- $a = 3$
- $b = 2$
- $f(n) = n^2$

Calculamos: $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3}$

Como: $\log_2 3 \approx 1.585 < 2$

entonces n^2 crece más rápido que $n^{\log_2 3}$.

Además: $3f\left(\frac{n}{2}\right) = 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}n^2$

$3n^2 \leq cn^2$ con $c = \frac{3}{4} < 1$ cumple la condición de regularidad.

Conclusión:

Caso 3 del Teorema Maestro $T(n) \in \Theta(n^2)$

Resolución por método iterativo

Recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 3T(n/2) + n^2 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Idea del método iterativo

En este método hacemos siempre lo mismo:

- tomamos la recurrencia,
- reemplazamos el término recursivo por la misma fórmula,
- repetimos varias veces,
- buscamos un patrón,
- armamos la fórmula general,
- y finalmente llevamos al caso base.

K=1

Partimos de la recurrencia original: $T(n) = 3T(n/2) + n^2$

Acá todavía no hicimos ningún reemplazo interno. Esta es la forma inicial.

$$T(n) = 3T(n/2) + n^2$$

Ahí la llamada pendiente es: $T(n/2)$

Para expandirla k= 2

Tomamos la misma recurrencia, pero aplicada al tamaño: $n/2$
O sea, donde antes decía n , ahora ponemos $n/2$

$$T(n/2) = 3T\left(\frac{n/2}{2}\right) + \left(\frac{n/2}{2}\right)^2$$
$$T(n/2) = 3T(n/4) + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$\frac{n/2}{2} = \frac{n}{2 \cdot 2} = \frac{n}{4}$

Y eso es lo que reemplazamos dentro de la fórmula original.

La llamada recursiva que quedó viva en la expresión anterior es $T(n/2)$.

Entonces, para seguir iterando:

- miramos qué llamada quedó,
- escribimos la recurrencia para esa llamada,
- y la sustituimos.

Regla práctica

En el método iterativo, en cada paso:

1. mirás cuál es el término recursivo que quedó,
2. le aplicás la misma recurrencia,
3. lo reemplazás.

En síntesis, para k=2:

Reemplazamos el término: $T(n/2)$

usando la misma recurrencia, pero evaluada en $n/2$

Primero escribimos la recurrencia para $n/2$

$$T(n/2) = 3T(n/4) + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Ahora sustituimos dentro de la original

Como:

$$T(n) = 3T(n/2) + n^2$$

reemplazamos $T(n/2)$
por la expresión
anterior:

$$T(n) = 3 \left[3T(n/4) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right] + n^2$$

distribuimos el 3

$$T(n) = 9T(n/4) + 3 \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2$$

entonces:

$$T(n) = 9T(n/4) + 3\frac{n^2}{4} + n^2$$

$$T(n) = 9T(n/4) + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

*resolvemos el
cuadrado

Para K=3

Ahora reemplazamos: $T(n/4)$

Escribimos la recurrencia para $n/4$

Sustituimos

$$T(n/4) = 3T(n/8) + \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

Partimos de:

$$T(n) = 9T(n/4) + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

Reemplazando $T(n/4)$:

$$T(n) = 9 \left[3T(n/8) + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \right] + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

distribuimos el 9

$$T(n) = 27T(n/8) + 9 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

entonces:

$$T(n) = 27T(n/8) + 9\frac{n^2}{16} + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

$$T(n) = 27T(n/8) + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{n^2}{16}$$

*resolvemos el
cuadrado

Para K=4

Ahora reemplazamos: $T(n/8)$

Escribimos la recurrencia para $n/8$

$$T(n/8) = 3T(n/16) + \left(\frac{n}{8}\right)^2$$

Sustituimos

Partimos de:

$$T(n) = 27T(n/8) + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

Reemplazando

$T(n/8)$:

$$T(n) = 27 \left[3T(n/16) + \left(\frac{n}{8}\right)^2 \right] + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

Distribuimos el 27

$$T(n) = 81T(n/16) + 27 \left(\frac{n}{8}\right)^2 + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

entonces:

$$T(n) = 81T(n/16) + 27 \frac{n^2}{64} + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^2 = \frac{n^2}{64}$$

$$T(n) = 81T(n/16) + \frac{27}{64}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

Buscar el patrón: Ahora miramos qué se repite.

En la parte recursiva

$$T(n) = 81T(n/16) + \frac{27}{64}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

Los **coeficientes** son: **3, 9, 27, 81**, para $k = 1, 2, 3, 4$. O sea $3^1, 9^2, 27^3, 81^4$. $\rightarrow 3^K$

Y los **argumentos** son: $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}, \frac{n}{16}$ es decir: $\frac{n}{2^k}$ ya que:

Para $k=1$: $T(n) = 3T(n/2) + n^2$

Para $k=2$: $T(n) = 9T(n/4) + \frac{3}{4}n^2 + n^2$

Para $k=3$: $T(n) = 27T(n/8) + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$

Para $K=4$: $T(n) = 81T(n/16) + \frac{27}{64}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$

O sea: $\frac{n}{2^1}, \frac{n}{2^2}, \frac{n}{2^3}, \frac{n}{2^4}$ entonces, después de k pasos: $3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right)$

En la parte no recursiva

$$T(n) = 81T(n/16) + \frac{27}{64}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \frac{3}{4}n^2 + n^2$$

Los coeficientes de n^2 son:
1, 3/4, 9/16, 27/64

Eso se puede escribir como:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^0, \left(\frac{3}{4}\right)^1, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \dots$$

Entonces toda esa suma queda:

$$n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

Fórmula general

Entonces, después de k expansiones:

$$T(n) = 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

Encontrar k :

Queremos llegar al caso base $T(1) = 1$ entonces imponemos $\frac{n}{2^k} \rightarrow n = 2^k$

Tomando logaritmo en base 2: $k = \log_2 n$

Reemplazar k en la fórmula general

Sustituimos: $T(n) = 3^{\log_2 n} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + n^2 \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$

$$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$$

$$T(n) = 3^{\log_2 n} T(1) + n^2 \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

como $T(1) = 1$

$$3^{\log_2 n} = n^{\log_2 3}$$

$$T(n) = 3^{\log_2 n} + n^2 \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

$$T(n) = n^{\log_2 3} + n^2 \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

Camino 1: reemplazar la sumatoria por una constante C

Éste es el camino más rápido para llegar al orden.

La suma: $\sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$ es geométrica, con razón: $\frac{3}{4} < 1$

Entonces queda acotada por un número fijo. Por eso podemos escribir:

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \leq C \quad \text{y entonces:} \quad T(n) = n^{\log_2 3} + Cn^2$$

Como: $\log_2 3 \approx 1.585 < 2$, el término dominante es n^2 .

Entonces:

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

¿Por qué se puede hacer?. Porque esa sumatoria no afecta el orden: su valor queda acotado y no cambia el crecimiento asintótico.

Camino 2: resolver la sumatoria y llegar a la expresión cerrada

Partimos de: $T(n) = n^{\log_2 3} + n^2 \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i$

Resolver la suma geométrica

Usamos la fórmula: $\sum_{i=0}^{k-1} r^i = \frac{r^k - 1}{r - 1}$ con:

- $r = \frac{3}{4}$
- $k = \log_2 n$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} - 1}{\frac{3}{4} - 1} \\ &= -4 \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} - 1 \right] \end{aligned}$$

Entonces:

$$T(n) = n^{\log_2 3} - 4n^2 \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} - 1 \right]$$

Reemplazando:

$$T(n) = n^{\log_2 3} - 4n^2 \left(\frac{n^{\log_2 3}}{n^2} - 1 \right)$$

Reemplazando:

Distribuimos:

$$T(n) = n^{\log_2 3} - 4n^{\log_2 3} + 4n^2$$

$$T(n) = 4n^2 - 3n^{\log_2 3}$$

$$\frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

Simplificamos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} = \frac{3^{\log_2 n}}{4^{\log_2 n}}$$

Ahora: $3^{\log_2 n} = n^{\log_2 3}$

y: $4^{\log_2 n} = n^{\log_2 4} = n^2$

porque: $\log_2 4 = 2$

Entonces:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} = \frac{n^{\log_2 3}}{n^2}$$