CAPÍTULO

1 Los fundamentos: lógica y demostración, conjuntos y funciones

En este capítulo se repasan los fundamentos de la matemática discreta. Se cubren tres importantes temas: lógica, conjuntos y funciones. Las reglas de la lógica especifican el significado de los enunciados matemáticos. Por ejemplo, estas reglas nos ayudan a entender y razonar enunciados como «Existe un entero que no es la suma de dos cuadrados» o «Para todo entero positivo n, la suma de enteros positivos que no sobrepasan n es $n(n + 1) / 2$». La lógica es la base de todo razonamiento matemático, y tiene aplicaciones prácticas en el diseño de equipos informáticos, la especificación de sistemas, la inteligencia artificial, la programación computacional, los lenguajes de programación y en otras áreas de ciencias de la computación, así como en otros muchos campos de estudio.

Para entender las matemáticas debemos entender qué es lo que constituye un argumento matemático correcto, es decir, una demostración. Además, para aprender matemáticas, una persona necesita construir activamente argumentos matemáticos, no limitarse a leer una exposición. En este capítulo explicamos cómo completar un argumento matemático correcto y presentamos herramientas para construir estos argumentos. Las demostraciones no son importantes sólo en matemáticas, sino en muchas partes de las ciencias de la computación, entre las que se incluyen verificación de programas, análisis de resultados de algoritmos y sistemas de seguridad. Se han construido sistemas de razonamiento automatizado que permiten a los ordenadores construir sus propias demostraciones.

Gran parte de la matemática discreta está dedicada al estudio de estructuras discretas, las cuales se usan para representar objetos discretos. Muchas estructuras discretas importantes se construyen utilizando conjuntos, que son colecciones de objetos. Entre las estructuras discretas construidas mediante conjuntos están las combinaciones, o colecciones desordenadas de objetos que se usan mucho en recuento; relaciones, o conjuntos de pares ordenados que representan dependencias entre objetos; grafos, que consisten en conjuntos de vértices y aristas que conectan vértices, y máquinas de estado finito, que se usan para modelar sistemas informáticos.

El concepto de función es extremadamente importante en matemática discreta. Una función asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento de otro conjunto. Estructuras útiles tales como sucesiones y cadenas son tipos especiales de funciones. Se usan para representar la complejidad computacional de los algoritmos, para estudiar el tamaño de los conjuntos, contar objetos de diferentes tipos y en una infinidad de casos más.

1.1 Lógica

INTRODUCCIÓN

Las reglas de la lógica le dan un significado preciso a los enunciados matemáticos o sentencias matemáticas. Estas reglas se usan para distinguir entre argumentos válidos y no válidos. Considerando que uno de los principales objetivos de este libro es enseñar al lector cómo entender y construir argumentos matemáticos correctos, empezamos nuestro estudio de la matemática discreta con una introducción a la lógica.

Además de su importancia en el razonamiento matemático, la lógica tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación. Las reglas de la lógica se usan en el diseño de circuitos de ordenador, la construcción de programas informáticos, la verificación de que un programa está bien construido y en muchas otras aplicaciones. Discutiremos cada una de ellas en los capítulos siguientes.

PROPOSICIONES

Nuestra discusión comienza con una introducción a la construcción de los bloques básicos de la lógica: las proposiciones. Una **proposición** es una oración declarativa que es correcta o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

EJEMPLO 1 Todas las siguientes oraciones declarativas son proposiciones:

1. Bruselas es la capital de la Unión Europea.
2. Toronto es la capital de Canadá.
3. $1 + 1 = 2$.
4. $2 + 2 = 3$.

Las proposiciones 1 y 3 son correctas, mientras que la 2 y 4 son falsas. ◀

En el siguiente ejemplo damos algunas oraciones que no son proposiciones.

EJEMPLO 2 Considera las siguientes oraciones:

1. ¿Qué hora es?
2. Lee esto con atención.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

Las frases 1 y 2 no son proposiciones porque no son declarativas. Las frases 3 y 4 no son proposiciones porque no son ni verdaderas ni falsas, ya que no se les han asignado valores a las variables. En la Sección 1.3 se verán varias formas de crear proposiciones a partir de frases de este tipo. ◀

Para denotar proposiciones usamos letras, al igual que usamos letras para denotar variables. Por convenio, las letras que se utilizan para denotar proposiciones son $p, q, r, s, \ldots$ El **valor de verdad** de una proposición es verdadero, y se denota por **V**, si es una proposición verdadera, o falso, denotado por **F**, si es una proposición falsa.

El área de la lógica que trata de proposiciones se llama **cálculo proposicional** o **lógica proposicional**. Fue desarrollada sistemáticamente por primera vez por el filósofo griego Aristóteles hace más de dos mil trescientos años.

Enlaces

Prestamos ahora nuestra atención a los métodos para producir proposiciones nuevas a partir de las ya existentes. Estos métodos fueron estudiados por el matemático inglés George Boole en 1854 en su libro *Las leyes del pensamiento*. Muchos enunciados matemáticos se construyen combinando una o más proposiciones. Las nuevas proposiciones, llamadas **fórmulas** o **proposiciones compuestas**, se forman a partir de las existentes usando operadores lógicos.

ARISTÓTELES (384 a.C.-322 a.C.) Aristóteles nació en Estargira, Macedonia, al norte de Grecia. Su padre fue médico personal del rey de Macedonia. Debido a que su padre murió siendo Aristóteles aún joven, no pudo seguir la costumbre de mantener la profesión de su padre. Quedó huérfano al morir su madre. Su cuidador le enseñó poesía, retórica y griego. A la edad de diecisiete años le envió a Atenas a continuar sus estudios. Aristóteles ingresó en la Academia, donde recibió lecciones de Platón durante veinte años. Más tarde fue él mismo profesor de retórica. Cuando Platón murió en el 347 a.C., Aristóteles no fue elegido para sucederle debido a que sus puntos de vista diferían demasiado de los de Platón. Así, Aristóteles ingresó en la corte del rey Hermías, donde permaneció durante tres años y se casó con la sobrina del rey. Cuando los persas destronaron a Hermías, Aristóteles se mudó a Mitilene, y por invitación del rey Filipo de Macedonia, fue tutor de Alejandro, hijo de Filipo, que llegó a ser conocido como Alejandro Magno. Aristóteles educó a Alejandro durante cinco años, y tras la muerte del rey Filipo, volvió a Atenas y estableció su propia escuela, llamada el Liceo.

Enlaces

Los seguidores de Aristóteles fueron llamados los peripatéticos, que significa «los que pasean», debido a que Aristóteles solía pasear mientras discutía cuestiones filosóficas. Aristóteles enseñó en el Liceo durante trece años, donde daba clases a sus estudiantes avanzados por la mañana y conferencias populares a una amplia audiencia por la tarde. Cuando Alejandro Magno murió en el 323 a.C., una reacción contra todo lo relacionado con él condujo a imputar a Aristóteles cargos por impío. Aristóteles huyo a Calcis para evitar ser procesado. Vivió en Calcis sólo un año, muriendo de una enfermedad estomacal en el 322 a.C.

Aristóteles escribió tres tipos de trabajos: escritos dirigidos a públicos populares, compilaciones de resultados científicos y tratados sistemáticos. Estos últimos incluyeron tratados de lógica, filosofía, psicología, física e historia natural. Uno de los alumnos de Aristóteles preservó sus escritos escondiéndolos en una cripta, donde un adinerado coleccionista de libros los descubrió doscientos años más tarde. Se llevaron a Roma, donde fueron estudiados por eruditos y reeditados, preservándolos para la posteridad.

DEFINICIÓN 1 Sea p una proposición. El enunciado

«No se cumple p»

es otra proposición, llamada la *negación* de p. La negación de p se denota mediante $\neg p$. La proposición $\neg p$ se lee «no p».

EJEMPLO 3 Obtén la negación del enunciado

«Hoy es viernes»

y exprésala del modo más simple posible.

Ejemplos adicionales

Solución: La negación es

«No se cumple que hoy es viernes».

Esta negación se puede expresar más simplemente por

«Hoy no es viernes»

o

«No es viernes hoy».

Tabla 1. La tabla de verdad para la negación de una proposición.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Observación: Hablando estrictamente, las oraciones relacionadas con tiempos variables como las del Ejemplo 3 no son proposiciones, a no ser que se asuma un tiempo fijo. Esto mismo es válido para lugares variables, a no ser que se fije un lugar determinado, y para pronombres, a no ser que se asuma una persona en particular.

Una **tabla de verdad** muestra las relaciones entre los valores de verdad de proposiciones. Las tablas de verdad son especialmente valiosas a la hora de determinar los valores de verdad de proposiciones construidas a partir de proposiciones más simples. La Tabla 1 muestra los dos posibles valores de verdad de una proposición p y los correspondientes valores de verdad de su negación $\neg p$.

La negación de una proposición se puede considerar como el resultado de aplicar el **operador negación** sobre una proposición. El operador negación construye una nueva proposición a partir de la proposición individual existente. Ahora introduciremos los operadores lógicos que se usan para formar nuevas proposiciones a partir de dos o más proposiciones ya creadas. Esos operadores lógicos se llaman también **conectivos lógicos**.

DEFINICIÓN 2 Sean p y q proposiciones. La proposición «p y q», denotada por $p \wedge q$, es la proposición que es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas y falsa en cualquier otro caso. La proposición $p \wedge q$ se llama *conjunción* de p y q.

La tabla de verdad para $p \wedge q$ se muestra en la Tabla 2. Observa que hay cuatro filas en esta tabla de verdad, una fila por cada posible combinación de valores de verdad para las proposiciones p y q.

EJEMPLO 4 Obtén la conjunción de las proposiciones p y q en el caso en que p es el enunciado «Hoy es viernes» y q es «Hoy llueve».

Solución: La conjunción de estas proposiciones, $p \wedge q$, es el enunciado «Hoy es viernes y hoy llueve». La proposición es verdadera los viernes con lluvia y es falsa cualquier día que no sea viernes y los viernes que no llueve. ◀

Tabla 2. Tabla de verdad de la conjunción de dos proposiciones.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3. Tabla de verdad de la disyunción de dos proposiciones.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DEFINICIÓN 3 Sean p y q proposiciones. La proposición «p o q», denotada por $p \vee q$, es la proposición que es falsa cuando tanto p como q son falsas y verdadera en cualquier otro caso. La proposición $p \vee q$ se llama *disyunción* de p y q.

La tabla de verdad para $p \vee q$ se muestra en la Tabla 3.

El uso del conectivo lógico *o* en una disyunción se asocia al significado en sentido inclusivo de la palabra *o* *. Una disyunción es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones es verdadera. Por ejemplo, el *o* en sentido inclusivo se emplea en el enunciado:

> «Los estudiantes que hayan cursado cálculo o ciencias de la computación pueden matricularse en esta clase.»

Con esta frase se quiere decir que los estudiantes que han cursado bien cálculo o bien ciencias de la computación pueden matricularse en la clase, así como los estudiantes que han cursado ambas asignaturas. Por otra parte, estamos usando el *o* exclusivo cuando decimos:

> «Los estudiantes que hayan cursado cálculo o ciencias de la computación, pero no ambos, pueden matricularse en esta clase».

Ahora se quiere expresar que aquellos que hayan cursado tanto cálculo como ciencias de la computación no pueden matricularse. Sólo pueden hacerlo aquellos que hayan cursado exactamente una de las dos asignaturas.

De forma similar, cuando en un menú de restaurante vemos «Se sirve sopa o ensalada como entrante», casi siempre se quiere decir que los clientes pueden tomar bien sopa o bien ensalada, pero no ambos. Por tanto, éste es un uso exclusivo no inclusivo de la disyunción *o*.

EJEMPLO 5 ¿Cuál es la disyunción de las proposiciones p y q en el caso en que p y q sean las proposiciones del Ejemplo 4?

GEORGE BOOLE (1815-1864) George Boole, hijo de un zapatero, nació en Lincoln, Inglaterra, en noviembre de 1815. Debido a la difícil situación financiera de su familia, Boole tuvo que sacrificarse educándose a sí mismo al mismo tiempo que mantenía a su familia. No obstante, llegó a ser uno de los más importantes matemáticos de su época. Aunque consideró hacer carrera como sacerdote, decidió dedicarse a la enseñanza y pronto montó su propia escuela. En su preparación para dar clases de matemáticas, Boole —insatisfecho con los libros de texto del momento— decidió leer los trabajos de los grandes matemáticos. Mientras leía los artículos del gran matemático francés Lagrange, Boole realizó descubrimientos en el cálculo de variaciones, la rama del análisis que trata de la búsqueda de curvas y superficies que optimizan ciertos parámetros.

Enlaces

En 1848 publicó *The Mathematical Analysis of Logic*, la primera de sus contribuciones a la lógica simbólica. En 1849 fue nombrado profesor de matemáticas en el Queen's College de Cork, Irlanda. En 1854 publicó *The Laws of Thought*, su trabajo más famoso. En este libro Boole presenta lo que actualmente se conoce como *Álgebra de Boole* en su honor. Boole escribió textos sobre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias que se usaron en Gran Bretaña hasta finales del siglo XIX. Boole se casó en 1855; su mujer era la sobrina del profesor de griego en el Queen's College. En 1864, Boole murió de neumonía, que contrajo como resultado de mantener el compromiso de dar una conferencia incluso a pesar de que estaba completamente empapado a causa de una tormenta.

* Nota del Traductor. La conjunción *o* puede también usarse con los significados «es decir», «esto es» u «o más bien». Estos sentidos se descartan en el texto.

Solución: La disyunción de p y q, $p \vee q$, es el enunciado

«Hoy es viernes u hoy llueve».

Esta proposición es verdadera cualquier día que sea viernes o llueva (incluidos los viernes que llueve). Es sólo falsa los días que ni son viernes ni llueve. ◀

Ejemplos adicionales

Como se señaló previamente, el uso del conectivo lógico *o* en una disyunción corresponde a uno de los dos sentidos de la palabra *o*, a saber, el modo inclusivo. Por tanto, una disyunción es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones en ella es verdadera. A veces usamos el *o* en sentido exclusivo. Cuando se usa el *o* en sentido exclusivo para conectar dos proposiciones p y q, obtenemos la proposición «p o q (pero no ambos)». Esta proposición es verdadera cuando p es verdadera y q falsa y cuando p es falsa y q verdadera. Es falsa cuando tanto p como q son falsas y cuando ambas son verdaderas.

DEFINICIÓN 4 Sean p y q proposiciones. El conectivo lógico *o exclusivo* de p y q, denotada por $p \oplus q$, es la proposición que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p y q es verdadera y es falsa en cualquier otro caso.

La tabla de verdad para el *o* exclusivo de dos proposiciones se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Tabla de verdad para el *o* exclusivo de dos proposiciones.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 5. Tabla de verdad de la implicación $p \to q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

IMPLICACIONES

Vamos a discutir otras formas importantes de combinar las proposiciones.

DEFINICIÓN 5 Sean p y q proposiciones. La *implicación* $p \to q$ es la proposición que es falsa cuando p es verdadera y q es falsa y verdadera en cualquier otro caso. En esta implicación p se llama *hipótesis* (o *antecedente* o *premisa*) y q se llama *tesis* o *conclusión* (o *consecuencia*).

Evaluación

La tabla de verdad para la implicación $p \to q$ se muestra en la Tabla 5. La implicación a veces se denomina **declaración condicional**.

Debido a que las implicaciones desempeñan un papel esencial en el razonamiento matemático, existen muchas formas de expresar $p \to q$. Encontrarás muchas de ellas, si no todas, entre las siguientes expresiones:

Ejemplos adicionales

«si p, entonces q»
«si p, q»
«p es suficiente para q»
«q si p»
«q cuando p»
«una condición necesaria para p es q»
«p implica q»
«p sólo si q»
«una condición suficiente para q es p»
«q siempre que p»
«q es necesario para p»
«q se deduce de p»

La implicación $p \to q$ es falsa sólo en el caso de que p sea verdadera y q sea falsa. Es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas y cuando p es falsa (no importa el valor de verdad de q).

Una forma útil de entender el valor de verdad de una implicación es pensar en una obligación o en un contrato. Por ejemplo, la promesa que muchos políticos hacen para ser votados es:

«Si soy elegido, bajaré los impuestos».

Si el político es elegido, los votantes esperarían del político que bajase los impuestos. Pero si el político no es elegido, entonces los votantes no esperarán que esa persona baje los impuestos, aunque pueda influir lo suficiente para conseguir que los que ostentan el cargo correspondiente bajen los impuestos. Sólo cuando el político es elegido y no baja los impuestos, pueden sus votantes decir que el político ha roto su promesa electoral. El último escenario corresponde al caso en que p es verdadera, pero q es falsa; por tanto, $p \to q$ es falsa.

De forma parecida, considera una afirmación en la que un profesor dice:

«Si consigues el ciento por ciento de la puntuación en el examen final, sacarás un sobresaliente».

Si consigues completar correctamente el ciento por ciento de las preguntas, entonces podrías esperar sacar un 10. Si no consigues el ciento por ciento, puedes o no sacar un sobresaliente dependiendo de otros factores. En cualquier caso, si completas el ciento por ciento, pero el profesor no te pone un sobresaliente, te sentirás engañado.

Mucha gente encuentra confuso el hecho de que «p sólo si q» exprese lo mismo que «si p entonces q». Para recordar esto, ten en cuenta que «p sólo si q» dice que p no puede ser verdadera cuando q no es verdadera. Esto es, el enunciado es falso si p es verdadera, pero q es falsa. Cuando p es falsa, q puede ser bien verdadera o bien falsa, porque la afirmación no dice nada acerca del valor de verdad de q. Un error común de la gente es pensar que «q sólo si p» es una forma de expresar $p \to q$. En cualquier caso, estos enunciados tienen valores de verdad distintos cuando p y q toman diferentes valores de verdad.

La forma en la que hemos definido la implicación es más general que el significado de la implicación en el lenguaje corriente. Por ejemplo, la implicación

«Si hoy hace sol, entonces iremos a la playa»

es una implicación usada comúnmente, ya que hay una relación entre la hipótesis y la conclusión. Además, esta implicación se considera válida, a no ser que precisamente hoy haga sol, pero que no vayamos a la playa. Por otra parte, la implicación

«Si hoy es viernes, entonces $2 + 3 = 5$»

es verdadera por la definición de implicación, ya que la conclusión es verdadera. (El valor de verdad de la hipótesis no importa pues). La implicación

«Si hoy es viernes, entonces $2 + 3 = 6$»

es verdadera para todos los días excepto los viernes, incluso aunque $2 + 3 = 6$ sea falsa.

No utilizamos estas dos últimas implicaciones en lenguaje natural (excepto quizá en algún sarcasmo), ya que no hay relación entre la hipótesis y la conclusión en ninguna de ellas. En los razonamientos matemáticos consideramos la implicación de una forma más general que en lenguaje natural. El concepto matemático de implicación es independiente de la relación causa-efecto entre hipótesis y conclusión. Nuestra definición de implicación especifica los valores de verdad; no se basa en el uso del lenguaje.

La construcción si-entonces se usa en muchos lenguajes de programación de forma diferente que en lógica. La mayoría de los lenguajes de programación contienen sentencias como **if** p **then** S, donde p es una proposición y S un segmento de programa (una o más sentencias sintácticamente bien construidas que deben ser ejecutadas). Cuando la ejecución del programa encuentra tal sentencia, se ejecuta S si p es verdadera, pero S no se ejecuta si p es falsa, como se ilustra en el Ejemplo 6.

EJEMPLO 6 ¿Cuál es el valor de la variable x tras la sentencia

if $2 + 2 = 4$ **then** $x := x + 1$

si $x = 0$ antes de llegar a la sentencia? (El símbolo := corresponde a la asignación. La sentencia $x := x + 1$ significa que a x se le asigna el valor $x + 1$).

Solución: Como $2 + 2 = 4$ es verdadera, se ejecuta la sentencia de asignación $x := x + 1$. Por tanto, x toma el valor $0 + 1 = 1$ tras la sentencia. ◀

RECÍPROCA, CONTRARRECÍPROCA E INVERSA Hay algunas implicaciones relacionadas con $p \to q$ que pueden formarse a partir de ella. La proposición $q \to p$ se llama **recíproca** de $p \to q$. La **contrarrecíproca** de $p \to q$ es $\neg q \to \neg p$. La proposición $\neg p \to \neg q$ es la **inversa** de $p \to q$.

La contrarrecíproca $\neg q \to \neg p$ de una implicación $p \to q$ tiene la misma tabla de verdad que $p \to q$. Para verlo, ten en cuenta que la contrarrecíproca es falsa sólo cuando $\neg p$ es falsa y $\neg q$ es verdadera, esto es, sólo cuando p es verdadera y q falsa. Por otra parte, ni la recíproca, $q \to p$, ni la inversa, $\neg p \to \neg q$, tienen los mismos valores de verdad que $p \to q$ para todos los posibles valores de p y q. Para ver esto, observa que cuando p es verdadera y q falsa, la implicación original (directa) es falsa, pero la recíproca y la inversa son ambas verdaderas. Cuando dos fórmulas tienen siempre los mismos valores de verdad las llamamos **equivalentes,** de tal forma que una implicación y su contrarrecíproca son equivalentes. La recíproca y la inversa de una implicación también son equivalentes, como el lector podrá verificar. (Estudiaremos las proposiciones equivalentes en la Sección 1.2). Uno de los errores más comunes en lógica es suponer que la recíproca o la inversa son equivalentes a la implicación directa.

Ilustraremos el uso de las implicaciones en el Ejemplo 7.

EJEMPLO 7 ¿Cuáles son las contrarrecíproca, recíproca e inversa de la implicación

«El equipo local gana siempre que llueve»?

Ejemplos adicionales

Solución: Como «q siempre que p» es una forma de expresar la implicación $p \to q$, la afirmación original se puede reescribir como

«Si llueve, entonces el equipo local gana».

Consecuentemente, la contrarrecíproca de esta implicación es

«Si el equipo local no gana, no llueve».

La recíproca es

«Si el equipo local gana, entonces llueve».

La inversa es

«Si no llueve, entonces el equipo local no gana».

Sólo el contrarrecíproco es equivalente a la afirmación original. ◀

Ahora presentamos otra forma de combinar proposiciones.

DEFINICIÓN 6 Sean p y q proposiciones. La *bicondicional*, o *doble implicación*, $p \leftrightarrow q$ es la proposición que es verdadera cuando p y q tienen los mismos valores de verdad y falsa en los otros casos.

Tabla 6. Tabla de verdad de la bicondicional $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$ se muestra en la Tabla 6. Observa que la doble implicación es verdadera precisamente cuando las implicaciones $p \to q$ y $q \to p$ son verdaderas. Debido a esto, la terminología

«p si, y sólo si, q»

se usa para esta bicondicional y simbólicamente se escribe combinando los símbolos $\to$ y $\leftarrow$. Hay otras formas en las que comúnmente se expresa $p \leftrightarrow q$:

«p es necesario y suficiente para q»
«si p, entonces q, y recíprocamente»
«p sii q».

La última forma de expresar la doble implicación usa la abreviatura «sii» para «si, y sólo si». Observa que $p \leftrightarrow q$ tiene exactamente los mismos valores de verdad que $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

EJEMPLO 8 Sea p la afirmación «Puedes tomar el vuelo» y sea q la afirmación «Compras un billete». Entonces, $p \leftrightarrow q$ es el enunciado

Ejemplos adicionales

«Puedes tomar el vuelo si, y sólo si, compras el billete».

Esta afirmación es verdadera si p y q son ambas verdaderas o ambas falsas, esto es, si compras un billete y puedes tomar el vuelo o si no compras el billete y no puedes tomar el vuelo. Es falsa cuando p y q tienen valores de verdad opuestos, es decir, cuando no compras el billete, pero puedes tomar el vuelo (consigues un vuelo gratis, por ejemplo), y cuando compras el billete y no puedes tomar el vuelo (la línea aérea te deja en tierra). ◀

La construcción «si, y sólo si» empleada en las dobles implicaciones raramente se usa en lenguaje natural. De hecho, las bicondicionales se expresan a menudo usando las construcciones «si, entonces» o «sólo si». La otra parte del «si, y sólo si» es implícita. Por ejemplo, consideremos la afirmación en el lenguaje natural «Si acabas tu comida, puedes tomar postre». Lo que realmente quiere decir es «Puedes tomar postre si, y sólo si, acabas tu comida». Esta última afirmación es equivalente desde el punto de vista lógico a las dos afirmaciones «Si acabas tu comida, entonces puedes tomar postre» y «Puedes tomar postre sólo si acabas tu comida». Debido a la imprecisión del lenguaje natural, necesitamos hacer una suposición si en una sentencia condicional en lenguaje cotidiano deseamos incluir implícitamente su recíproco. Como la precisión es esencial en las matemáticas y la lógica, siempre distinguiremos entre la sentencia condicional $p \to q$ y la sentencia bicondicional $p \leftrightarrow q$.

PRECEDENCIA DE OPERADORES LÓGICOS

Podemos construir fórmulas usando el operador negación y los operadores lógicos definidos hasta el momento. Generalmente, utilizaremos paréntesis para especificar el orden en el que deben aplicarse los operadores lógicos en una fórmula. Por ejemplo, $(p \vee q) \wedge (\neg r)$ es la conjunción de $p \vee q$ y $\neg r$. Sin embargo, para reducir el número de paréntesis, especificamos que el operador negación se aplica antes que los operadores lógicos. Esto significa que el operador negación $\neg p \wedge q$ es la conjunción de $\neg p$ y q, es decir, $(\neg p) \wedge q$, no la negación de la conjunción de p y q, es decir, $\neg (p \wedge q)$.

Tabla 7. Precedencia de los operadores lógicos.

Operador	*Precedencia*
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Otra regla general de precedencia es que el operador conjunción precede siempre al operador disyunción, de tal forma que $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$ y no $p \wedge (q \vee r)$. Debido a que esta regla es difícil de recordar, en el texto continuaremos usando paréntesis para que quede claro el orden utilizado en los operadores conjunción y disyunción.

Finalmente, es una regla aceptada que los operadores condicional $\rightarrow$ y bicondicional $\leftrightarrow$ tienen precedencia inferior que los operadores conjunción y disyunción, $\wedge$ y $\vee$. Consecuentemente, $p \vee q \rightarrow r$ es lo mismo que $(p \vee q) \rightarrow r$. Usaremos paréntesis cuando el orden de los operadores condicional y bicondicional se deba tener en cuenta, aunque el operador condicional tiene precedencia sobre el bicondicional. La Tabla 7 muestra los niveles de precedencia de los operadores lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

TRADUCCIÓN DE FRASES DEL LENGUAJE NATURAL

Hay muchas razones para traducir frases del lenguaje natural a expresiones con variables proposicionales y conectivos lógicos. Todos los lenguajes del ser humano son a menudo ambiguos. Trasladar frases a expresiones lógicas trae consigo evitar estas ambigüedades. Ten en cuenta que puede que esto conlleve hacer un conjunto de suposiciones razonables basadas en el sentido que se le dé a la frase. Por otra parte, una vez que hemos traducido frases del lenguaje natural a expresiones lógicas, podemos analizar estas expresiones lógicas para determinar sus valores de verdad, las podemos manipular y podemos usar las reglas de inferencia (que se discutirán en la Sección 1.5) para razonar sobre ellas. El paso del lenguaje natural al lenguaje formal se conoce como **formalización**.

Ejemplos adicionales

Para ilustrar el proceso de formalizar, consideraremos los Ejemplos 9 y 10.

EJEMPLO 9 ¿Cuál es la formalización de la siguiente frase?:

«Puedes acceder a Internet desde el campus sólo si estudias ciencias de la computación o no eres alumno de primero».

Solución: Hay muchas formas de formalizar esta frase. Aunque es posible representar la frase mediante una variable proposicional simple, como p, no sería útil para analizar su significado o razonar con ella. Así, utilizaremos variables proposicionales para representar cada parte de la oración y determinar los conectivos lógicos apropiados entre ellas. En particular, representaremos las frases «Puedes acceder a Internet desde el campus», «Estudias ciencias de la computación» y «Eres alumno de primero» por a, c y f, respectivamente. Considerando que «sólo si» es una forma de expresar una implicación, la frase se puede representar como

$$a \rightarrow (c \vee \neg f).$$

◀

EJEMPLO 10 ¿Cómo se puede formalizar la siguiente frase?:

«No puedes montar en la montaña rusa si mides menos de 1,20 metros, a no ser que seas mayor de dieciséis años».

Solución: De nuevo, hay muchas formas de formalizar esta frase. La más simple, pero menos útil, es representarla mediante una variable proposicional simple, como p. Aunque no es incorrecto, no sería eficiente para tratar de analizarla o razonar con ella. Lo más apropiado es usar variables proposicionales para representar partes de esa frase y decidir los conectivos lógicos entre ellas. En particular, si representamos por q, r y s, respectivamente, las frases «Puedes montar en la montaña rusa», «Mides menos de 1,20 metros» y «Eres mayor de dieciséis años», respectivamente, la frase se puede formalizar como

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q.$$

Por supuesto, hay otras formas de representar la frase inicial mediante expresiones lógicas, pero la que hemos usado se ajusta a nuestras necesidades. ◀

ESPECIFICACIONES DE SISTEMA

Traducir oraciones del lenguaje natural, como el español, a expresiones lógicas es una parte esencial de la especificación tanto de sistemas *hardware* como *software*. Los ingenieros de *software* y de sistemas reciben los requerimientos en lenguaje natural y producen especificaciones precisas y sin ambigüedades que pueden usarse como base para desarrollo de sistemas. El Ejemplo 11 muestra cómo se pueden utilizar las variables proposicionales en este proceso.

EJEMPLO 11 Expresa la especificación «La respuesta automatizada no se puede enviar cuando el sistema de archivos está lleno»

Ejemplos adicionales

Solución: Una forma posible de traducir esto es denotar como p a «La respuesta automatizada se puede enviar» y como q a «El sistema de archivos está lleno». Entonces, $\neg p$ representa a «No se cumple que la respuesta automatizada se pueda enviar», lo que se puede expresar como «La respuesta automatizada no se puede enviar». Consecuentemente, nuestra especificación se puede representar mediante la implicación $q \rightarrow \neg p$. ◀

Las especificaciones de sistema no deberían contener requerimientos que puedan entrar en conflicto. Si así fuese, no habría forma de desarrollar un sistema que cumpliese todas las especificaciones. Consecuentemente, las expresiones proposicionales que representan esas especificaciones necesitan ser **consistentes**. Esto es, debe haber una asignación de valores de verdad a las variables de las expresiones que haga a todas las expresiones verdaderas.

EJEMPLO 12 Determina si estas especificaciones de sistemas son consistentes:

«El mensaje de diagnóstico se almacena en un *buffer* o se vuelve a transmitir».
«El mensaje de diagnóstico no se almacena en el *buffer*».
«Si el mensaje de diagnóstico se almacena en el *buffer*, entonces se vuelve a transmitir».

Solución: Para determinar si estas expresiones son consistentes, primero las expresamos usando variables proposicionales. Denotemos a «El mensaje de diagnóstico se almacena en un *buffer*» como p y «El mensaje se vuelve a transmitir» como q. Las especificaciones se pueden escribir entonces como $p \vee q$, $\neg p$ y $p \rightarrow q$. Una asignación de valores de verdad que haga a las tres especificaciones verdaderas debe hacer p falsa para hacer $\neg p$ verdadera. Como queremos que $p \vee q$ sea verdadera, pero p debe ser falsa, q debe ser verdadera. Como $p \rightarrow q$ es verdadera cuando p es falsa y q verdadera, concluimos que estas especificaciones son consistentes, ya que las tres son verdaderas cuando p es falsa y q verdadera. Podríamos haber llegado a la misma conclusión usando una tabla de verdad para examinar las cuatro posibles asignaciones de valores de verdad a p y q. ◀

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 13 ¿Siguen siendo consistentes las especificaciones de sistema del Ejemplo 12 si se añade la especificación «El mensaje de diagnóstico no se vuelve a transmitir»?

Solución: Por los razonamientos del Ejemplo 12, las tres especificaciones de ese ejemplo son verdaderas sólo en el caso de que p sea falsa y q verdadera. Sin embargo, esta nueva especificación es $\neg q$, que es falsa cuando q es verdadera. Consecuentemente, estas cuatro especificaciones son inconsistentes. ◀

BÚSQUEDAS BOOLEANAS

Enlaces

Los conectivos lógicos tienen un amplio campo de aplicación en las búsquedas en grandes colecciones de información como, por ejemplo, los índices de páginas web. Como estas búsquedas emplean técnicas de lógica proposicional, se denominan **búsquedas booleanas**.

En las búsquedas booleanas se usa la conexión *AND* para emparejar datos almacenados que contengan los dos términos de búsqueda, la conexión *OR* se usa para emparejar uno o ambos términos de la búsqueda y la conexión *NOT* (a veces escrita *AND NOT*) se usa para excluir un término

Ejemplos adicionales

particular de búsqueda. Cuando se utilizan búsquedas booleanas para localizar información de potencial interés, se requiere con frecuencia una planificación detallada de cómo emplear los conectivos. El Ejemplo 14 ilustra cómo llevar a cabo búsquedas booleanas.

EJEMPLO 14 **Búsquedas en páginas web.** La mayoría de los programas de búsqueda en la web emplean técnicas de búsqueda booleana, las cuales nos pueden ayudar a encontrar páginas web sobre temas particulares. Por ejemplo, usando una búsqueda booleana para encontrar páginas web sobre una universidad en Nueva York, podemos buscar páginas que concuerden con NUEVA *AND* YORK *AND* UNIVERSIDAD. El resultado de esta búsqueda incluirá aquellas páginas que contengan las tres palabras NUEVA, YORK y UNIVERSIDAD. Incluirá todas las páginas de interés junto con otras acerca de alguna nueva universidad en York (Inglaterra). Posteriormente, para encontrar páginas que traten de una universidad en Nueva York o Boston, podemos buscar páginas que concuerden con (NUEVA *AND* YORK *OR* BOSTON) *AND* UNIVERSIDAD. (*Nota:* Aquí el operador *AND* tiene precedencia sobre el operador *OR*). El resultado de esta búsqueda incluirá todas las páginas que contengan la palabra UNIVERSIDAD y bien las palabras NUEVA y YORK o la palabra BOSTON. De nuevo, aparecerán páginas no deseadas. Finalmente, para encontrar páginas web que traten de una universidad en York (y no en Nueva York), debemos mirar las páginas que concuerdan con YORK y UNIVERSIDAD, pero como el resultado incluirá páginas acerca de alguna universidad en Nueva York, así como en York, se debería buscar aquellas páginas que concuerden con (YORK *AND* UNIVERSIDAD) *NOT* NUEVA. El resultado de esta búsqueda incluye páginas que contienen tanto la palabra YORK como UNIVERSIDAD, pero no contienen la palabra NUEVA. ◀

JUEGOS DE LÓGICA

Enlaces

Aquellos juegos que se pueden resolver usando el razonamiento lógico se conocen como juegos lógicos. Resolver juegos lógicos es una excelente forma de practicar con las reglas de la lógica. Hay programas de ordenador diseñados para desarrollar razonamiento lógico que a menudo utilizan juegos de lógica para ilustrar sus capacidades. Mucha gente se divierte resolviendo juegos de lógica que se publican en libros y revistas como actividad recreativa.

Discutiremos en este apartado dos juegos de lógica. Empezamos con uno que fue planteado inicialmente por Raymond Smullyan, un maestro de los juegos de lógica, que ha publicado más de una docena de libros con interesantes juegos relacionados con el razonamiento lógico.

EJEMPLO 15 En [Sm78] Smullyan planteó muchos juegos lógicos acerca de una isla con dos clases de habitantes: caballeros, que siempre dicen la verdad, y sus opuestos, villanos, que siempre mienten. Te encuentras a dos personas, A y B. ¿Qué son A y B si A dice «B es un caballero» y B dice «Los dos somos de clases opuestas»?

Ejemplos adicionales

Solución: Sean p y q las afirmaciones de que A es un caballero y B es un caballero, respectivamente, de tal forma que $\neg p$ y $\neg q$ son las afirmaciones de que A es un villano y B es un villano, respectivamente.

Consideramos primero la posibilidad de que A es un caballero; ésta es la afirmación de que p es verdadera. Si A es un caballero, entonces dice la verdad cuando dice que B es un caballero; por tanto, q es verdadera, y A y B son de la misma clase. Sin embargo, si B es un caballero, entonces la afirmación de B de que A y B son de clases opuestas, la afirmación $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ tendría que ser verdadera, lo que no se cumple, porque A y B son ambos caballeros. Consecuentemente, podemos concluir que A no es un caballero, es decir, p es falsa.

Si A es un villano, como todo lo que dice es falso, la afirmación de A de que B es un caballero, es decir, que q es verdadera, es una mentira, lo que significa que q es falsa y B es también un villano. Además, si B es un villano, la afirmación de B de que A y B son de clases opuestas es una mentira, lo que es consistente con que tanto A como B sean villanos. Concluimos, por tanto, que A y B son villanos. ◀

Tabla 8. Tabla de verdad para los operadores de bit *OR*, *AND* y *XOR*.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Planteamos más juegos de lógica de Smullyan sobre caballeros y villanos en los Problemas 51-55 al final de la sección. A continuación, planteamos un juego de lógica conocido como el **juego de los chicos con barro** para el caso de dos chicos.

EJEMPLO 16 Un padre le dice a sus dos hijos, un chico y una chica, que jueguen en el jardín sin ensuciarse. Sin embargo, jugando, los dos se manchan la frente de barro. Cuando los chicos acaban de jugar, su padre dice «Al menos uno de vosotros se ha manchado la frente de barro» y entonces le pide a los chicos que respondan «Sí» o «No» a la pregunta: «¿Sabes si tienes la frente manchada de barro?». El padre hace la pregunta dos veces. ¿Qué responderán los chicos cada vez que el padre hace la pregunta suponiendo que un chico puede ver si su hermano o hermana se ha manchado la frente, pero no puede verse la suya? Suponemos que los chicos son honestos y que responden simultáneamente a cada pregunta.

Solución: Sea s la afirmación de que el hijo se ha manchado la frente y sea d la afirmación de que la hija se ha manchado la frente. Cuando el padre dice que al menos uno de los dos chicos se ha manchado la frente está afirmando que la disyunción $s \vee d$ es verdadera. Ambos chicos responderán «No» la primera vez que se les hace la pregunta porque cada uno sólo ve barro en la frente del otro. Esto es, el hijo sabe que d es verdadera, pero no sabe si s es verdadera, y la hija sabe que s es verdadera, pero no sabe si d es verdadera.

Una vez que el hijo ha respondido «No» a la primera pregunta, la hija puede determinar que d debe ser verdadera. Esto es así porque cuando se hace la primera pregunta, el hijo sabe que $s \vee d$ es verdadera, pero no puede determinar si s es verdadera. Usando esta información, la hija puede concluir que d debe ser verdadera, ya que si d fuese falsa, el hijo podría haber razonado que debido a que $s \vee d$ es verdadera, entonces s debe ser verdadera, y él habría respondido «Sí» a la primera pregunta. El hijo puede razonar de la misma forma para determinar que s debe ser verdadera. De aquí se sigue que la respuesta de ambos chicos es «Sí» a la segunda pregunta. ◀

Enlaces

RAYMOND SMULLYAN (nacido en 1919) Raymond Smullyan abandonó sus estudios de bachillerato. Quería estudiar lo que realmente le interesaba y no el programa oficial de estudios de bachillerato. Tras intentarlo en varias universidades, consiguió una plaza en la Universidad de Chicago en 1955. Pagó sus estudios haciendo trucos de magia en fiestas y clubes. Se doctoró en Lógica en 1959 en Princeton, siendo estudiante de Alonzo Church. Tras graduarse en Princeton, enseñó matemáticas en el Dartmouth College, la Universidad de Princeton, la Universidad Yeshiva y la City University de Nueva York. Ingresó en el departamento de filosofía de la Universidad de Indiana en 1981, donde es ahora profesor emérito.

Smullyan ha escrito muchos libros de lógica recreativa y matemáticas, incluyendo *Satán, Cantor y el Infinito; ¿Cómo se titula este libro?; ¿La dama o el tigre?; Alicia en el país de los juegos de lógica; Burlarse del pájaro burlón; Indeciso para siempre*, y *El acertijo de Sherezade: Juegos lógicos apasionantes, antiguos y modernos*. Debido a lo apasionante de sus juegos de lógica, lo entretenido y lo mucho que invitan a pensar, es considerado como el Lewis Carroll actual. Smullyan ha escrito también varios libros acerca de la aplicación de la lógica deductiva al ajedrez, tres colecciones de ensayos filosóficos y aforismos y varios libros avanzados sobre lógica matemática y teoría de conjuntos. Está particularmente interesado en la autorreferencia y ha trabajado en extender algunos de los resultados de Gödel que muestran que es imposible escribir un programa de ordenador que pueda resolver todos los problemas de las matemáticas. Está también particularmente interesado en explicar ideas de lógica matemática al público general.

Smullyan es un músico con talento y a menudo toca el piano con su mujer, concertista de piano. Una de sus aficiones es hacer telescopios. También se interesa en óptica y estéreo fotografía. Afirma que «nunca he tenido conflictos entre la enseñanza y la investigación como algunas personas, porque yo, mientras enseño, hago investigación».

LÓGICA Y OPERACIONES CON BITS

Valor verdad	*Bit*
V	1
F	0

Los ordenadores representan la información usando bits. Un **bit** tiene dos valores posibles: 0 (cero) y 1 (uno). El significado de la palabra bit viene de la expresión inglesa b*inary dig*it, ya que ceros y unos son los dígitos usados en las representaciones binarias de los números. El famoso estadístico John Tukey introdujo esta terminología en 1946. Un bit se puede utilizar para representar un valor de verdad, ya que dos son los valores de verdad: verdadero y falso. Como se suele hacer, usaremos el bit 1 para representar el valor verdadero y 0 para el falso; esto es, 1 representa V (verdadero) y 0 representa F (falso). Una variable se llama **variable booleana** si su valor es verdadero o falso. Por consiguiente, una variable booleana se puede representar usando un bit.

Enlaces

Las **operaciones con bits** en el ordenador se corresponden con los conectivos lógicos. Reemplazando el valor verdadero por 1 y el valor falso por 0 en las tablas de verdad de los operadores $\wedge$, $\vee$ y $\oplus$, se obtienen las tablas presentadas en la Tabla 8 para las correspondientes operaciones con bits. Utilizaremos las expresiones *OR*, *AND* y *XOR* para los operadores $\wedge$, $\vee$ y $\oplus$, respectivamente, como se hace en varios lenguajes de programación.

A menudo se representa información usando cadenas de bits, que son sucesiones de ceros y unos. En este caso, se pueden utilizar operaciones sobre cadenas de bits para manipular esta información.

DEFINICIÓN 7 Una *cadena de bits* es una sucesión de cero o más bits. La longitud de esta cadena es el número de bits de la cadena.

EJEMPLO 17 101010011 es una cadena de bits de longitud nueve. ◀

Podemos extender las operaciones con bits a cadenas de bits. Definimos las **operaciones bit *OR*, *AND* y *XOR*** de dos cadenas de la misma longitud como aquellas operaciones cuyo resultado es una nueva cadena cuyos bits son el resultado de aplicar las operaciones *OR*, *AND* y *XOR* a los correspondientes bits de cada una de las dos cadenas. Usamos los símbolos $\vee$, $\wedge$ y $\oplus$ para representar las operaciones bits correspondientes. Ilustramos el uso de estas operaciones con cadenas de bits en el Ejemplo 18.

EJEMPLO 18 Aplica las operaciones bits *OR*, *AND* y *XOR* a las cadenas 01 1011 0110 y 11 0001 1101. (Aquí, y a lo largo de todo el texto, las cadenas de bits se dividirán en grupos de cuatro bits para facilitar su lectura).

JOHN WILDER TUKEY (1915-2000) Tukey, nacido en New Bedford, Massachusetts, Estados Unidos, fue hijo único. Sus padres, ambos profesores, decidieron que una educación en casa desarrollaría mejor su potencial. Su educación formal empezó en la Universidad de Brown, donde estudió matemática y química. Se graduó en química en la Universidad de Brown y continuó sus estudios en la Universidad de Princeton, cambiando de la química a las matemáticas. Hizo la tesis doctoral en esta Universidad en 1939 con un trabajo en topología, tras lo que fue nombrado profesor de matemáticas en Princeton. Cuando estalló la Segunda Guerra Mundial, se enroló en la Oficina para Investigación en el Control de Incendios, donde empezó a trabajar en estadística. Tukey se interesó por la investigación en estadística e impresionó a varios estadísticos importantes con su capacidad. En 1945, al concluir la guerra, volvió a Princeton como profesor de estadística, y también consiguió un puesto en los Laboratorios AT&T Bell. Fundó el Departamento de Estadística en Princeton en 1966, siendo su primer responsable. Hizo muchas contribuciones importantes en el área de la estadística, incluyendo análisis de varianza, estimación de espectros de series temporales, inferencia sobre los valores de un conjunto de parámetros en un experimento único y filosofía de la estadística. Sin embargo, por lo que es más conocido es por su invención, junto con J. W. Cooley, de la transformada rápida de Fourier.

Enlaces

Tukey contribuyó con su perspicacia y experiencia al Comité Asesor Presidencial para la Ciencia de Estados Unidos. Fue presidente de varios comités importantes para medio ambiente, educación y salud y productos químicos. También participó en comités de trabajo en desarme nuclear. Recibió muchos premios, entre ellos la Medalla Nacional de la Ciencia.

RESEÑA HISTÓRICA Se sugirieron otras palabras para denominar al dígito binario, incluyendo *binit* y *bigit*, que no llegaron a aceptarse universalmente. La adopción de la palabra *bit* puede deberse a que tiene significado por sí misma como palabra en inglés. Para conocer cómo se acuñó la palabra *bit*, véase el número de abril de 1984 de la revista *Annals of the History of Computing*.

Solución: Los resultados de las operaciones bit *OR*, *AND* y *XOR* se obtienen aplicando los operadores *OR*, *AND* y *XOR* a los correspondientes bit. Esto nos da

01 1011 0110	
11 0001 1101	
11 1011 1111	operación *OR*
01 0001 0100	operación *AND*
10 1010 1011	operación *XOR*

Problemas

1. ¿Cuáles de estas frases son proposiciones? ¿Cuál es el valor de verdad de aquellas que son proposiciones?

a) Boston es la capital de Massachusetts.
b) Buenos Aires es la capital de Argentina.
c) $2 + 3 = 5$.
d) $5 + 7 = 10$.
e) $x + 2 = 11$.
f) Responde a esta pregunta.
g) $x + y = y + x$ para todo par de números reales x e y.

2. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones? ¿Cuál es el valor de verdad de aquellas que son proposiciones?

a) No pasar.
b) ¿Qué hora es?
c) No hay moscas en Maine.
d) $4 + x = 5$.
e) $x + 1 = 5$ si $x = 1$.
f) $x + y = y + z$ si $x = z$.

3. ¿Cuál es la negación de cada uno de estos enunciados?

a) Hoy es jueves.
b) No hay polución en Nueva Jersey.
c) $2 + 1 = 3$.
d) El verano de Veracruz es cálido y soleado.

4. Sean p y q los enunciados

p: Compré un billete de lotería esta semana.
q: Gané el bote de un millón de euros del viernes.

Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.

a) $\neg p$ b) $p \vee q$ c) $p \to q$
d) $p \wedge q$ e) $p \leftrightarrow q$ f) $\neg p \to \neg q$
g) $\neg p \wedge \neg q$ h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

5. Sean p y q los enunciados «Está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey» y «Se han divisado tiburones cerca de la costa», respectivamente. Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.

a) $\neg q$ b) $p \wedge q$ c) $\neg p \vee q$
d) $p \to \neg q$ e) $\neg q \to p$ f) $\neg p \to \neg q$
g) $p \leftrightarrow \neg q$ h) $\neg p \wedge (p \vee q)$

6. Sean p y q los enunciados «La elección se decide» y «Se han contado los votos», respectivamente. Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.

a) $\neg p$ b) $p \vee q$ c) $\neg p \wedge q$
d) $q \to p$ e) $\neg q \to \neg p$ f) $\neg p \to \neg q$
g) $p \leftrightarrow q$ h) $\neg q \vee (\neg p \wedge q)$

7. Sean p y q los enunciados

p: Estamos bajo cero.
q: Nieva.

Escribe los enunciados siguientes usando p, q y conectivos lógicos:

a) Estamos bajo cero y nieva.
b) Estamos bajo cero, pero no nieva.
c) No estamos bajo cero y no nieva.
d) Bien estamos bajo cero o bien nieva (o ambas cosas).
e) Si estamos bajo cero, entonces también nieva.
f) Estamos bajo cero o nieva, pero no nieva si estamos bajo cero.
g) Que estemos bajo cero es necesario y suficiente para que nieve.

8. Sean p, q y r los enunciados

p: Tienes fiebre.
q: Suspendes el examen final.
r: Apruebas el curso.

Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.

a) $p \to q$ b) $\neg q \leftrightarrow r$
c) $q \to \neg r$ d) $p \vee q \vee r$
e) $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$
f) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

9. Sean p y q los enunciados

p: Conduces a más de 100 km por hora.
q: Te multan por exceso de velocidad.

Escribe los enunciados siguientes usando p, q y conectivos lógicos.

a) No conduces a más de 100 km por hora.
b) Conduces a más de 100 km por hora, pero no te multan por exceso de velocidad.

c) Te multarán por exceso de velocidad si conduces a más de 100 km por hora.
d) Si no conduces a más de 100 km por hora no te multarán por exceso de velocidad.
e) Conducir a más de 100 km por hora es suficiente para que te multen por exceso de velocidad.
f) Te multan por exceso de velocidad, pero no conduces a más de 100 km por hora.
g) Siempre que te multan por exceso de velocidad conduces a más de 100 km por hora.

10. Sean p, q y r los enunciados

p: Tienes un 10 en el examen final.
q: Haces todos los problemas del libro.
r: Tienes un 10 en esta asignatura.

Expresa estos enunciados usando p, q, r y conectivos lógicos.

a) Tienes un 10 en el examen final, pero no haces todos los problemas del libro.
b) Tienes un 10 en el examen final, haces todos los problemas del libro y tienes un 10 en esta asignatura.
c) Para tener un 10 en esta asignatura es necesario tener un 10 en el examen final.
d) Tienes un 10 en el examen final, pero no haces todos los problemas del libro; no obstante, tienes un 10 en esta asignatura.
e) Tener un 10 en el examen final y hacer todos los problemas del libro es suficiente para tener un 10 en esta asignatura.
f) Tendrás un 10 en esta asignatura si, y sólo si, tienes un 10 en el examen final o haces todos los problemas del libro.

11. Sean p, q y r los enunciados

p: Se han visto osos pardos por la zona.
q: Es seguro caminar por el sendero.
r: Las bayas del sendero están maduras.

Expresa estos enunciados usando p, q, r y conectivos lógicos.

a) Las bayas del sendero están maduras, pero no se han visto osos pardos por la zona.
b) No se han visto osos pardos por la zona y es seguro caminar por el sendero, pero las bayas del sendero están maduras.
c) Si las bayas del sendero están maduras, es seguro caminar por el sendero si, y sólo si, no se han visto osos pardos por la zona.
d) No es seguro caminar por el sendero, pero no se han visto osos pardos por la zona y las bayas del sendero están maduras.
e) Para que sea seguro caminar por el sendero, es necesario, pero no suficiente, que las bayas del sendero no estén maduras y que no se hayan visto osos pardos por la zona.
f) No es seguro caminar por el sendero cuando se han visto osos pardos por la zona y las bayas del sendero están maduras.

12. Determina si estas bicondicionales son verdaderas o falsas.

a) $2 + 2 = 4$ si, y sólo si, $1 + 1 = 2$.
b) $1 + 1 = 2$ si, y sólo si, $2 + 3 = 4$.
c) Es invierno si, y sólo si, no es primavera, verano u otoño.
d) $1 + 1 = 3$ si, y sólo si, los cerdos vuelan.
e) $0 > 1$ si, y sólo si, $2 > 1$.

13. Determina si estas implicaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $1 + 1 = 2$, entonces $2 + 2 = 5$.
b) Si $1 + 1 = 3$, entonces $2 + 2 = 4$.
c) Si $1 + 1 = 3$, entonces $2 + 2 = 5$.
d) Si los cerdos vuelan, entonces $1 + 1 = 3$.
e) Si $1 + 1 = 3$, entonces Dios existe.
f) Si $1 + 1 = 3$, entonces los cerdos vuelan.
g) Si $1 + 1 = 2$, entonces los cerdos vuelan.
h) Si $2 + 2 = 4$, entonces $1 + 2 = 3$.

14. Determina en cada una de estas frases si el *o* es inclusivo o exclusivo. Razona tu respuesta.

a) Se requiere experiencia con Java o C++.
b) La comida incluye ensalada o sopa.
c) Para entrar en este país necesitas pasaporte o tarjeta de votante.
e) Publica o perece.

15. Di qué significan cada una de estas frases en los casos en que el *o* es inclusivo (es decir, una disyunción) o bien exclusivo. ¿Cuál crees que es el significado que se quiere expresar realmente en cada caso?

a) Para matricularte en matemática discreta debes haber cursado una asignatura de cálculo o alguna asignatura de informática.
b) Cuando te compras un vehículo de marca Acme, te devuelven 2 000 $ en efectivo o el 2% del préstamo solicitado.
c) La cena para dos incluye dos platos de la columna A o tres de la columna B.
d) El colegio se cierra si caen más de 50 cm de nieve o si el viento helado baja de −20 °C.

16. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «si p, entonces q». (*Indicación:* Básate en la lista de formas comunes de expresar una implicación proporcionada en esta sección).

a) Es necesario lavar el coche del jefe para ascender.
b) Viento del sur implica deshielo en primavera.
c) Una condición suficiente para que la garantía sea válida es que hayas comprado el ordenador hace menos de un año.
d) A Guillermo siempre se le pilla cuando hace trampas.
e) Puedes acceder a la página web si pagas una cuota de suscripción.
f) Ser elegido es consecuencia de conocer a la gente adecuada.
g) Carol se marea siempre que monta en una barca.

17. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «si p, entonces q». (*Indicación:* Básate en la lista de formas comunes de expresar una implicación proporcionada en esta sección).

a) Nieva siempre que el viento sopla del noreste.
b) El manzano florecerá si el tiempo se mantiene cálido durante una semana.
c) Que los Pistons ganen el campeonato implica que vencieron a los Lakers.
d) Es necesario andar 12 km para llegar a la cima del pico.
e) Para ser profesor fijo es suficiente con ser mundialmente famoso.
f) Si conduces más de 600 km seguidos, necesitarás repostar gasolina.
g) Tu garantía es válida sólo si compraste el reproductor de CD hace menos de 90 días.

18. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «si p, entonces q». (*Indicación:* Básate en la lista de formas comunes de expresar una implicación proporcionada en esta sección).

a) Recordaré enviarte la dirección sólo si me mandas un correo electrónico.
b) Para ser ciudadano de un país es necesario haber nacido en él.
c) Si conservas este texto, te será muy útil en los cursos siguientes.
d) Los Red Wings ganarán la copa de hockey sobre hielo si el portero juega bien.
e) Que consigas el trabajo implica que tienes las mejores credenciales.
f) La playa se erosiona siempre que azota una tormenta.
g) Es necesario tener una clave válida para acceder al servidor.

19. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma « p si, y sólo si, q».

a) Si hace calor fuera, te compras un cucurucho de helado, y si te compras un cucurucho de helado, hace calor fuera.
b) Para ganar el concurso es necesario y suficiente tener el número ganador.
c) Ascenderás sólo si tienes contactos, y tienes contactos sólo si asciendes.
d) Si ves televisión, tu mente se empobrecerá, y recíprocamente.
e) El tren llega con retraso exactamente aquellos días que tengo que tomarlo.

20. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «p si, y sólo si, q».

a) Para sacar un 10 en este curso es necesario y suficiente que aprendas a resolver problemas de matemática discreta.
b) Si lees el periódico a diario, estarás informado, y recíprocamente.
c) Llueve si es fin de semana, y es fin de semana si llueve.
d) Sólo puedes ver al mago si no está, y el mago no está sólo si puedes verlo.

21. Enuncia la recíproca, contrarrecíproca e inversa de cada una de estas implicaciones.

a) Si nieva hoy, esquiaré mañana.
b) Voy a clase siempre que vaya a haber un control.
c) Un entero positivo es primo si, y sólo si, no tiene otros divisores más que 1 y él mismo.

22. Enuncia la recíproca, contrarrecíproca e inversa de cada una de estas implicaciones.

a) Si llueve esta noche, me quedaré en casa.
b) Voy a la playa siempre que el día amanezca soleado.
c) Cuando me acuesto tarde, es necesario que duerma hasta mediodía.

23. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $p \wedge \neg p$ b) $p \vee \neg p$
c) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$ d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
e) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

24. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $p \rightarrow \neg p$ b) $p \leftrightarrow \neg p$
c) $p \oplus (p \vee q)$ d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
e) $(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
f) $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$

25. Construye las tablas de verdad de cada una de estas fórmulas.

a) $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$
b) $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$
c) $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$
d) $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$
e) $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
f) $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$

26. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $p \oplus p$ b) $p \oplus \neg p$
c) $p \oplus \neg q$ d) $\neg p \oplus \neg q$
e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$
f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

27. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $p \rightarrow \neg q$ b) $\neg p \leftrightarrow q$
c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$
d) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$
f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

28. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $(p \vee q) \vee r$ b) $(p \vee q) \wedge r$
c) $(p \wedge q) \vee r$ d) $(p \wedge q) \wedge r$
e) $(p \vee q) \wedge \neg r$ f) $(p \wedge q) \vee \neg r$

29. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $p \to (\neg q \vee r)$
b) $\neg p \to (q \to r)$
c) $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$
d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$
f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

30. Construye la tabla de verdad de la fórmula $((p \to q) \to r) \to s$.

31. Construye la tabla de verdad de la fórmula $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$.

32. ¿Cuál es el valor de x tras ejecutar las siguientes sentencias en ordenador si $x = 1$ antes de que se llegase a ella?

a) **if** $1 + 2 = 3$ **then** $x := x + 1$
b) **if** $(1 + 1 = 3)$ *OR* $(2 + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$
c) **if** $(2 + 3 = 5)$ *AND* $(3 + 4 = 7)$ **then** $x := x + 1$
d) **if** $(1 + 1 = 2)$ *XOR* $(1 + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$
e) **if** $x < 2$ **then** $x := x + 1$

33. Determina el resultado de ejecutar las operaciones bits *OR*, *AND* y *XOR* con cada uno de los siguientes pares de cadenas de bits:

a) 101 1110, 010 0001
b) 1111 0000, 1010 1010
c) 00 0111 0001, 10 0100 1000
d) 11 1111 1111, 00 0000 0000

34. Evalúa las siguientes expresiones:

a) $1\,1000 \wedge (0\,1011 \vee 1\,1011)$
b) $(0\,1111 \wedge 1\,0101) \vee 0\,1000$
c) $(0\,1010 \oplus 1\,1011) \oplus 0\,1000$
d) $(1\,1011 \vee 0\,1010) \wedge (1\,0001 \vee 1\,1011)$

La **lógica difusa** o **borrosa** se usa en inteligencia artificial. En lógica difusa, una proposición tiene un valor de verdad que es un número comprendido entre 0 y 1, ambos incluidos. Una proposición con un valor de verdad 0 es falsa y con un valor 1 es verdadera. Los valores entre 0 y 1 indican grados de verdad. Por ejemplo, el valor de verdad 0,8 se puede asignar a la sentencia «Alfredo está feliz», ya que Alfredo está feliz la mayor parte del tiempo, y el valor de verdad 0,4 se asignará a la sentencia «Juan está feliz» cuando Juan esté feliz un poco menos de la mitad del tiempo.

35. El valor de verdad de la negación de una proposición en lógica difusa es 1 menos el valor de verdad de la proposición. ¿Cuáles son los valores de verdad de las afirmaciones «Alfredo no está feliz» y «Juan no está feliz»?

36. El valor de verdad en lógica difusa de la conjunción de dos proposiciones es el mínimo de los valores de verdad de las dos. ¿Cuál el valor de verdad de las frases «Alfredo y Juan están felices» y «Ni Alfredo ni Juan están felices»?

37. El valor de verdad de la disyunción de dos proposiciones en lógica difusa es el máximo de los valores de verdad de las dos proposiciones. ¿Cuál el valor de verdad de las frases «Alfredo está feliz o Juan está feliz» y «Alfredo no está feliz o Juan no está feliz»?

***38.** ¿Es la sentencia «Esta afirmación es falsa» una proposición?

***39.** La sentencia n-ésima de una lista de 100 sentencias es «Exactamente n de las sentencias de esta lista son falsas».

a) ¿Qué conclusiones se pueden derivar de estas sentencias?
b) Responde el apartado (a) si la sentencia n-ésima es «Al menos n de las sentencias de la lista son falsas».
c) Responde el apartado (b) suponiendo que la lista contiene 99 sentencias.

40. Una antigua leyenda siciliana dice que el barbero de una remota ciudad, a la que sólo se puede llegar a través de un peligroso camino de montaña, afeita a aquellas personas, y sólo a aquellas personas, que no se afeitan a sí mismas. ¿Puede existir tal barbero?

41. Cada uno de los habitantes de una aldea remota dice siempre la verdad o siempre miente. Un aldeano siempre dará un «Sí» o «No» por respuesta a las preguntas de los turistas. Supón que eres un turista que visita la zona y encuentras una bifurcación en el camino. Una dirección conduce a las ruinas que quieres visitar. La otra dirección conduce a la jungla profunda. Un aldeano se encuentra en la bifurcación del camino. ¿Qué pregunta debes hacerle al aldeano para averiguar la dirección correcta?

42. Un explorador es capturado por un grupo de caníbales. Hay dos clases de caníbales: aquellos que siempre dicen la verdad y aquellos que siempre mienten. Los caníbales se cenarán al explorador a menos que éste pueda determinar si un caníbal en particular dice siempre la verdad o siempre miente. Al explorador le permiten que haga exactamente una pregunta a uno de los caníbales.

a) Explica por qué la pregunta «¿Eres un mentiroso?» no va a funcionar.
b) Encuentra una pregunta que el explorador pueda usar para determinar si el caníbal dice siempre la verdad o siempre miente.

43. Expresa las siguientes especificaciones de sistema utilizando las proposiciones p, «El mensaje es revisado para buscar algún virus», y q, «El mensaje fue enviado desde un sistema desconocido», junto con conectivos lógicos.

a) «El mensaje se revisa para buscar algún virus siempre que haya sido enviado desde un sistema desconocido».
b) «El mensaje fue enviado desde un sistema desconocido, pero no se revisó para buscar ningún virus».
c) «Es necesario revisar el mensaje para buscar algún virus siempre que haya sido enviado desde un sistema desconocido».

d) «Cuando el mensaje no sea enviado desde un sistema desconocido no se revisa para buscar ningún virus».

44. Expresa las siguientes especificaciones de sistema usando las proposiciones p, «El usuario introduce una clave válida»; q, «Se permite el acceso», y r, «El usuario ha pagado la cuota de acceso», junto con conectivos lógicos.

a) «El usuario ha pagado la cuota de acceso, pero no introduce una clave válida».

b) «Se permite el acceso siempre que el usuario haya pagado la cuota de acceso e introduzca una clave válida».

c) «Se niega el acceso si el usuario no ha pagado la cuota de acceso».

d) «Si el usuario no ha introducido una clave válida, pero ha pagado la cuota de acceso, entonces se permite el acceso».

45. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «El sistema está en estado multiusuario si, y sólo si, está operando normalmente. Si el sistema está operando normalmente, el *kernel* está funcionando. El *kernel* no está funcionando o el sistema está en modo de interrupción. Si el sistema no está en estado multiusuario, entonces está en modo de interrupción. El sistema no está en modo de interrupción».

46. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «Cuando el *software* del sistema se actualiza, los usuarios no pueden acceder al sistema de archivos. Si los usuarios pueden acceder al sistema de archivos, pueden grabar ficheros nuevos. Si los usuarios no pueden grabar ficheros nuevos, el *software* del sistema no se está actualizando».

47. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «El *router* puede enviar paquetes al sistema remoto sólo si soporta el nuevo espacio de direcciones. Para que el *router* soporte el nuevo espacio de direcciones es necesario que se haya instalado la última actualización del *software*. El *router* puede enviar paquetes al sistema más remoto si se ha instalado la última actualización del *software*. El *router* no soporta el nuevo espacio de direcciones».

48. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «Si el sistema de archivos no está bloqueado, entonces se pondrán en cola los mensajes nuevos. Si el sistema de archivos no está bloqueado, entonces el sistema funciona correctamente, y recíprocamente. Si los mensajes nuevos no se ponen en cola, entonces se enviarán al *buffer* de mensajes. Si el sistema de archivos no se bloquea, entonces se enviarán mensajes nuevos al *buffer* de mensajes. No se enviarán mensajes nuevos al *buffer* de mensajes».

49. ¿Qué búsqueda booleana habría que usar para buscar páginas web sobre alguna playa en Nueva Jersey? ¿Y cuál para encontrar alguna playa en la isla de Jersey en el canal de la Mancha?

50. ¿Qué búsqueda booleana habría que usar para buscar páginas web sobre senderismo en Virginia del Norte? ¿Y cuál si buscas páginas web sobre senderismo en Virginia, pero no en Virginia del Norte?

Los problemas 51-55 están relacionados con la isla de los caballeros y villanos inventada por Smullyan, donde los caballeros siempre dicen la verdad y los villanos siempre mienten. Te encuentras a dos personas, A y B. Determina, si es posible, qué son A y B en cada problema. Si no puedes determinar qué son estas personas, ¿puedes deducir alguna conclusión?

51. A dice «Al menos uno de nosotros es un villano» y B no dice nada.

52. A dice «Los dos somos caballeros» y B dice «A es un villano».

53. A dice «Yo soy un villano o B es un caballero» y B no dice nada.

54. Tanto A como B dicen «Yo soy un caballero».

55. A dice «Ambos somos villanos» y B no dice nada.

Los problemas 56-61 son juegos de lógica que se pueden resolver formalizando previamente y razonando a partir de ellos usando las tablas de verdad.

56. La policía tiene tres sospechosos del asesinato del señor Cooper: el señor Smith, el señor Jones y el señor Williams. Cada uno de ellos declara que no mató a Cooper. Smith declara además que Cooper era amigo de Jones y que Williams no lo apreciaba. Jones también declara que él no conocía a Cooper y que estaba fuera de la ciudad cuando Cooper fue asesinado. Williams declara también que vio a Smith y Jones con Cooper el día del asesinato y que Smith o Jones debió matar a Cooper. ¿Puedes determinar quién lo mató si

a) uno de los tres hombres es culpable, los dos inocentes dicen la verdad, pero las declaraciones del culpable pueden ser o no verdad?;

b) los inocentes no mienten?

57. A Steve le gustaría determinar quién cobra más entre tres de sus colegas haciendo uso de dos hechos. Primero, sabe que si Fred no es el mejor pagado de los tres, entonces lo es Janice. Segundo, sabe que si Janice no es la peor pagada, entonces Maggie es la que más cobra. ¿Es posible determinar el orden de los salarios de Fred, Janice y Maggie a partir de lo que sabe Steve? Si es así, ¿quién es el/la que cobra más y el/la que cobra menos? Explica tu respuesta.

58. Cinco amigos tienen acceso a una sala de *chat*. ¿Es posible determinar quién está chateando si se conoce la siguiente información? Bien Kevin o Heather, o ambos, están chateando. Bien Randy o Vijay, pero no ambos, están chateando. Si Abby está chateando, también lo está Randy.

Vijay y Kevin están chateando, o bien ambos, o bien ninguno. Si Heather está chateando, entonces también lo están Abby y Kevin. Explica tu razonamiento.

59. Un detective ha tomado declaración a cuatro testigos de un crimen. De las declaraciones concluye que si el mayordomo dice la verdad, también lo hace el cocinero; el cocinero y el jardinero no pueden ambos decir la verdad; el jardinero y el empleado de mantenimiento no están mintiendo ambos, y si el empleado de mantenimiento dice la verdad, entonces el cocinero miente. Para cada uno de los testigos, ¿puede el detective determinar si miente o dice la verdad? Explica tu razonamiento.

60. Cuatro amigos han sido identificados como sospechosos de acceso no autorizado a un sistema informático. Por ello han declarado a las autoridades que investigan el hecho. Alicia dijo que «Lo hizo Carlos». Juan dijo «Yo no lo hice». Carlos dijo que «Diana lo hizo». Diana dijo que «Carlos mintió cuando dijo que yo lo hice».

a) Si las autoridades saben además que exactamente uno solo de ellos decía la verdad, ¿quién lo hizo? Explica tu razonamiento.

b) Si las autoridades saben también que exactamente uno solo de ellos mentía, ¿quién lo hizo? Explica tu razonamiento.

***61.** Resuelve este famoso juego de lógica atribuido a Albert Einstein y conocido como el **juego de la cebra**. Cinco hombres de diferentes nacionalidades y con trabajos distintos viven en casas consecutivas de una misma calle. Las casas están pintadas de colores diferentes. Los hombres tienen animales de compañía distintos y también son diferentes sus bebidas favoritas. Determina quién es el dueño de la cebra y quién es aquel cuya bebida favorita es el agua mineral (una de las bebidas favoritas) dadas las siguientes pistas: el inglés vive en la casa roja; el español tiene un perro; el japonés es pintor; el italiano bebe té; el noruego vive en la primera casa a la izquierda; la casa verde está a la derecha de la blanca; el fotógrafo cría caracoles; el diplomático vive en la casa amarilla; el de la casa del medio toma leche; el dueño de la casa verde toma café; la casa del noruego está pegada a la azul; el violinista toma zumo de naranja; el zorro está en una casa contigua a la del médico; el caballo está en una casa contigua a la del diplomático. (*Indicación:* Haz una tabla donde las filas representen hombres y las columnas el color de sus casas, sus trabajos, sus animales y sus bebidas favoritas. Usa razonamientos lógicos para determinar las entradas correctas en la tabla).

1.2 Equivalencias proposicionales

INTRODUCCIÓN

Un tipo importante de paso utilizado en argumentos matemáticos es la sustitución de una sentencia por otra de igual valor de verdad. Así, en la construcción de argumentos matemáticos se emplean con frecuencia métodos que producen proposiciones con el mismo valor de verdad que una fórmula dada.

Comenzaremos nuestra discusión con una clasificación de las fórmulas según sus posibles valores de verdad.

DEFINICIÓN 1 Una fórmula que es siempre verdadera, no importa los valores de verdad de las proposiciones que la componen, se denomina *tautología*. Una fórmula que es siempre falsa se denomina *contradicción*. Finalmente, una proposición que no es ni una tautología ni una contradicción se denomina *contingencia*.

Las tautologías y las contradicciones son importantes en el razonamiento matemático. El siguiente ejemplo ilustra estos tipos de proposiciones.

EJEMPLO 1 Podemos construir ejemplos de tautologías y contradicciones usando sólo una proposición. Considera las tablas de verdad de $p \vee \neg p$ y $p \wedge \neg p$ mostradas en la Tabla 1. Como $p \vee \neg p$ es siempre verdadera, es una tautología. Como $p \wedge \neg p$ es siempre falsa, es una contradicción. ◀

EQUIVALENCIAS LÓGICAS

Demo

Las fórmulas que tienen los mismos valores de verdad en todos los casos posibles se llaman **lógicamente equivalentes.** Podemos también definir esta noción como sigue.

DEFINICIÓN 2 Se dice que las proposiciones p y q son *lógicamente equivalentes* si $p \leftrightarrow q$ es una tautología. La notación $p \equiv q$ denota que p y q son lógicamente equivalentes.

Nota: El símbolo $\equiv$ no es un conectivo lógico, puesto que $p \equiv q$ no es una fórmula, sino la afirmación de que $p \leftrightarrow q$ es una tautología. El símbolo $\Leftrightarrow$ se usa en ocasiones en lugar de $\equiv$ para denotar una equivalencia lógica.

Ejemplos adicionales

Una forma de determinar si dos proposiciones son equivalentes es utilizar una tabla de verdad. En particular, las proposiciones p y q son equivalentes si, y sólo si, las columnas que dan sus valores de verdad coinciden. Los siguientes ejemplos ilustran este método.

EJEMPLO 2 Muestra que $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ son lógicamente equivalentes. Esta equivalencia es una de las *leyes de De Morgan* para proposiciones, llamadas así por el matemático inglés Augustus de Morgan, de mediados del siglo XIX.

Solución: Las tablas de verdad para estas proposiciones se muestran en la Tabla 2. Como los valores de verdad de las proposiciones $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ concuerdan para todas las combinaciones posibles de valores de verdad para p y q, se sigue que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ es una tautología y estas proposiciones son lógicamente equivalentes. ◀

Tabla 1. Ejemplos de una tautología y una contradicción.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Tabla 2. Tablas de verdad para $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Tabla 3. Tablas de verdad para $\neg p \vee q$ y $p \rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

EJEMPLO 3 Muestra que las proposiciones $p \to q$ y $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes.

Solución: Construimos las tablas de verdad para estas fórmulas en la Tabla 3. Como los valores de verdad de las proposiciones $\neg p \vee q$ y $p \to q$ concuerdan, estas proposiciones son lógicamente equivalentes. ◄

EJEMPLO 4 Muestra que las proposiciones $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ son lógicamente equivalentes. Es la *ley distributiva* de la disyunción sobre la conjunción.

Solución: Construimos las tablas de verdad para estas fórmulas en la Tabla 4. Como los valores de verdad de las proposiciones $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ concuerdan, estas fórmulas son lógicamente equivalentes. ◄

Observación: Una tabla de verdad para una fórmula dependiente de tres proposiciones diferentes requiere ocho filas, una para cada posible combinación de los valores de verdad de las tres proposiciones. En general, se requieren 2^n filas si una fórmula depende de n proposiciones.

La Tabla 5 contiene algunas equivalencias importantes*. En estas equivalencias, **V** denota cualquier proposición que es siempre verdadera y **F** denota cualquier proposición que es siempre falsa. Mostramos también algunas equivalencias útiles para fórmulas que involucran implicaciones y dobles implicaciones en las Tablas 6 y 7, respectivamente. En los problemas al final de la sección se pide al lector que verifique las equivalencias de las Tablas 5-7.

La ley asociativa para la disyunción muestra que la expresión $p \vee q \vee r$ está bien definida en el sentido de que no importa si tomamos primero la disyunción de p y q y luego la disyunción de $p \vee q$ con r, o si primero tomamos la disyunción de q y r y luego la disyunción de p y $q \vee r$. De forma similar, la expresión $p \wedge q \wedge r$ está bien definida. Extendiendo este razonamiento, se sigue que $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ y $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ están bien definidas siempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sean proposiciones. Además, ten en cuenta que las leyes de De Morgan se generalizan a

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n)$$

y

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n).$$

(Los métodos para demostrar estas identidades se verán en la Sección 3.3).

Las equivalencias lógicas de la Tabla 5, así como cualquier otra que se haya establecido (como las mostradas en las Tablas 6 y 7), se pueden usar para construir equivalencias lógicas adicionales. Ello se debe a que una proposición en una fórmula se puede sustituir por otra que sea lógicamente equivalente sin alterar el valor de verdad de la fórmula. Esta técnica se ilustra en los Ejemplos 5 y 6, donde también se utiliza el hecho de que si p y q son lógicamente equivalentes y q y r también, entonces p y r son lógicamente equivalentes (véase el Problema 50).

Ejemplos adicionales

Tabla 4. Una demostración de que $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ son lógicamente equivalentes.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

* Estas identidades son un caso especial de las identidades que se dan en cualquier álgebra de Boole. Compáralas con el conjunto de identidades de la Tabla 1 de la Sección 1.7 y con las identidades booleanas de la Tabla 5 de la Sección 10.1.

Tabla 5. Equivalencias lógicas.

Equivalencia	*Nombre*
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Ley de la doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Leyes de negación

Tabla 6. Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Tabla 7. Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871) Augustus de Morgan nació en la India, donde su padre fue coronel del ejército. La familia De Morgan se mudó a Inglaterra cuando Augustus tenía siete meses. Asistió a colegios privados, donde desarrolló un gran interés por las matemáticas en su primera adolescencia. De Morgan estudió en el Trinity College, en Cambridge, graduándose en 1827. Aunque consideró matricularse en medicina o derecho, decidió hacer su carrera en matemáticas. Consiguió una plaza en el University College de Londres en 1828, pero abandonó cuando el College rechazó a un profesor amigo suyo sin argumentar razón alguna. No obstante, retomó este puesto en 1836 cuando su sucesor murió, permaneciendo hasta 1866.

Fue un notable profesor que anteponía principios sobre técnicas. Entre sus estudiantes se cuentan muchos matemáticos famosos, entre ellos Ada Augusta, condesa de Lovelace, que fue colaboradora de Charles Babbage en su trabajo sobre máquinas de calcular (en la página 23 encontrarás notas bibliográficas sobre Ada Augusta). De Morgan advirtió a la condesa de Lovelace contra su dedicación excesiva a las matemáticas, ¡ya que podría interferir con su capacidad de engendrar!

Enlaces

De Morgan fue un escritor extremadamente prolijo. Escribió más de mil artículos en más de quince revistas. De Morgan también escribió libros de texto sobre muchos temas, entre los que se incluyen lógica, probabilidad, cálculo y álgebra. En 1838 presentó lo que quizá sea la primera explicación clara de una importante técnica de demostración conocida como *inducción matemática* (descrita en la Sección 3.3 de este libro), un término que él acuñó. Inventó notaciones que le ayudaron a demostrar equivalencias proposicionales, como las leyes que se nombraron en su honor. En 1842 presentó lo que quizá fue hasta la fecha la definición más precisa de límite y desarrolló algunos criterios para la convergencia de series infinitas. También se interesó por la historia de las matemáticas y escribió las biografías de Newton y Halley.

En 1837 se casó con Sophia Frend, quien escribió su biografía en 1882. La investigación, la escritura y la docencia le dejaron poco tiempo para su familia o vida social. En cualquier caso, sobresalió por su amabilidad, humor y amplios conocimientos.

EJEMPLO 5 Justifica que las proposiciones $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ y $\neg p \wedge \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Solución: Podríamos utilizar una tabla de verdad para mostrar que estas fórmulas son equivalentes. En vez de ello, estableceremos la equivalencia desarrollando una serie de equivalencias lógicas intermedias usando una de las equivalencias de la Tabla 5 cada vez, comenzando con $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ y finalizando con $\neg p \wedge \neg q$. Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{por la segunda ley de De Morgan}\\
&\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q)] && \text{por la primera ley de De Morgan}\\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{por la ley de la doble negación}\\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{por la segunda ley distributiva}\\
&\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{puesto que } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F}\\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \text{por la ley conmutativa para la disyunción}\\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{por la ley de identidad para } \mathbf{F}
\end{aligned}$$

Consecuentemente, $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ y $\neg p \wedge \neg q$ son lógicamente equivalentes. ◀

EJEMPLO 6 Muestra que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

Solución: Para mostrar que esta sentencia es una tautología, usaremos equivalencias lógicas para demostrar que es lógicamente equivalente a **V**. (*Nota:* Se podría haber hecho también mediante una tabla de verdad).

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{por el Ejemplo 3}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{por la primera ley de De Morgan}\\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{por las leyes asociativa y conmutativa para la disyunción}\\
&\equiv \mathbf{V} \vee \mathbf{V} && \text{por el Ejemplo 1 y la ley conmutativa para la disyunción}\\
&\equiv \mathbf{V} && \text{por la ley de dominación}
\end{aligned}$$

◀

Se puede usar una tabla de verdad para determinar si una fórmula es una tautología. Esta tabla se puede construir a mano para una proposición con un número reducido de variables, pero cuando el número de variables crece, el método manual se vuelve impracticable. Por ejemplo, hay más de $2^{20} = 1\,048\,576$ filas en la tabla de verdad de una proposición de veinte variables. Claramente, se necesita la ayuda de un ordenador si queremos determinar de esta forma si la fórmula de 20 variables es una tautología. Pero cuando hay mil variables, ¿puede un ordenador determinar en un plazo de tiempo razonable si una fórmula es una tautología? Revisar cada una de las 2^{1000} (un número con más de trescientas cifras) combinaciones de valores de verdad no puede hacerse en un ordenador ni en billones de años. Además, no se conoce ningún otro procedimiento que pueda seguir un ordenador para determinar en un plazo razonable de tiempo si una fórmula con un número tan grande de variables es una tautología. Contestaremos a preguntas como éstas en el Capítulo 2, cuando estudiemos la complejidad de algoritmos.

Enlaces

ADA AUGUSTA, CONDESA DE LOVELACE (1815-1852) Ada Augusta fue la única hija del matrimonio del famoso poeta Lord Byron y Annabella Millbanke, los cuales se separaron cuando Ada tenía un mes. La crió su madre, que potenció su talento intelectual. Fue educada por los matemáticos William Frend y Augustus de Morgan. En 1838 se casó con Lord King, más tarde nombrado conde de Lovelace.

Ada Augusta continuó sus estudios de matemáticas tras su matrimonio, ayudando a Charles Babbage en su trabajo sobre una de las primeras máquinas calculadoras, llamada la máquina analítica. En sus escritos se encuentra la más completa descripción de esta máquina. Tras 1845, ella y Babbage trabajaron juntos en el desarrollo de un sistema para predecir carreras de caballos. Lamentablemente, su sistema no funcionó bien, dejando a Ada importantes deudas hasta su muerte. El lenguaje de programación Ada se nombró así en honor a la condesa de Lovelace.

Problemas

1. Utiliza tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias.

a) $p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ b) $p \vee \mathbf{F} \equiv p$

c) $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ d) $p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$

e) $p \vee p \equiv p$ f) $p \wedge p \equiv p$

2. Demuestra que $\neg(\neg p)$ y p son lógicamente equivalentes.

3. Usa tablas de verdad para verificar las leyes conmutativas.

a) $p \vee q \equiv q \vee p$

b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Utiliza tablas de verdad para verificar las leyes asociativas.

a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

5. Usa una tabla de verdad para verificar la ley distributiva. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

6. Usa una tabla de verdad para verificar la equivalencia. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

7. Demuestra, empleando tablas de verdad, que cada una de estas implicaciones es una tautología.

a) $(p \wedge q) \to p$ b) $p \to (p \vee q)$

c) $\neg p \to (p \to q)$ d) $(p \wedge q) \to (p \to q)$

e) $\neg(p \to q) \to p$ f) $\neg(p \to q) \to \neg q$

8. Demuestra, empleando tablas de verdad, que cada una de estas implicaciones es una tautología.

a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$

b) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

c) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

d) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

9. Demuestra, sin utilizar tablas de verdad, que cada una de las implicaciones del Problema 7 es una tautología.

10. Demuestra, sin utilizar tablas de verdad, que cada una de las implicaciones del Problema 8 es una tautología.

11. Usa las tablas de verdad para verificar las leyes de absorción.

a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

12. Determina si $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$ es o no una tautología.

13. Determina si $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ es o no una tautología.

14. Demuestra que $p \leftrightarrow q$ y $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ son equivalentes.

15. Demuestra que $(p \to q) \to r$ y $p \to (q \to r)$ no son equivalentes.

16. Demuestra que $p \to q$ y $\neg q \to \neg p$ son lógicamente equivalentes.

17. Demuestra que $\neg p \leftrightarrow q$ y $p \leftrightarrow \neg q$ son lógicamente equivalentes.

18. Demuestra que $\neg(p \oplus q)$ y $p \leftrightarrow q$ son lógicamente equivalentes.

19. Demuestra que $\neg(p \leftrightarrow q)$ y $p \leftrightarrow q$ son lógicamente equivalentes.

20. Demuestra que $(p \to q) \wedge (p \to r)$ y $p \to (q \wedge r)$ son lógicamente equivalentes.

21. Demuestra que $(p \to r) \wedge (q \to r)$ y $(p \vee q) \to r$ son lógicamente equivalentes.

22. Demuestra que $(p \to q) \vee (p \to r)$ y $p \to (q \vee r)$ son lógicamente equivalentes.

23. Demuestra que $(p \to r) \vee (q \to r)$ y $(p \wedge q) \to r$ son lógicamente equivalentes.

24. Demuestra que $\neg p \to (q \to r)$ y $q \to (p \vee r)$ son lógicamente equivalentes.

25. Demuestra que $p \leftrightarrow q$ y $(p \to q) \wedge (q \to p)$ son lógicamente equivalentes.

26. Demuestra que $p \leftrightarrow q$ y $\neg p \leftrightarrow \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Enlaces

HENRY MAURICE SHEFFER (1883-1964) Henry Maurice Sheffer, nacido al oeste de Ucrania de padres judíos, emigró a Estados Unidos en 1892 con sus padres y hermanos. Estudió en la Boston Latin School antes de entrar en Harvard, donde completó su licenciatura en 1905, su tesis de maestría en 1907 y su doctorado en filosofía en 1908. Tras mantener un puesto postdoctoral en Harvard, Henry viajó a Europa con una beca. Al volver a Estados Unidos, se convirtió en un nómada académico, estando un año en cada una de estas Universidades: Washington, Cornell, Minnesota, Missouri y el City College de Nueva York. En 1916 volvió a Harvard como profesor titular del departamento de filosofía. Permaneció en Harvard hasta que se retiró en 1952.

En 1913 introdujo lo que se conoce como la «barra de Sheffer» (en inglés, *the Sheffer stroke*), que se dio a conocer en la edición de 1925 de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. En esta misma edición, Russell escribió que Sheffer había inventado un potente método que podría ser usado para simplificar los *Principia*. Debido a este comentario, Sheffer se convirtió en un misterio para los lógicos, especialmente porque Sheffer, que publicó poco a lo largo de su carrera, nunca publicó los detalles de su método. Sólo lo describió en notas de reducido alcance y en un breve resumen que publicó.

Sheffer fue un profesor con una gran dedicación a la docencia de la lógica matemática. Le gustaban las clases pequeñas y detestaba a los alumnos oyentes. Cuando aparecían extraños en su clase, ordenaba que se marchasen, aunque fuesen colegas o visitantes distinguidos de Harvard. Sheffer casi no llegaba al metro cincuenta de altura; se hacía notar por su ingenio y vigor, así como por su nerviosismo e irritabilidad. Aunque muy querido, era bastante solitario. Se hizo famoso por una ocurrencia que dijo cuando se retiró: «Los viejos profesores nunca mueren, simplemente se vuelven eméritos». Sheffer acuñó el término de «álgebra de Boole» (tema del Capítulo 10 de este texto). Estuvo casado durante un corto espacio de tiempo y vivió durante la mayor parte de su último período en pequeñas habitaciones de un hotel llenas de sus libros de lógica y un vasto archivo de trocitos de papel que usaba para escribir sus ideas. Lamentablemente, Sheffer sufrió depresión severa durante las dos últimas décadas de su vida.

27. Demuestra que $\neg(p \leftrightarrow q)$ y $p \leftrightarrow \neg q$ son lógicamente equivalentes.

28. Demuestra que $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ es una tautología.

29. Demuestra que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología.

La proposición **dual** de una fórmula que contiene sólo los operadores lógicos $\vee$, $\wedge$ y $\neg$ es la proposición que se obtiene al sustituir cada $\vee$ por $\wedge$, cada $\wedge$ por $\vee$, cada **V** por **F** y cada **F** por **V**. La dual de la proposición s se denota como s^*.

30. Halla la proposición dual de cada una de estas proposiciones.

a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ **b)** $(p \wedge q \wedge r) \vee s$

c) $(p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{V})$

31. Demuestra que $(s^*)^* = s$

32. Demuestra que las equivalencias lógicas de la Tabla 5, excepto la ley de la doble negación, se pueden agrupar en pares de proposiciones duales.

****33.** ¿Por qué las duales de dos fórmulas equivalentes que contienen sólo los operadores $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ son también equivalentes?

34. Encuentra una fórmula en función de las proposiciones p, q y r que sea verdadera cuando p y q sean verdaderas y r sea falsa, pero que sea falsa en cualquier otro caso. (*Indicación:* Usa la conjunción de cada proposición o su negación).

35. Encuentra una fórmula en función de las proposiciones p, q y r que sea verdadera cuando exactamente dos de las proposiciones p, q y r sean verdaderas y falsas en cualquier otro caso. (*Indicación:* Forma una disyunción de conjunciones. Incluye una conjunción para cada combinación de valores para los cuales la proposición sea verdadera. Cada conjunción debería incluir cada una de las tres proposiciones o sus negaciones).

36. Supón que se especifica una tabla de verdad de n variables. Demuestra que una fórmula con esta tabla de verdad se puede formar haciendo la disyunción de las conjunciones de las variables o sus negaciones, incluyendo una conjunción por cada combinación de valores para los que la fórmula sea verdadera. La fórmula resultante se dice que está en **forma normal disyuntiva.**

Una colección de conectivos lógicos se llama **funcionalmente completa** si cada una de las fórmulas es lógicamente equivalente a una fórmula que es función sólo de estos conectivos lógicos.

37. Demuestra que $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos. (*Indicación:* Usa el hecho de que toda proposición es lógicamente equivalente a una en forma normal disyuntiva, como se muestra en el Problema 36).

***38.** Demuestra que $\neg$ y $\vee$ forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos. [*Indicación:* Usa primero las leyes de De Morgan para mostrar que $p \vee q$ es equivalente a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$].

***39.** Demuestra que $\neg$ y $\vee$ forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos.

Los problemas siguientes están relacionados con los operadores lógicos *NAND* y *NOR*. La proposición p *NAND* q es verdadera cuando p o q, o ambas, son falsas, y es falsa cuando tanto p como q son verdaderas. La proposición p *NOR* q es verdadera cuando tanto p como q son falsas, y es falsa en cualquier otro caso. Las proposiciones p *NAND* q y p *NOR* q se denotan por $p \mid q$ y $p \downarrow q$, respectivamente. (Los operadores $\mid$ y $\downarrow$ se llaman **barra de Sheffer** y **flecha de Peirce** por H. M. Sheffer y C. S. Peirce, respectivamente).

40. Construye una tabla de verdad para el operador lógico *NAND*.

41. Demuestra que $p \mid q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$.

42. Construye la tabla de verdad del operador lógico *NOR*.

43. Demuestra que $p \downarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$.

44. En este problema mostraremos que $\{\downarrow\}$ es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.

a) Demuestra que $p \downarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg p$.

b) Demuestra que $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ es lógicamente equivalente a $p \vee q$.

c) Concluye de las partes (a) y (b) y el Problema 39 que $\{\downarrow\}$ es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.

***45.** Encuentra una proposición equivalente a $p \rightarrow q$ usando sólo el operador lógico $\downarrow$.

46. Demuestra que $\{\mid\}$ es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.

47. Demuestra que $p \mid q$ y $q \mid p$ son equivalentes.

48. Demuestra que $p \mid (q \mid r)$ y $(p \mid q) \mid r$ no son equivalentes, por lo que el operador lógico $\mid$ no es asociativo.

***49.** ¿Cuántas tablas de verdad diferentes de fórmulas que relacionen las proposiciones p y q existen?

50. Demuestra que si p, q y r son fórmulas tales que p y q son lógicamente equivalentes y que q y r son lógicamente equivalentes, entonces p y r son lógicamente equivalentes.

51. La siguiente frase se ha tomado de una especificación de un sistema de telefonía: «Si la base de datos del directorio está abierta, el monitor se pone en estado cerrado si el sistema no está en estado inicial». La especificación es complicada de entender, pues involucra dos implicaciones. Encuentra una especificación equivalente, más fácil de entender, que incluya disyunciones o negaciones, pero no implicaciones.

52. ¿De cuántas formas las disyunciones $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$, $q \vee r$, $q \vee \neg r$, $\neg q \vee \neg r$ se pueden hacer verdaderas simultáneamente mediante la asignación de valores de verdad a p, q y r?

53. ¿De cuántas formas las disyunciones $p \vee \neg q \vee s$, $\neg p \vee \neg r \vee s$, $\neg p \vee \neg r \vee \neg s$, $\neg p \vee q \vee \neg s$, $q \vee r \vee \neg s$, $q \vee \neg r \vee \neg s$, $\neg p \vee \neg q \vee \neg s$, $p \vee r \vee s$, $p \vee r \vee \neg s$ se pueden hacer verdaderas simultáneamente mediante la asignación de valores de verdad a p, q, r y s?

Se dice que una fórmula es **satisfacible** si existe alguna asignación de valores de verdad para las variables de la proposición que la hacen verdadera.

54. ¿Cuáles de estas fórmulas son satisfacibles?

a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

55. Explica cómo puede usarse un algoritmo que determine si una fórmula es o no satisfacible para determinar si una fórmula es o no una tautología. (*Indicación:* Considera $\neg p$, donde p es la proposición que se examina).

1.3 Predicados y cuantificadores

INTRODUCCIÓN

A menudo, en matemáticas y programas de ordenador se encuentran enunciados en los que se incluyen variables, como

«$x > 3$», «$x = y + 3$» y «$x + y = z$».

Estos enunciados no son ni verdaderos ni falsos si no se especifican los valores de las variables. En esta sección discutiremos las maneras en que las proposiciones pueden producir tales enunciados.

El enunciado «x es mayor que 3» tiene dos partes. La primera parte, la variable x, es el sujeto del enunciado. La segunda parte —el **predicado**, «es mayor que 3»— hace referencia a una propiedad que puede tener el sujeto. Podemos denotar el enunciado «x es mayor que 3» por $P(x)$, donde P denota el predicado «es mayor que 3» y x es la variable. La sentencia $P(x)$ se dice también que es el valor de la **función proposicional** P en x. Una vez que se le haya asignado un valor a la variable x, la sentencia $P(x)$ se convierte en una proposición y tiene un valor de verdad. Considera el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1 $P(x)$ denota el enunciado «$x > 3$». ¿Cuáles son los valores de verdad de $P(4)$ y $P(2)$?

Solución: Obtenemos la sentencia $P(4)$ haciendo $x = 4$ en el enunciado «$x > 3$». Por tanto, $P(4)$, que es el enunciado «$4 > 3$», es verdadero. Sin embargo, $P(2)$, el enunciado «$2 > 3$», es falso. ◀

Podemos también tener sentencias que incluyan más de una variable. Por ejemplo, considera el enunciado «$x = y + 3$». Podemos denotar esta sentencia por $Q(x, y)$, donde x e y son variables y Q es el predicado. Cuando se asignan valores a x e y, la sentencia $Q(x, y)$ tiene una tabla de verdad.

EJEMPLO 2 $Q(x, y)$ denota el enunciado «$x = y + 3$». ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $Q(1, 2)$ y $Q(3, 0)$?

Ejemplos adicionales

Solución: Para obtener $Q(1, 2)$ hacemos $x = 1$ e $y = 2$ en la sentencia $Q(x, y)$. Por tanto, $Q(1, 2)$ es el enunciado «$1 = 2 + 3$», que es falso. La sentencia $Q(3, 0)$ es el enunciado «$3 = 0 + 3$», que es verdadera. ◀

De forma similar, podemos denotar como $R(x, y, z)$ el enunciado «$x + y = z$». Cuando se asignen valores a las variables x, y y z, esta sentencia tendrá una tabla de verdad.

EJEMPLO 3 ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $R(1, 2, 3)$ y $R(0, 0, 1)$?

Solución: La proposición $R(1, 2, 3)$ se obtiene haciendo $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$ en la sentencia $R(x, y, z)$. Vemos que $R(1, 2, 3)$ es el enunciado «$1 + 2 = 3$», que es verdadero. También se ve que $R(0, 0, 1)$, el enunciado «$0 + 0 = 1$», es falso. ◀

En general, una sentencia que incluye las n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ se puede denotar como

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Una sentencia de la forma $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ es el valor de la **función proposicional** P en la n-tupla $(x_1, x_2, ..., x_n)$. P se llama también un **predicado**.

Como muestra el Ejemplo 4, las funciones proposicionales se usan en programas de ordenador.

EJEMPLO 4 Considera la sentencia

if $x > 0$ **then** $x := x + 1$.

Cuando el programa llega a esta línea, el valor de la variable x en este punto de la ejecución se inserta en $P(x)$, que es «$x > 0$». Si $P(x)$ es verdadera para este valor de x, la sentencia de asignación $x := x + 1$ se ejecuta, por lo que el valor de x se incrementa en 1. Si $P(x)$ es falsa para este valor de x, la sentencia de asignación no se ejecuta, por lo que el valor de x no cambia. ◀

CUANTIFICADORES

Evaluación

Cuando a todas las variables de una función proposicional se le han asignado valores, la sentencia resultante se convierte en una proposición con un cierto valor de verdad. No obstante, hay otra forma importante, llamada **cuantificación,** de crear una proposición a partir de una función proposicional. Se discutirán en este apartado dos tipos de cuantificación, a saber, cuantificación universal y cuantificación existencial. El área de la lógica que trata con predicados y cuantificadores se llama **cálculo de predicados** o **lógica de primer orden**.

EL CUANTIFICADOR UNIVERSAL Muchas sentencias matemáticas imponen que una propiedad es verdadera para todos los valores de una variable en un dominio particular, llamado el **universo de discurso** o **dominio**. Tales sentencias se expresan utilizando un cuantificador universal. La cuantificación universal de una función proposicional es la proposición que afirma que $P(x)$ es verdadera para todos los valores de x en el dominio. El dominio especifica los posibles valores de la variable x.

CHARLES SANDERS PEIRCE (1839-1914) Muchos consideran a Charles Peirce el intelecto más versátil y original de Estados Unidos. Nació en Cambridge, Massachusetts. Su padre, Benjamin Peirce, era profesor de matemáticas y filosofía natural en Harvard. Peirce estudió en Harvard (1855-1859), graduándose en letras en esta Universidad y en química en la Lawrence Scientific School (1863). Su padre le animó a seguir una carrera en ciencias, pero él eligió estudiar lógica y metodología científica.

En 1861, Peirce se hizo ayudante del Servicio de Guardacostas de Estados Unidos, con el objetivo de entender mejor la metodología científica. Este trabajo le eximió del servicio militar durante la guerra civil. Mientras trabajaba para la Guardia Costera, Peirce desarrolló trabajos sobre astronomía y geodesia. Hizo contribuciones esenciales al diseño de péndulos y proyecciones de mapas, aplicando nuevos desarrollos matemáticos en la teoría de funciones elípticas. Fue la primera persona en utilizar la longitud de onda de la luz como unidad de medida. Peirce ascendió a asistente del Servicio de Guardacostas, un puesto que mantuvo hasta que fue obligado a renunciar en 1891, cuando mostró su desacuerdo con la dirección que estaba tomando la nueva administración de Guardacostas.

Aunque dedicó su vida a las ciencias físicas, Peirce desarrolló una jerarquía de las ciencias, con las matemáticas en la parte más alta. Los métodos de una ciencia se podían adaptar para su uso en otras situadas por debajo en la jerarquía. Fue también el fundador de la teoría filosófica americana del pragmatismo.

El único puesto académico que ocupó fue de profesor de lógica en la Universidad Johns Hopkins, en Baltimore, de 1879 a 1884. Su trabajo matemático durante aquel tiempo incluyó contribuciones a la lógica, a la teoría de conjuntos, al álgebra abstracta y a la filosofía de las matemáticas. Su trabajo es todavía relevante hoy día. Parte de su trabajo en lógica se ha aplicado en inteligencia artificial. Peirce creía que el estudio de las matemáticas podía desarrollar capacidades de la mente como la imaginación, la abstracción y la generalización. Entre sus diversas actividades tras retirarse de la Guardia Costera se incluyen el escribir en periódicos y revistas, contribuciones en diccionarios eruditos, traducción de artículos científicos, dar conferencias invitadas y redactar libros de texto. Desgraciadamente, lo que ganó con estas actividades no fue suficiente para salvarle a él y a su segunda esposa de una miserable pobreza. Fue mantenido en sus últimos años por un fondo creado por sus muchos admiradores y administrado por el filósofo William James, amigo suyo durante toda la vida. Aunque Peirce escribió y publicó mucho en un amplio abanico de campos, dejó más de cien mil páginas manuscritas sin publicar. Debido a la dificultad del estudio de su trabajo no publicado, los investigadores han empezado ahora a comprender alguna de sus variadas contribuciones. Hay un grupo dedicado a poner su trabajo en Internet para que su obra sea mejor apreciada por todo el mundo.