EJERCICIO 2.b) - TP 2

Recurrencia: $\boldsymbol{T(n) = 3T(n-1) + \frac{1}{2}}$

Resolución por Método Iterativo

K = 1

$$T(n) = 3T(n-1) + \frac{1}{n}$$

K = 2

Escribir la recurrencia para $(n-1)$

Si ahora tomamos x = $(x-1)$

$$T(x) = 3T(x-1) + \frac{1}{x}$$

$$T(n-1) = 3T((n-1)-1) + \frac{1}{n-1}$$

Queda:

$$T(n-1) = 3T((n-1)-1) + \frac{1}{n-1}$$

Reemplazar en la recurrencia original. Partimos de:

$$T(n) = 3T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Sustituyendo:

$$T(n) = 3\left(3T(n-2) + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n}$$

Aplicamos distributiva el 3:

$$T(n) = 9T(n-2) + 3 \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{T(n) = 9T(n-2) + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}}$$

K = 3

Escribir la recurrencia para $(n-2)$

$$T(n-2) = 3T((n-2)-1) + \frac{1}{n-2}$$

Entonces

$$T(n-2) = 3T(n-3) + \frac{1}{n-2}$$

Simplificamos:
$(n-2)-1 = n-3$

Reemplazamos. Partimos de:

$$T(n) = 9T(n-2) + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Sustituyendo:

$$T(n) = 9\left(3T(n-3) + \frac{1}{n-2}\right) + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Aplicar Distributiva:

$$T(n) = 27T(n-3) + 9 \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{T(n) = 27T(n-3) + \frac{9}{n-2} + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}}$$

K = 4

Expandimos $T(n-3)$

Escribir la recurrencia para $(n-3)$

Si ahora tomamos x = $(x-3)$:

$$T(n-3) = 3T((n-3)-1) + \frac{1}{n-3}$$

$$T(n-3) = 3T(n-4) + \frac{1}{n-3}$$

Simplificamos
$(n-3)-1 = n-4$

Reemplazar. Partimos de:

$$T(n) = 27T(n-3) + \frac{9}{n-2} + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Sustituyendo:

$$T(n) = 27\left(3T(n-4) + \frac{1}{n-3}\right) + \frac{9}{n-2} + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Distribuir el 27:

$$T(n) = 81T(n-4) + 27 \cdot \frac{1}{n-3} + \frac{9}{n-2} + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{T(n) = 81T(n-4) + \frac{27}{n-3} + \frac{9}{n-2} + \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n}}$$

Buscar el patrón

Parte Recursiva

Los coeficientes son: $3,\ 9,\ 27,\ 81$

Eso es: $3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4$

Y el argumento va siendo: $n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4$

Entonces, después de kk pasos: $\boxed{3^k T(n-k)}$

Parte no Recursiva

Los términos que acompañan son: $\frac{1}{n}, \frac{3}{n-1}, \frac{9}{n-2}, \frac{27}{n-3}, \ldots$

Si miramos bien:

- los numeradores son: $3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3, \ldots$
- los denominadores son: $n,\ n-1,\ n-2,\ n-3, \ldots$

Entonces la suma general es: $\boxed{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i}{n-i}}$

Fórmula General

Juntando parte recursiva y parte no recursiva:

$$\boxed{T(n) = 3^k T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i}{n-i}}$$

Hallar k

Queremos llegar al caso base: $T(1) = 1$ entonces hacemos $n-k=1$ de ahí $k = n-1$

Reemplazar $k = n - 1$

Sustituimos en la fórmula general:

$$T(n) = 3^{n-1}T(n-(n-1)) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^i}{n-i}$$

$$T(n) = 3^{n-1}T(1) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^i}{n-i}$$

Simplificar:
$n-(n-1) = 1$

Como: $\boldsymbol{T(1) = 1}$, entonces:

$$\boxed{T(n) = 3^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^i}{n-i}}$$

Reescribimos la sumatoria usando $\boldsymbol{j = n - i}$, de modo que los denominadores queden ordenados como $\boldsymbol{2, 3, \dots, n}$ ¿Cómo cambian los extremos?

- si $\boldsymbol{i = 0}$, entonces: $\boldsymbol{j = n}$
- si $\boldsymbol{i = n - 2}$, entonces: $\boldsymbol{j = 2}$

O sea, la suma se puede escribir como:

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{3^{n-j}}{j}$$

Entonces:

$$T(n) = 3^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \frac{3^{n-j}}{j}$$

Sacar factor común 3^n

Queremos separa la parte exponencial, Ovservamos que:

$$3^{n-j} = 3^n \cdot 3^{-j} = \frac{3^n}{3^j}$$

Entonces:

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{3^{n-j}}{j} = 3^n \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j\,3^j}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{T(n) = 3^{n-1} + 3^n \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j\,3^j}}$$

Reemplazamos la sumatoria por una constante $\boldsymbol{C}$

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j\,3^j} \leq C$$

para alguna constante C

Luego:

$$\boxed{T(n) = 3^{n-1} + C3^n}$$

Conclusión del Orden

Ahora miramos los términos:

- 3^{n-1}
- $C3^n$

Ambos son del mismo orden exponencial, Por lo tanto:

$$\boxed{T(n) \in \Theta(3^n)}$$