EJERCICIO 3.b

```
t = 0                                                  C1 = 1
Para i desde 1 hasta n hacer                           C2 = 3
    Para j desde (2n) hasta i hacer                    C3 = 3
        Muestra(A(i), A(j))                            C4 = 3
        t = t + j                                      C5 = 2
    FinPara
    t = t + i                                          C6 = 2
FinPara
```

1) Costo del `Para` interno

La cantidad de repeticiones del `Para` interno es: $2n - i + 1$

Entonces:

$$C7 = \sum_{j=i}^{2n} (C3 + C4 + C5) + 3$$

$$C7 = \sum_{j=i}^{2n} (3 + 3 + 2) + 3$$

$$C7 = \sum_{j=i}^{2n} 8 + 3$$

$$C7 = 8(2n - i + 1) + 3$$

$$\boxed{C7 = 16n - 8i + 11}$$

2) Costo total

$$CT = C1 + \sum_{i=1}^{n} (C2 + C7 + C6) + 3$$

$$CT = C1 + \sum_{i=1}^{n}(C2 + C7 + C6) + 3$$

$$CT = 1 + \sum_{i=1}^{n}(3 + 16n - 8i + 11 + 2) + 3$$

$$CT = 4 + \sum_{i=1}^{n}(16n - 8i + 16)$$

$$CT = 4 + 16n\sum_{i=1}^{n}1 - 8\sum_{i=1}^{n}i + 16\sum_{i=1}^{n}1$$

$$CT = 4 + 16n^2 - 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 16n$$

$$CT = 4 + 16n^2 - 4n(n+1) + 16n$$

$$CT = 4 + 16n^2 - 4n^2 - 4n + 16n$$

$$\boxed{CT = 12n^2 + 12n + 4} \qquad \boxed{\Theta(n^2)}$$

Detalle

1. Costo del Para interno

```
Para j desde (2n) hasta i hacer                       C3 = 3
    Muestra(A(i), A(j))                               C4 = 3
    t = t + j                                         C5 = 2
FinPara
```

1.1 ¿De dónde sale la sumatoria?

Sale de que el cuerpo del Para interno **se ejecuta una vez por cada valor de *j*.**

Entonces el costo del `Para` interno se escribe así:

$$C7 = \sum_{j=i}^{2n}(C3 + C4 + C5) + 3$$

1.2 Reemplazamos los costos

$$C7 = \sum_{j=i}^{2n} (3 + 3 + 2) + 3$$

$$C7 = \sum_{j=i}^{2n} 8 + 3$$

1.3 ¿Cuántas veces se repite?

Acá j va desde i hasta 2 n.

La cantidad de repeticiones es: $2n - i + 1$
porque usamos:

$$\textbf{cantidad de términos} = \textbf{final} - \textbf{inicial} + \mathbf{1}$$

Entonces:

Ahora distribuimos el 8: $C7 = 16n - 8i + 8 + 3$

$$\boxed{C7 = 16n - 8i + 11}$$

2. Costo total

Para externo:

```
t = 0                                                   C1 = 1
Para i desde 1 hasta n hacer                            C2 = 3
    [costo del Para interno = C7]
    t = t + i                                           C6 = 2
FinPara
```

2.1 ¿De dónde sale la sumatoria total?

El cuerpo del Para externo **se repite una vez por cada valor de i.**

Como i va desde 1 hasta n, entonces sumamos ese bloque para: $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Por eso escribimos: $$CT = C1 + \sum_{i=1}^{n} (C2 + C7 + C6) + 3$$

Acá:

- $C1$queda afuera porque t = 0 se ejecuta una sola vez al comienzo
- la sumatoria corresponde al cuerpo del Para externo
- el +3 final es el control de salida del Para externo

2.2 Reemplazamos

$$CT = 1 + \sum_{i=1}^{n}(3 + (16n - 8i + 11) + 2) + 3$$

Primero sumamos lo constante dentro del paréntesis: $3 + 11 + 2 = 16$

Entonces:
$$CT = 1 + \sum_{i=1}^{n}(16n - 8i + 16) + 3$$

Juntamos el
1 y el 3 de afuera:
$$CT = 4 + \sum_{i=1}^{n}(16n - 8i + 16)$$

3. Separar la sumatoria

Ahora usamos la propiedad distributiva de la sumatoria:

$$\sum(a + b - c) = \sum a + \sum b - \sum c$$

Entonces:

$$CT = 4 + \sum_{i=1}^{n} 16n - \sum_{i=1}^{n} 8i + \sum_{i=1}^{n} 16$$

Ahora sacamos las constantes afuera:

$$CT = 4 + 16n\sum_{i=1}^{n} 1 - 8\sum_{i=1}^{n} i + 16\sum_{i=1}^{n} 1$$

¿De dónde sale $\sum_{i=1}^{n} 1$?

Sale de que tanto $16n$ como 16 son constantes respecto de i.

Por ejemplo:
$$\sum_{i=1}^{n} 16 = 16\sum_{i=1}^{n} 1$$

y como $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$,
$$16\sum_{i=1}^{n} 1 = 16n$$

Resolver cada sumatoria

1. Primera sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad 16n\sum_{i=1}^{n} 1 = 16n \cdot n = 16n^2$$

2. Segunda sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Como empieza en 1,
usamos la fórmula conocida:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$-8\sum_{i=1}^{n} i = -8 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Simplificamos:

$$= -4n(n+1)$$

3. Tercera sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} 16 = 16\sum_{i=1}^{n} 1 = 16n$$

Reemplazar todo junto

$$CT = 4 + 16n\sum_{i=1}^{n} 1 - 8\sum_{i=1}^{n} i + 16\sum_{i=1}^{n} 1$$

Reemplazamos
cada resultado:

$$CT = 4 + 16n^2 - 4n(n+1) + 16n$$

Ahora desarrollamos
el producto:

$$-4n(n+1) = -4n^2 - 4n$$

Entonces:

$$CT = 4 + 16n^2 - 4n^2 - 4n + 16n$$

Agrupamos términos semejantes:

Término cuadrático $16n^2 - 4n^2 = 12n^2$

Término lineal $-4n + 16n = 12n$

Término independiente 4

$$\boxed{CT = 12n^2 + 12n + 4}$$