

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

INGENIERÍA QUÍMICA

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS (2da parte)

▣ DISTRIBUCIONES MUESTRALES

49.- La vida media de una máquina para elaborar pasta es de 7 años, con una desviación estándar de 1 año. Suponiendo que las vidas de estas máquinas siguen aproximadamente una distribución normal, encuentre a) la probabilidad de que la vida media de una muestra aleatoria de 9 de estas máquinas caiga entre 6.4 y 7.2 años; b) el valor de x a la derecha del cual caería el 15% de las medias calculadas de muestras aleatorias de tamaño 9.

50.- Si el contenido en gramos de un determinado medicamento sigue una distribución normal $N(7,5;0,3)$, calcular la probabilidad de que en una muestra de tamaño 5 se obtenga que la media es menor que 7

51.- Una compañía de electrónica fabrica resistores que tienen una resistencia promedio de 100Ω y una desviación estándar 10Ω . Si se sabe que la distribución de la resistencia es Normal:

- a) Cuál es la probabilidad de que al tomar una muestra de 49 resistores, la resistencia promedio sea menor de 97Ω ?
- b) Si en lugar de tomar una muestra de 49 se considera una de 10 resistores ¿cuál será el valor de la probabilidad antes mencionada?
- c) ¿Es importante la hipótesis de normalidad de la variable en ambos casos? ¿Por qué?

52.- En una población determinada, la estatura de una persona adulta tiene un promedio de 165 cm con una desviación estándar de 7 cm. a) Si se toma una muestra aleatoria de 100 personas en esta población, calcular la probabilidad de que la estatura media de la muestra exceda 168 cm. b) Si se supone distribución normal de las estaturas, hallar la probabilidad de que en una muestra de 36 personas el desvío de la estatura resulte superior a 6 cm.

53.- Para una distribución chi cuadrada encuentre

- a) $\chi^2_{0,025}$ cuando $\nu = 15$
- b) $\chi^2_{0,01}$ cuando $\nu = 7$
- c) $\chi^2_{0,05}$ cuando $\nu = 24$
- d) $\chi^2_{0,005}$ cuando $\nu = 5$
- e) $\chi^2_{0,05}$ cuando $\nu = 19$
- f) $\chi^2_{0,01}$ cuando $\nu = 12$

54.- Para una distribución chi cuadrada encuentre χ^2_{α} tal que

- a) $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}) = 0.99$ con $\nu = 4$
- b) $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}) = 0.025$ con $\nu = 19$
- c) $P(37,652 < \chi^2 < \chi^2_{\alpha}) = 0.045$ con $\nu = 25$

55.- Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones, de una población normal con varianza $\sigma^2 = 6$, tenga una varianza s^2

- a) mayor que 9.1;
- b) entre 3.462 y 10.745.

Suponga que las varianzas muestrales son mediciones continuas.

56.- La pintura para autopista de color amarillo tiene una especificación que recomienda que la varianza del tiempo de secado no supere los 20 min^2 . Sabiendo que la distribución del tiempo de secado es aproximadamente Normal con varianza 16 min^2 :

- Hallar la probabilidad de que la varianza del tiempo desecado en una muestra de tamaño 10 exceda los $42,77 \text{ min}^2$.
- Hallar la variabilidad superada por el 20% de las muestras de tamaño 10 de tiempos de secado.

57.- a) Encuentre $t_{0,025}$ cuando $v = 14$.

b) Encuentre $-t_{0,10}$ cuando $v = 10$.

c) Encuentre $t_{0,995}$ cuando $v = 7$.

58.- Dada una muestra aleatoria de tamaño 24 de una distribución normal, encuentre k tal que

a) $P(-2.069 < T < k) = 0.965$;

b) $P(k < T < 2.807) = 0.095$;

c) $P(-k < T < k) = 0.90$.

59.- El gerente de una fábrica de cierto tipo de alimentos asegura que el peso promedio del producto que elabora es de 165.285 g. Un inspector toma una muestra de 16 paquetes del producto y los pesa. Los resultados fueron los siguientes:

165	158	153	162	171	175	173	169
166	170	164	177	148	167	152	149

Encuentra la probabilidad de $\bar{x} < 163.6875$.

60.- Empleando tablas de la distribución muestral de la variable aleatoria F de Fisher, encuentra los siguientes valores:

$f_{0.75, v_1=4, v_2=9}$; $f_{0.95, v_1=15, v_2=10}$; $f_{0.05, v_1=6, v_2=8}$; $f_{0.10, v_1=24, v_2=24}$

❑ ESTIMACIÓN

61.- Se supone que el espesor de cierta pintura al aceite (X) en mm; tiene distribución Normal. Se realizaron las siguientes observaciones de espesores de esta pintura:

0.89	0.88	0.88	1.03	1.09	1.12	1.29	1.31
1.48	1.49	1.59	1.62	1.64	1.71	1.76	1.83

- Calcular a partir de la muestra la media, la varianza, el desvío estándar y la mediana.
- ¿Cuál/es de estos valores utilizaría para estimar el valor central de los espesores de esta pintura?
- Si la muestra tuviera tamaño 1000, ¿qué estimador puntual elegiría para la media? ¿En qué basa su elección?

62.- Se quiere estimar el valor medio de las horas de estudio semanales de los alumnos recién ingresados a la Universidad. Se toma una muestra de 100 alumnos y se obtiene un promedio 4hs 20min. Sabiendo que la distribución de estos tiempos es aproximadamente Normal con desvío de 55 min. Construir un intervalo de confianza de nivel: 90%, 95% y 99% para el valor medio de las horas semanales de estudio.

63.- Un artículo del Journal of Sports Science expone un intervalo de confianza para el promedio del nivel de hemoglobina de los jugadores de hockey sobre hielo (en g/dl) en la Olimpiada de Canadá de 20 jugadores, fue estimado con un 95% de confianza, obteniéndose el siguiente intervalo (15.01;15.59)g/dl.

- Indicar los valores de $\bar{x}$ y s para esta muestra. Suponga que el nivel de hemoglobina de los jugadores de hockey sobre hielo en la Olimpiada de Canadá sigue una distribución Normal.
- Si se conociera la varianza poblacional y fuera de $0,36 \text{ (g/dl)}^2$, ¿cuál sería el nivel de confianza del intervalo construido?

64.- Se quiere estimar la estatura promedio en la población que se supone tiene una distribución Normal con $\sigma = 4 \text{ cm}$. Se toma una muestra de 144 personas y se obtiene que el promedio muestral es de 168 cm. a) Calcular el intervalo de confianza para la altura promedio de la población con un nivel de confianza del 98 %. b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra para mantener el mismo error muestral (que el obtenido en(a)) pero con un nivel de confianza del 95%?

65.- La resistencia a la rotura, expresada en kg de 12 ejemplares de cuerda es de

280, 242, 270, 285, 273, 275, 266, 257, 285, 274, 258, 264.

Estimar la resistencia media mediante un intervalo de confianza con nivel 0,95 suponiendo distribución Normal.

66.- En una muestra de 81 piezas de tela “modal” se obtuvo una elongación media muestral de 8,17% y un desvío estándar muestral del 1,42%. Además la tercera parte de las telas observadas tuvo elongaciones superiores a 8,4. Suponiendo que la elongación sigue una distribución Normal, estimar mediante un Intervalo del 95% de confianza:

a) el verdadero valor medio de elongación μ .

b) el desvío estándar poblacional de la elongación σ .

c) la proporción poblacional de telas con elongación superior a 8,4.

67.- Considere las siguientes muestras de contenido de grasa (en porcentaje) de salchichas seleccionadas al azar de dos marcas A y B:

A 25.2 21.3 22.8 17 29.8 21 25.5 16 20.9 19.5

B 24.2 20.7 21 18.9 29.1 20.5 25.2 16.3

Si se supone que los porcentajes de grasa de ambas marcas tienen distribución Normal:

a) Hallar un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los contenidos medios de grasa de las dos marcas.

b) ¿Es necesario pedir el cumplimiento de alguna otra condición?

c) Si se conoce que el desvío estándar poblacional del contenido de grasa de la primera marca es de 2,8g, mientras que el de la segunda es de 2,3 g, construir nuevamente el intervalo pedido en (a).

68.- Se piensa que la concentración del ingrediente activo de un antibiótico, es afectada por el tipo de instrumental utilizado en el proceso de fabricación. Se sabe que la desviación estándar de la concentración del ingrediente activo es de 3 g/l, independientemente del tipo de instrumental empleado en su producción. Se realizan 10 observaciones de una muestra de un antibiótico con cada uno de los equipos disponibles, y se obtienen los siguientes datos:

Equipo 1: 57.9 - 66.2 - 65.4 - 65.4 - 65.2 - 62.6 - 67.6 - 63.7 - 67.2 - 71.0

Equipo 2: 65.4 - 70.7 - 70.1 - 69.3 - 63.8 - 68.6 - 68.6 - 69.4 - 65.3 - 68.8

a) Suponiendo normalidad de las distribuciones, encontrar un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los valores medios de las concentraciones logradas por cada uno de los equipos.

b) Considerar ahora la dispersión poblacional desconocida pero igual para ambos equipos.

69.- Un equipo de investigación biológica está interesado en ver si una nueva droga reduce el colesterol en la sangre. Con tal fin toma una muestra de 10 pacientes y determina el contenido de colesterol en la sangre antes y después del tratamiento. Los datos muestrales expresados en miligramos por 100 mililitros son los siguientes:

Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes	217	252	229	200	209	213	215	260	232	216
Después	209	241	230	208	206	211	209	228	224	203

Construir un intervalo de confianza del 95% para la diferencia del contenido medio de colesterol en la sangre antes y después del tratamiento.

70.- Se tomó una muestra de $n = 36$ resistencias eléctricas resultando la desviación estándar muestral de las lecturas $s = 2,81$ ohm. Suponiendo normalidad, en la distribución de las resistencias hallar un intervalo de confianza de 95% para σ

71.- Se midió la altura de un río en un punto geográfico dado (en m) durante 20 días al azar del verano, obteniéndose los siguientes valores en cm:

69.5 71.9 72.6 73.1 73.3 73.5 75.5 75.7 75.8 76.1
79.7 79.5 80.1 82.6 83.7 92.7 78.0 77.9 78.1 79.6

a) ¿Qué condiciones se necesitan para que resulte válida la construcción de un intervalo de confianza para la varianza poblacional?

b) Construir un intervalo de confianza de 99% para la desviación estándar de la distribución de la altura de este río en verano.

72.- La pintura para autopista de color amarillo tiene una especificación que recomienda que la varianza del tiempo de secado no supere los 20min^2 . Sabiendo que la distribución del tiempo de secado es aproximadamente Normal con varianza 16min^2 :

a) hallar la probabilidad de que la varianza del tiempo de secado en una muestra de tamaño 10 exceda los $42,77\text{min}^2$.

b) hallar la variabilidad superada por el 20% de las muestras de tamaño 10 de tiempos de secado.

73.- Un experimento reportado en Popular Science compara las economías en combustible para dos tipos de camiones compactos a diesel equipados de forma similar. Supongamos que se utilizaron 12 camiones Volkswagen y 10 Toyota en pruebas de velocidad constante de 90 km/h. Si los 12 Volkswagen promedian 16 km/lt con una desviación estándar de 1.0 km/lt y los 10 Toyota promedian 11 km/lt con una desviación estándar de 0.8 km/lt, construya un intervalo de confianza del 98% para σ_1/σ_2 .

❑ PRUEBAS DE HIPÓTESIS

74.- Dados los siguientes pares de aseveraciones, indicar cuál/es no cumple/n con las reglas para establecer hipótesis acerca del valor de la media poblacional μ en una prueba basada en una muestra aleatoria $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Justificar la respuesta.

a) $H_0 : \mu = 100$ vs. $H_1 : \mu = 200$

b) $H_0 : \mu = 100$ vs. $H_1 : \mu < 100$

c) $H_0 : \mu = 100$ vs. $H_1 : \mu \neq 100$

d) $H_0 : \mu < 100$ vs. $H_1 : \mu \geq 100$

e) $H_0 : \mu \leq 100$ vs. $H_1 : \mu > 100$

f) $H_0 : \mu \neq 100$ vs. $H_1 : \mu = 100$

g) $H_0 : \bar{x} = 100$ vs. $H_1 : \bar{x} > 100$

Asociar los siguientes enunciados con las hipótesis que les correspondan.

a) Para determinar si las soldaduras efectuadas en tubos de una planta de energía nuclear cumplen con las especificaciones, se selecciona una muestra al azar de soldaduras y se realizan pruebas en cada soldadura de la muestra. La resistencia de la soldadura se mide como la fuerza requerida para romper la soldadura. Supongamos que en las especificaciones se establece que la resistencia media de soldaduras debe rebasar 100lb/pulg².

b) Interesa controlar si una balanza está correctamente calibrada, para ello se pesará una pesa patrón de 100kg, veinte veces.

- c) Se conduce una investigación para estudiar si el nivel de ventas promedio de una sucursal por día es inferior a 100 unidades.
 d) ¿Qué significaría el error de tipo I en (a)?
 e) ¿Qué implicaría el error de tipo II en (b)?

75.- El estadístico de contraste de un ensayo de hipótesis, Z , tiene distribución Normal estándar indicar para cada una de las regiones de rechazo, las hipótesis correspondientes y el nivel de significación considerado:

- a) $\{Z > 2,33\}$
 b) $\{Z > -2,58\}$
 c) $\{Z < 1,96 \vee Z > -1,96\}$

76.- Para cada uno de los siguientes pares de hipótesis, considerando una prueba cuyo estadístico de contraste tenga distribución normal estándar para los valores observados en cada caso, indicar el valor p de la prueba.

- a) $H_0 : \mu = 10$ vs $H_1 : \mu > 10$; $Z_{obs} = 2,5$
 b) $H_0 : \mu = 12$ vs $H_1 : \mu < 12$; $Z_{obs} = -1,2$
 c) $H_0 : \mu = 7$ vs $H_1 : \mu \neq 7$; $Z_{obs} = 2;8$

¿En qué casos rechazaría la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%?

77.- Una empresa estudia introducir un nuevo sistema de producción para mejorar su productividad media establecida actualmente en 42 unidades por persona y por día. Se estima que el cambio no será rentable si no consigue elevar dicho número por encima de 45 u. Realizada una prueba con la nueva tecnología, aplicada a 35 personas, se obtuvo una producción media de 46.5 y no se observó ningún cambio apreciable en la dispersión que estaba establecida en $\sigma = 3$ u. por día. Considerando esta información y utilizando un nivel de significación del 1%, ¿se debería efectuar el cambio tecnológico?

78.- Un fabricante sostiene que el modelo de auto A, tiene un rendimiento promedio menor a 13 Kilómetros por litro de nafta. Se selecciona una muestra de 9 de estos vehículos, y cada uno es conducido con un litro de nafta en las mismas condiciones. La muestra proporciona una media de 12.34km/l. Se sabe que la distribución de la cantidad de kilómetros recorridos por litro de nafta es Normal con un desvío estándar de 1.26 km/l. Plantear las hipótesis a contrastar, el estadístico del test junto con su distribución y la decisión tomada a nivel 0.05.

79.- Una compañía de productos para el consumidor está desarrollando un nuevo shampoo, y está interesada en la altura de la espuma (en mm). La altura de la espuma tiene una distribución aproximadamente Normal. La compañía quiere verificar si la altura de la espuma supera los 180 mm y si se considera una muestra de tamaño 24. Los valores observados son:

122.72	182.53	156.03	200.31	219.86	187.20	213.00	133.47
203.39	207.56	212.64	132.57	204.95	181.51	184.27	194.70
184.46	169.48	207.28	186.65	195.85	181.26	181.78	211.32

- a) Establecer las hipótesis correspondientes al test.
 b) Interpretar la salida del programa R. Concluir.

```
data: muestra
t =0.81221, df=23, p-value=0.2123
alternative hypothesis:true mean
is greater than 180
sample estimates:
mean of x 185.62
```

80.- Un capataz afirma que bajo su supervisión el armado de una pieza tiene una duración promedio inferior a 25 minutos y la dispersión de 2 minutos. El tiempo medio arrojado por una muestra de 25 obreros con este

nuevo proceso resultó de 23 minutos y el desvío estándar muestral es de 3.9 minutos, si los tiempos se distribuyen en forma aproximadamente Normal.

- a) Plantear un test para decidir si la media y la variabilidad del tiempo del armado de una pieza coinciden con la afirmación del capataz.
- b) Concluir en función de los datos muestrales, considerando un nivel de significación del 5%.

81.- El fabricante de neumáticos Mirelli sostiene que en promedio sus productos tienen una duración superior a 50.000 km antes de necesitar reemplazo. Un grupo de consumidores quiere poner a prueba dicha afirmación. Para ello seleccionan una muestra de 50 neumáticos y resulta que en promedio duraron 50.300 km con una dispersión de 1000 km.

- a) Definir con claridad cuál sería el parámetro de interés en este problema.
- b) Establecer la hipótesis nula y la alternativa en términos de dicho parámetro.
- c) Explicar el significado de los errores de tipo I y II en el contexto de este problema.
- d) Responder si la afirmación del fabricante es aceptable con un nivel de significación del 0,01.

82.- Una empresa de cosmética afirma que una nueva crema reduce las manchas del cutis tras un uso prolongado (3 meses o más) en más de un 60%. A fin de verificar la veracidad de esta afirmación, un centro de belleza que pretende adquirir este producto, utilizará el mismo en 120 manchas de cutis de clientas elegidas al azar. Si se eliminan más de 82 manchas tomará la decisión de adquirir el nuevo producto. Evaluar el nivel de significación utilizado.

83.- Se supone que el 10% de los consumidores de cierta localidad prefiere la marca A de café. Se realizó una campaña publicitaria y después de la misma se entrevistó a 100 habitantes de esta localidad para determinar la efectividad de la campaña. El resultado de esta encuesta mostró que 13 encuestados prefieren la marca A. ¿Existe evidencia a nivel aproximado 0.05, de un aumento en la preferencia por la marca A?

84.- Un productor está interesado en reducir el tiempo de secado de una pintura impermeabilizante. Se prueban dos fórmulas de pintura, la fórmula A tiene el contenido químico tradicional, mientras que la fórmula B tiene un nuevo ingrediente que reduce el tiempo de secado. De la experiencia se sabe que la desviación estándar del tiempo de secado es de 8 minutos, para ambas pinturas y que la distribución es normal. Se pintan diez especímenes con cada una de estas fórmulas resultando las medias muestrales de 121 minutos y 112 minutos respectivamente. ¿A qué conclusión puede llegar el productor sobre la eficacia del nuevo ingrediente considerando un nivel de significación del 5%?

85.- En un laboratorio de especialidades medicinales están comparando la efectividad de dos medicamentos A y B para el tratamiento de la mastitis. Para ello se trataron dos grupos de vacas afectadas con síntomas similares. Se registró el tiempo en días que tardaron en desaparecer los síntomas en cada caso. Si las distribuciones de estos tiempos son normales con varianza común:

A 5 7 6 7 7 8 6 8 7 6

B 7 9 10 8 6 5 7 9 9 5

Plantear las hipótesis a contrastar, el estadístico del test junto con su función de distribución, la región de rechazo y la decisión tomada nivel aproximado 0.05.

86.- Un nuevo dispositivo de filtrado se instala en una planta química. Antes y después de su instalación una muestra aleatoria entrega la siguiente información del porcentaje de impurezas:

Antes de instalación: $n_1 = 8$ $S^2 = 101,17$

Después de instalación: $n_2 = 9$ $S^2 = 94,73$

Pruebe la hipótesis de que las varianzas del porcentaje de impurezas antes y después de la instalación del nuevo dispositivo son iguales. Use un nivel de significación de 0.05