DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ing. Adelma Grágeda

Dada una ecuación definida en forma implícita $F(x) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$

Se aplica la regla de la cadena para encontrar la derivada parcial de la función F respecto de una de sus variables.

Al ser $F(x) = 0$, cualquiera de sus derivadas es cero.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = 0$$

El sistema tiene n variables y m ecuaciones, se calcula el número de variables independientes que puede tener el sistema

$$n = número\ de\ variables$$

$$m = número\ de\ ecuaciones$$

$$n_{VI} = n - m = número\ de\ variables\ independientes$$

Sistema I

$F(x, y) = 0$	$n = 2$ $m = 1$ $n_{VI} = 2 - 1 = 1\ variable\ independiente$

Si la variable independiente, es: x
Entonces la variable dependiente es y: $y = f(x)$
Se puede calcular la variación de y respecto de x

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

$\frac{dx}{dx} = 1$	$\frac{\partial F}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$

Sistema II

$F(x, y, z) = 0$	$n = 3$ $m = 1$ $n_{VI} = 3 - 1 = 2\ variables\ independientes$

Si las variables independientes, son: x, y
Entonces la variable dependiente es z: $z = f(x, y)$
Se puede calcular la variación de z respecto de x
O, calcular la variación de z respecto de y

Si se quiere calcular la variación de z respecto de x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}$

Si se quiere calcular la variación de z respecto de y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial y}{\partial y} = 1$ $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}$

Sistema III

$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$	$n = 3$ $m = 2$ $n_{VI} = 3 - 2 = 1\ variable\ independiente$

Si la variable independiente, es: x
Entonces las variables dependientes son: y, z: : $y = f(x)$, : $z = f(x)$
Se puede calcular la variación de y respecto de x
O, calcular la variación de z respecto de x

Si se quiere calcular la variación de y respecto de x:

	$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$

Si se quiere calcular la variación de z respecto de x:

	$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$

Las derivadas obtenidas dependen del número de ecuaciones, el número de variables y de que variables se elijan como independientes y cuales como dependientes.