Tema 5: Cálculo en campos escalares

Contextualización

01-C. Dos barcos que salieron al mismo tiempo de un punto van uno hacia el norte y el otro hacia el noreste. Si las velocidades de dichos barcos son de 20 km/h y 40 km/h respectivamente, ¿con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos?

02-C. Si x e y son precios de dos artículos de primera necesidad y demanda $D(x,y)$ de ellos se puede expresar mediante un modelo matemático a través de la función, $D(x,y) = \frac{\ln(x+y)}{e^x}$, determinar $\frac{\partial D}{\partial x}$ y $\frac{\partial D}{\partial y}$ e interpretar sus significados.

Observación Reflexiva

01-R. La derivada de una función de una variable mide la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto de la variable independiente. ¿Cómo relaciona este concepto con el de derivadas parciales de una función de dos variables?

02-R. ¿En el campo de la física, puede considerarse la distribución de la temperatura en un cuerpo como un campo escalar? Fundamentar en caso afirmativo y mencionar posibles variables independientes que definirían un valor de la temperatura como variable dependiente.

03-R. Proponga un ejemplo aplicado de una función real de dos variables reales. Identifique la magnitud que representa la función y qué magnitudes representan las variables. Describa el sentido de la función. Quedan excluidas de las posibles respuestas las funciones relacionadas con Geometría.

Conceptualización

01-T. Si una función $f(x,y)$ presenta una derivada direccional nula en un punto de su dominio ¿qué particularidad presenta la función en dicho punto?

02-T. Explique la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas de varias variables.

03-T. Sea N el número de potenciales interesados en tomar un curso de actualización profesional. Sea p el costo total del curso y q el valor que las empresas del medio le asignan al certificado que se otorga. Defina conceptualmente si es razonable suponer que N es función de p y de q y que, además, $Np < 0 \wedge Nq > 0$.

Experimentación Activa

01-E. Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = (y-4)^{-2}$

b) $f(x,y) = ln(x+7)$

c) $f(x,y) = \sqrt{y^2+9x}$

d) $f(x,y) = \sqrt{12-x^2-4x}$

02-E. Calcule las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 2xy^2e^{3x-8y}$

b) $f(x,y) = x^3\ln(9xy^2)$

c) $f(x,y,z) = \ln(x^2y^3z^4)$

d) $f(x,y,z) = \frac{2x^5}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^2y}{x}$

03-E. Obtenga el diferencial total de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^2 + 7xy - y^3$

b) $f(x,y) = xy^3\, sen(2x^2 - y^2)$

c) $f(x,y,z) = y\, e^{3/x-2/y^2+6/z}$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{4x^2+9y^2} - 3z$

04-E. Calcule $\frac{dw}{dt}$ aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas y verifique el resultado por sustitución y derivación, siendo:

a) $w = \text{tg}\,(x+3y)$ $\quad x = 2t^3 \quad y = t^2 + t$

b) $w = x^3 ln(xy)$ $\quad x = e^{2t} \quad y = e^{-3t}$

c) $w = 3x^2y + 2xy^2$ $\quad x = t^2 - 1 \quad y = 1 - t^2$

d) $w = y^2 cos(xy)$ $\quad x = t^3 \quad y = t^{-2}$

05-E. Utilizando la regla de la cadena, calcule $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$, siendo:

a) $w = x^2y$ $\quad x = u^2 - uv \quad y = u^2 + uv$

b) $w = x\, e^{x-y}$ $\quad x = u^2v \quad y = uv^2$

c) $w = xy\,\text{sen}\,(6x/y)$ $\quad x = uv \quad y = v$

d) $w = xy(x-y)$ $\quad x = uv \quad y = u/v$

06-E. Dada la función definida en forma implícita obtenga dy/dx

a) $F(x,y): 6x^2e^{12y-3y} = 0$

b) $F(x,y): 5x^3y - \frac{13x}{y^5} = 0$

c) $F(x,y): (3x-4y)^2 - (4x+3y)^2 = 0$

07-E. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

a) $F(x,y,z): xye^{3x+6z} = 0$

b) $F(x,y,z): x^2yz^3\sqrt{x^2-4} = 0$

c) $F(x,y,z): z^3sen(x^2+y^2) = 0$

08-E. Dado el sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases} 2x - y^2 - z^2 = 0 \\ x^4 - yz^3 = 0 \end{cases}$ Calcule $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\begin{cases} (x-y)e^{y+z} = 0 \\ (x+y)e^{y-z} = 0 \end{cases}$ Calcule $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$

c) $\begin{cases} u\,senx - v\,\text{sen}\,y = 0 \\ u\,senx + \text{sen}\,z = 0 \\ \text{sen}\,y - u\,\text{sen}\,z = 0 \end{cases}$ Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}$

01-P. El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm respectivamente con un posible error en la medición de 0,1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

02-P. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal de una lata cilíndrica cerrada que mide 10 cm de altura y 4 cm de diámetro. El metal para la parte superior y el fondo es de 0,1 cm de grueso y el metal de los lados tiene 0,05 cm de espesor.

----ooo0ooo----