Unidad 2.4 – ÁLGEBRA DE LOS CIRCUITOS DIGITALES

MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

Contenido

- Concepto y ventajas
- Métodos
- Algebraico
- Procedimiento
- Ejemplos

- Mapa de Karnaugh.
  - Método de aplicación
  - Ejemplos
- Método de Quine McCluskey
  - Método de aplicación
  - Ejemplos

Referencias (Aula Virtual)

> Flórez Fernández H. (2010). DISEÑO LÓGICO. Capítulo 3: Álgebra de Boole.

> Brown S. (2006). FUNDAMENTOS DE LÓGICA DIGITAL CON DISEÑO VHDL. Capítulo 4: Implementacion optimizada de funciones lógicas.

> Mano M., Kime C., (2005). FUNDAMENTOS DE DISEÑO LÓGICO Y DE COMPUTADORAS. Cap. 2: Circuitos Lógicos Combinacionales.

> Mandado E., (1998). SISTEMAS ELÉCTRÓNICOS DIGITALES. Capítulo 3: Sistemas Combinacionales.

> Angulo Usategui (1991). ELECTRÓNICA DIGITAL MODERNA - Teoría y Práctica. Cap. 3: El Álgebra Lógica o de Boole.

Minimización de Funciones Lógicas

Concepto

Minimizar una función lógica significa modificarla adecuadamente aplicando las propiedades del álgebra binaria, para que siendo equivalente a la función original, tenga la mínima estructura, variables y cantidad de operadores.

Ventajas

- Algebraicas → funciones más simples.
- Circuitales → circuitos reducidos con menos retardos.
- Económicas → menor cantidad de componentes.

Métodos

- **Algebraico:** Aplicando propiedades del álgebra binaria.
- **Mapas de Karnaugh:** Utilizando gráficos o mapas.
- **Quine Mc Cluskey:** Utilizando tablas.

Minimización de Funciones Lógicas

Método directo o algebraico

No requiere un formato especial de la función. Es necesario un buen conocimiento y manejo de las propiedades. No asegura la obtención de la estructura mínima.

Pasos generales

- Deshacer todas las negaciones múltiples.
- Reemplazar todos los operadores secundarios o combinados por sus desarrollos AND - OR - NOT.
- Realizar todas las operaciones distributivas que estén indicadas en la función.
- Eliminar variables o términos duplicados.
- Eliminar variables directas y negadas de términos adyacentes.

Método Algebraico

Ejemplo 1

Función original .... $F(A,B,C) = (A.\overline{B}.C + \overline{A.C}).\overline{A}$

por ley de DeMorgan .... $F(A,B,C) = (A.\overline{B}.C + \overline{A} + \overline{C}).\overline{A}$

por ley distributiva .... $F(A,B,C) = A.\overline{B}.C.\overline{A} + \overline{A}.\overline{A} + \overline{C}.\overline{A}$

por ley del complemento .... $F(A,B,C) = 0.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{A} + \overline{C}.\overline{A}$

por ley de idempotencia .... $F(A,B,C) = 0.\overline{B}.C + \overline{A} + \overline{C}.\overline{A}$

por ley de invarianza .... $F(A,B,C) = 0 + \overline{A} + \overline{A}.\overline{C}$

por ley de tautología .... $F(A,B,C) = \overline{A} + \overline{A}.\overline{C}$

por ley de absorción .... $F(A,B,C) = \overline{A}$

$F(A,B,C) = \overline{A}$ .... **función mínima**

Método Algebraico

Ejemplo 2

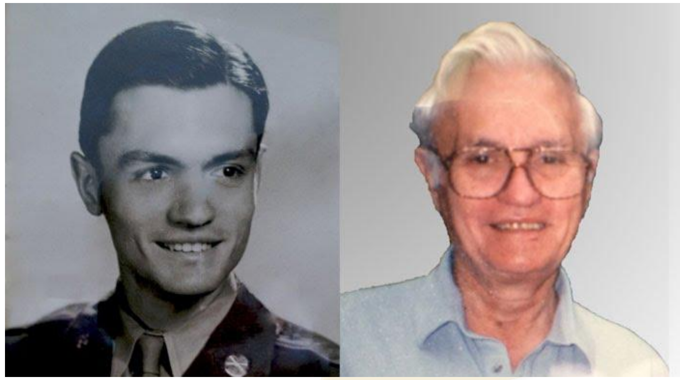
$$f\,(w, x, y) = \overline{\overline{\bar{w} + w\,.\,x} + w.x.y}$$

Función original	→	$\overline{\overline{\bar{w} + w\,.\,x} + w.x.y}$
Luego de aplicar ley de DeMorgan	→	$\overline{\overline{\bar{w} + w\,.\,x}}\;.\;\overline{w.x.y}$
Luego de aplicar ley de involución	→	$(\bar{w} + w\,.\,x)\;.\;\overline{w.x.y}$
Luego de aplicar ley de De Morgan	→	$(\bar{w} + w\,.\,x)\;.\;(\bar{w} + \bar{x} + \bar{y})$
Luego de aplicar ley distributiva	→	$(\bar{w} + w\,.\,x)\,.\,\bar{w} + (\bar{w} + w\,.\,x)\,.\,\bar{x} + (\bar{w} + w\,.\,x)\,.\,\bar{y}$
Luego de aplicar ley distributiva	→	$(\underbrace{\bar{w}\,.\bar{w}}_{\bar{w}} + \underbrace{w\,.\,x\,.\bar{w}}_{=0}) + (\bar{w}\,.\bar{x} + \underbrace{w\,.\,x\,.\bar{x}}_{=0}) + (\bar{w}\,.\bar{y} + w\,.\,x\,.\bar{y})$
Luego de aplicar leyes de idempotencia y del complemento	→	$(\bar{w} + 0) + (\bar{w}\,.\bar{x} + 0) + (\bar{w}\,.\bar{y} + w\,.\,x\,.\bar{y})$
Luego de aplicar ley de tautología	→	$\bar{w} + \bar{w}\,.\bar{x} + \bar{w}\,.\bar{y} + w\,.\,x\,.\bar{y}$
Luego de aplicar ley distributiva inversa	→	$\bar{w}\,.(\underbrace{1 + \bar{x} + \bar{y}}_{=1}) + w\,.\,x\,.\bar{y}$
Luego de aplicar ley de invarianza	→	$\bar{w}\,.1 + w\,.\,x\,.\bar{y}$
Luego de aplicar ley de tautología	→	$\bar{w} + w\,.\,x\,.\bar{y}$ ← **Función mínima**

Mapa de Karnaugh

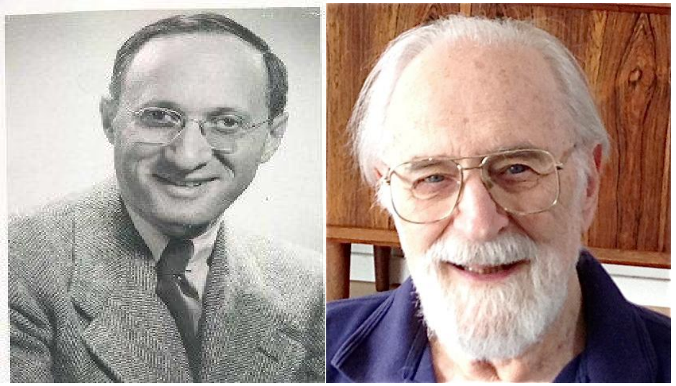
El método gráfico de Karnaugh-Veitch, llamado así en honor a los primeros matemáticos que lo crearon, genera un procedimiento gráfico-sistemático para la reducción/minimización de funciones lógicas.

Edward W. Veitch (1924 - 2013)



Edward W. Veitch (1924 - 2013). Se graduó de la Universidad de Harvard en 1946 con un título en Física, seguido de títulos de posgrado de Harvard en Física y Física Aplicada en 1948 y 1949, respectivamente. En 1952 publica "Un método de gráfico para simplificar funciones lógicas", un año después (1953) el método es refinado por Maurice Karnaugh en lo que ahora se conoce como el método del mapa de Karnaugh.

Maurice Karnaugh (93 años)



Maurice Karnaugh, (nacido el 4 de octubre de 1924 en la ciudad de Nueva York) es un físico y matemático estadounidense.
Estudió en la Universidad de Yale, licenciatura en física (1949), M.Sc. (1950) y Ph.D. en física (1952) con una tesis sobre La Teoría de la Resonancia Magnética. Karnaugh trabajó en los Laboratorios Bell (1952-1966), desarrollando el mapa de Karnaugh (1953) y la codificación de circuitos lógicos.

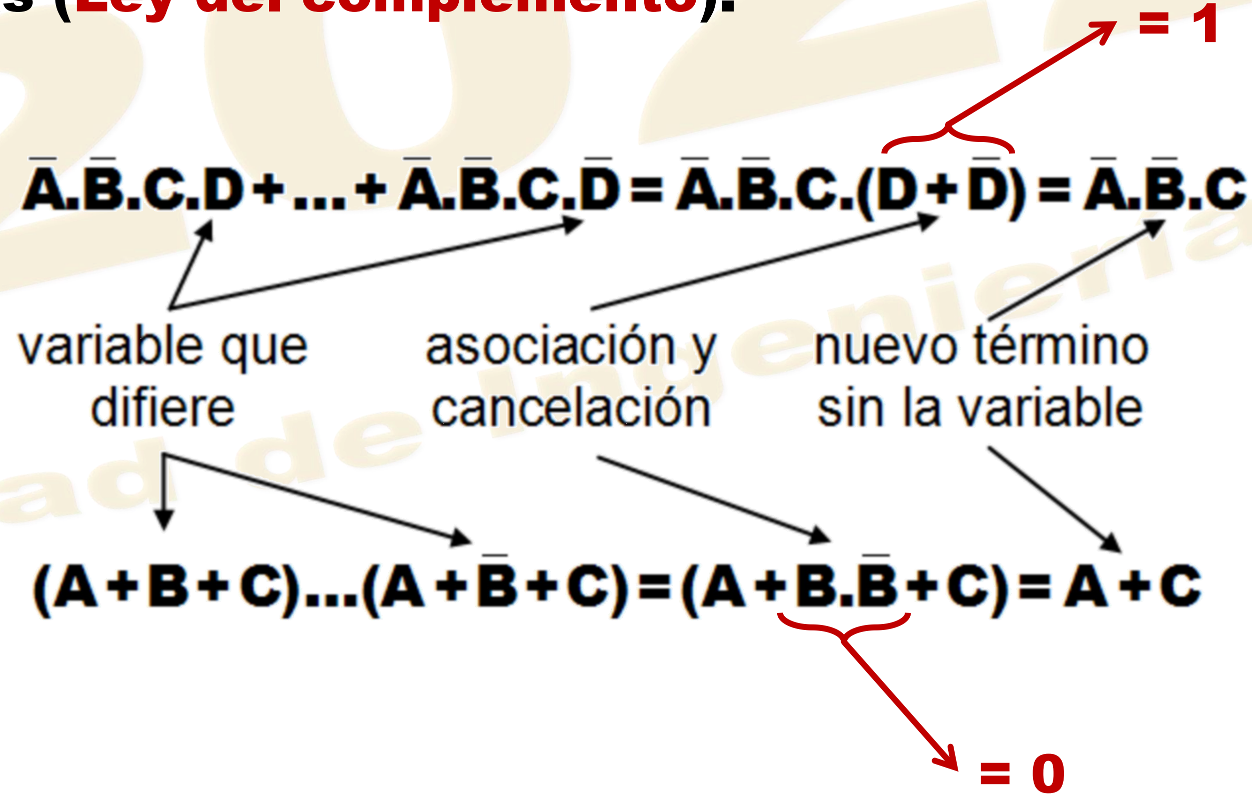
Mapa de Karnaugh

Proceso intrínseco

(Florez, pg. 72; Mano, pg. 44; Mandado, pg. 42; Angulo, pg. 83)

Por razones prácticas, se limita a funciones de hasta 6 variables. Requiere de funciones en formato canónico, pseudo-canónico o tabla de verdad.

En esencia, permite organizar términos adyacentes para eliminar las variables directas y negadas (Ley del complemento).



$$\bar{A}.\bar{B}.C.D + \ldots + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} = \bar{A}.\bar{B}.C.\overbrace{(D+\bar{D})}^{=\,1} = \bar{A}.\bar{B}.C$$

variable que difiere

asociación y cancelación

nuevo término sin la variable

$$(A+B+C)\ldots(A+\bar{B}+C) = (A+\underbrace{B.\bar{B}}_{=\,0}+C) = A+C$$

Mapa de Karnaugh

Descripción general

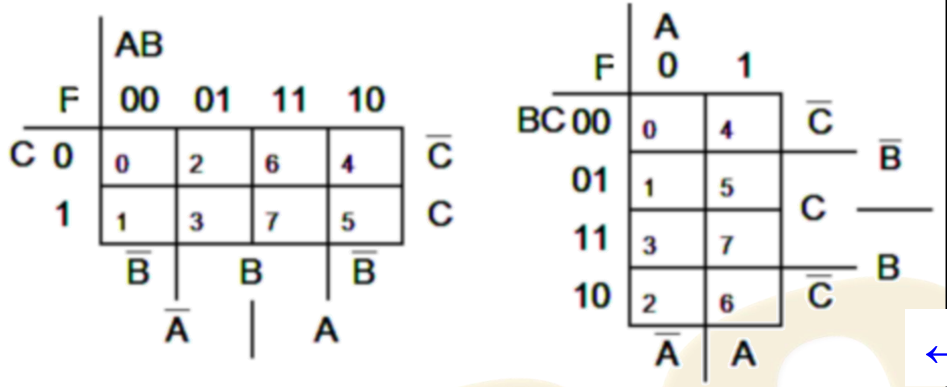
Para poder realizar una selección cómoda y eficiente de las variables a eliminar, los términos canónicos se disponen en un mapa o tabla, tal que su disposición física le permite al usuario identificar fácilmente los términos adyacentes.

Existe un mapa diferente que debe utilizarse, según la cantidad de variables de la función (siguiente diapositiva). Esto se debe a que cada mapa debe ser capaz de contener a todos los posibles trminos canónicos.

Además, la disposición gráfica permite la utilización repetida de un mismo término (ley de idempotencia), cuando deba componerse con otros, más de una vez, lo que no ocurre cuando se aplica el método algebraico y debe ser advertido por el usuario.

Para funciones de más de seis variables, el método se complica demasiado, por lo que no es recomendable su aplicación.

Mapa de Karnaugh

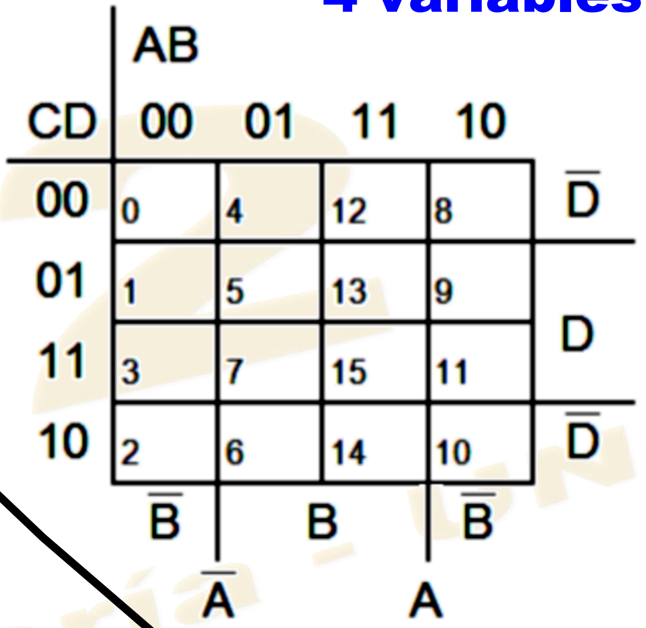


← F(A,B,C)

3 variables 2 formatos

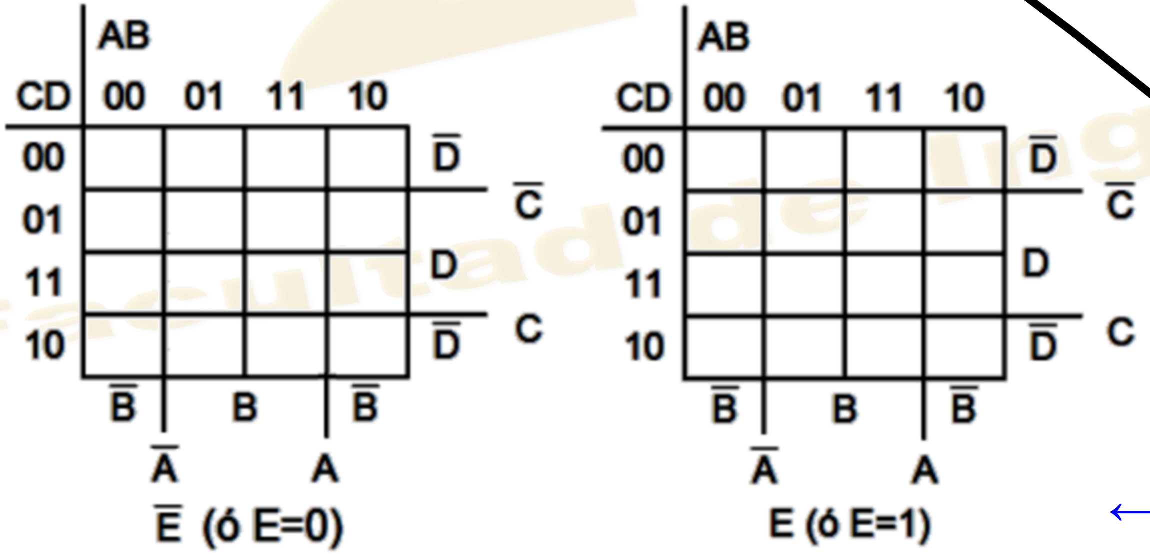
F(A,B,C,D) →

4 variables



Mapas de variables

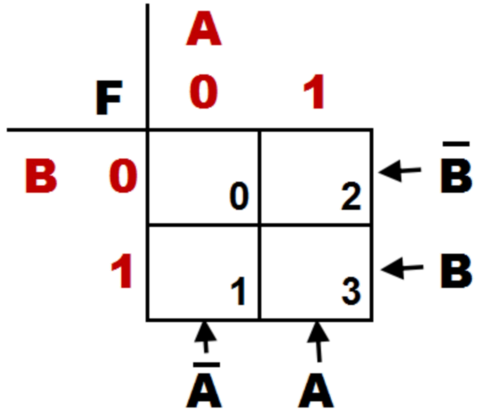
5 variables



← F(A,B,C,D,E)

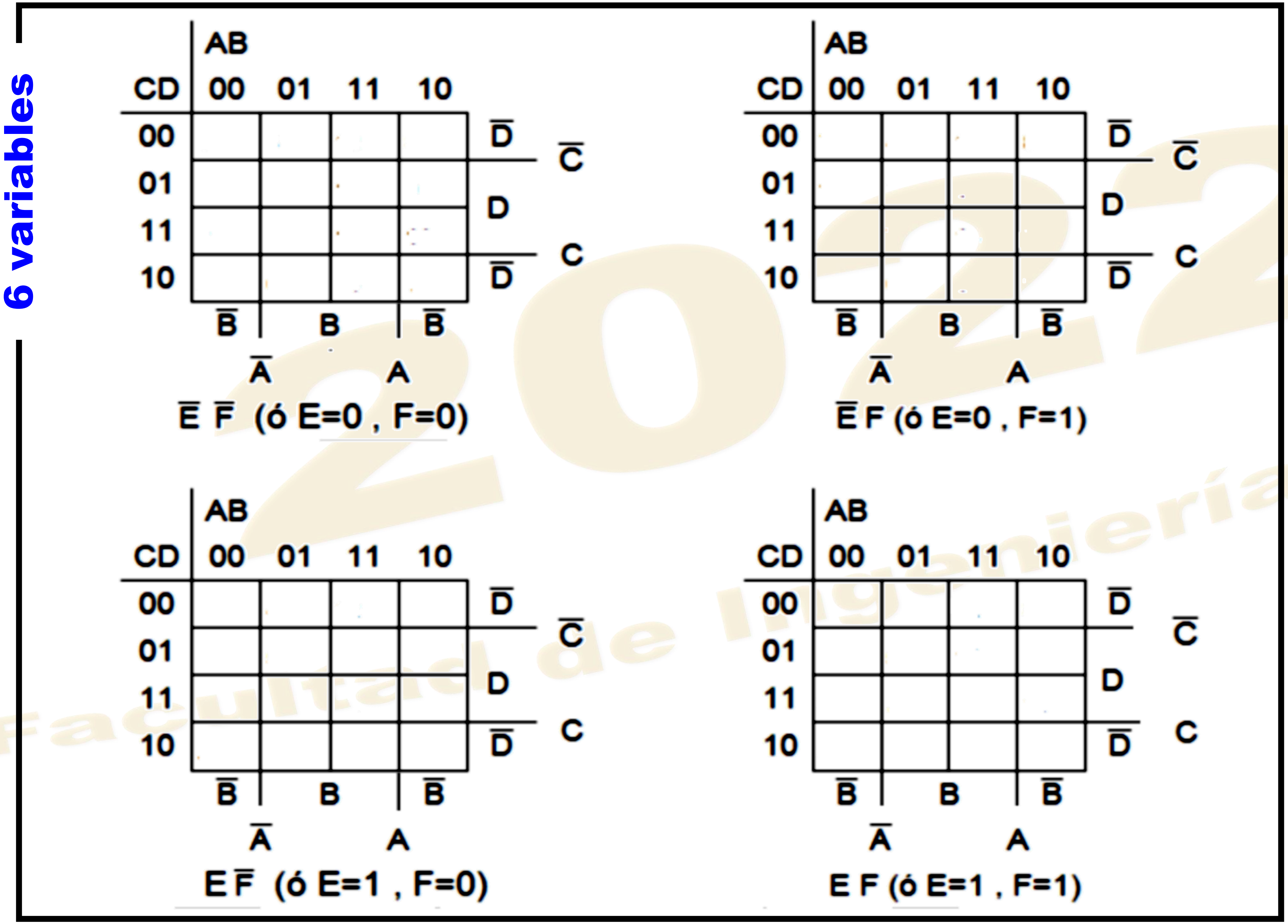
2 variables

F(A,B) →



Mapa de Karnaugh

6 variables



$\bar{E}\ \bar{F}$ (ó E=0 , F=0)

$\bar{E}\,F$ (ó E=0 , F=1)

$E\,\bar{F}$ (ó E=1 , F=0)

E F (ó E=1 , F=1)

Mapas de variables

Z(A,B,C,D,E,F)

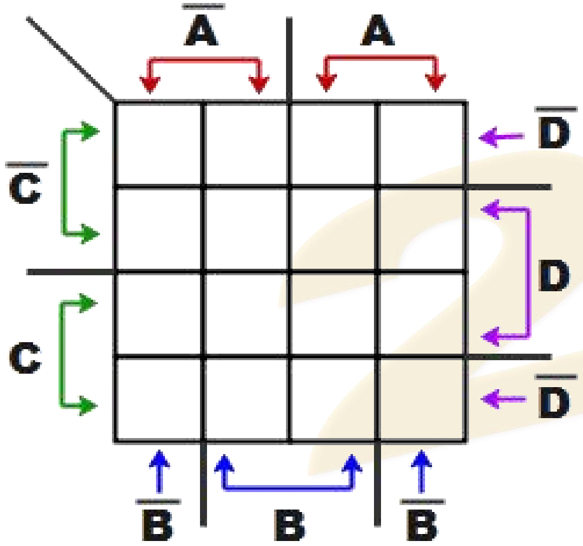
Método de Aplicación

1. **Se pueden utilizar funciones canónicas** algebraicas o numéricas, tipo Σπ o πΣ, funciones pseudo-canónicas o tablas de verdad.
2. Las variables en los términos algebraicos deben estar en la **misma secuencia que las variables** del mapa.
3. **Se grafica el mapa cuyo formato dependerá de la cantidad de variables que contenga la función**. Concretamente, la tabla debe contener los casilleros suficientes para albergar la cantidad máxima de términos posibles en la función.

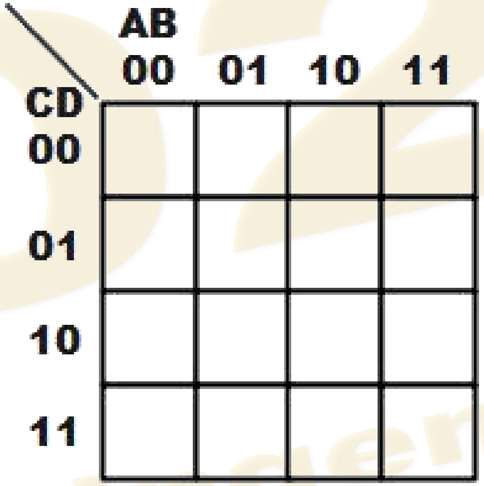
Mapa de Karnaugh

Método de Aplicación *(continuación)*

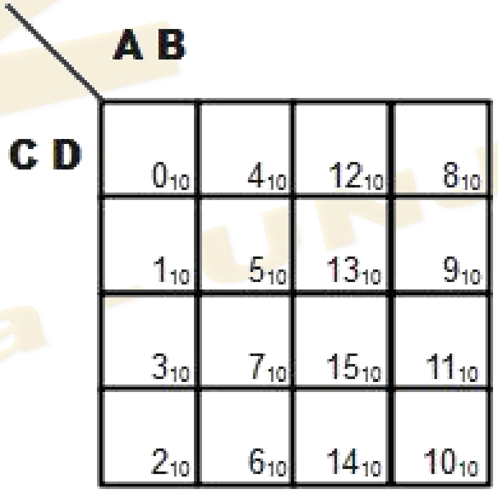
3.a Para identificar y ubicar los términos de la función se dispone de tres tipos de nomenclaturas diferentes pero equivalentes:



Por sectores de variables



Por codificación binaria



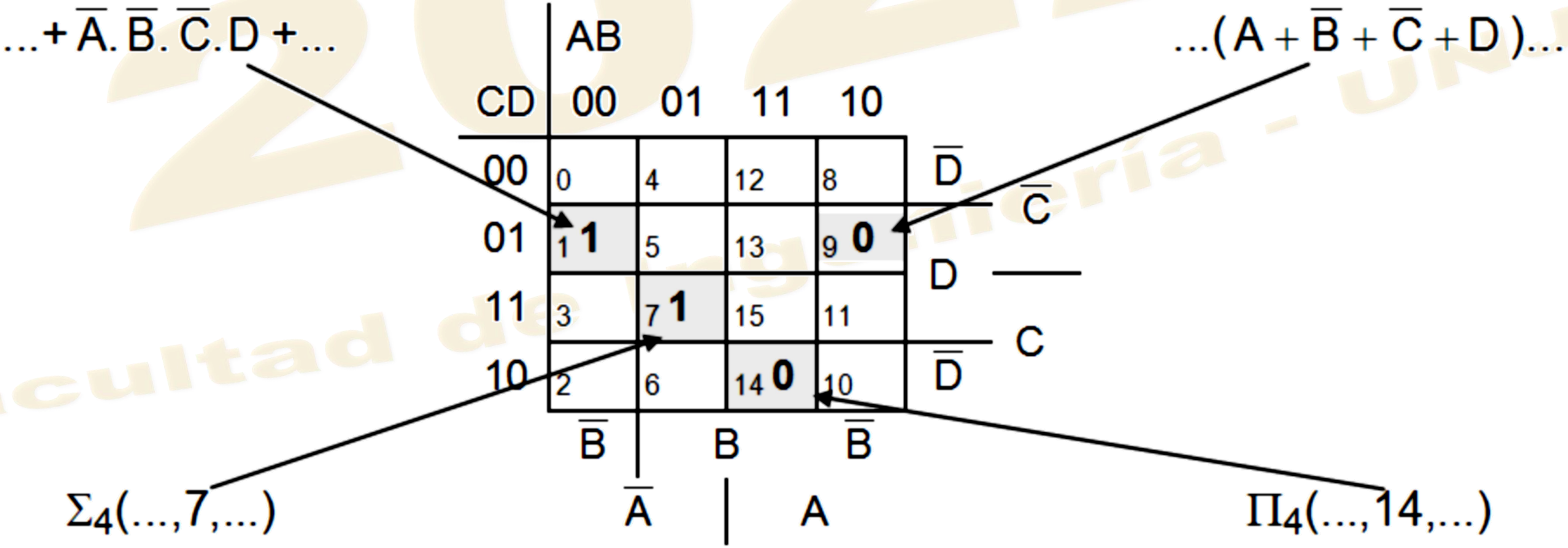
Por codificación decimal

La secuencia numérica "extraña" que se observa en la codificación decimal es para lograr que los términos canónicos adyacentes estén juntos; lo mismo ocurre para la codificación binaria (código Gray → continuo).

El usuario puede utilizar la nomenclatura que le resulte más cómoda, según el formato de la función, o combinarlas.

Método de Aplicación *(continuación)*

4. **Los términos canónicos se marcan en el casillero correspondiente del mapa, utilizando la nomenclatura más conveniente. Si la función es pseudo-canónica, se marcarán todas las casillas que correspondan a las variables faltantes en los dos estados.**



Mapa de Karnaugh

Método de Aplicación *(continuación)*

4.a. Para el caso de 5 ó 6 variables, el orden de la nomenclatura decimal puede variar, según la posición en que sea ubicada la 5º ó 5º y 6º variables dentro de la función. Esto se debe a que el valor decimal se obtiene de la decodificación binaria del término.

Cualquier orden es válido, pero debe mantenerse.

En el caso de 5 variables:

Ordenación 1:

G(A,B,C,D,E)

$$ABCDE = 01001_2 = 9_{10}$$

Ordenación 2:

G(E,A,B,C,D)

$$EABCD = 10100_2 = 20_{10}$$

Otra ubicación de la 5º variable (E) generará otra secuencia numérica.
Mismo criterio para 6 variables.

Ordenación 1

G(A,B,C,D,E)

	AB			
G	00	01	11	10
CD 00	0	8	24	16
01	2	10	26	18
11	6	14	30	22
10	4	12	28	20

E = 0

← Pares

Impares →

	AB			
G	00	01	11	10
CD 00	1	9	25	17
01	3	11	27	19
11	7	15	31	23
10	5	13	29	21

E = 1

Ordenación 2

G(E,A,B,C,D)

	AB			
G	00	01	11	10
CD 00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

E = 0

← Numeración

corrida →

	AB			
G	00	01	11	10
CD 00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

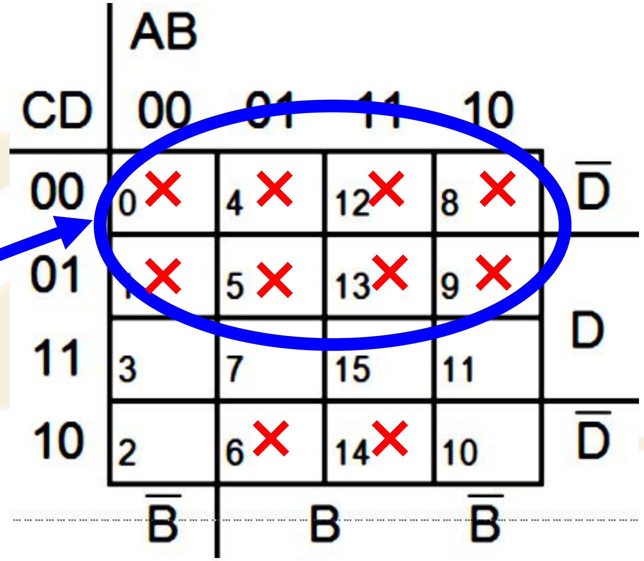
E = 1

Mapa de Karnaugh

Método de Aplicación *(continuación)*

5. **Se forman grupos** de marcas bajo las siguientes consideraciones:

- Se forman grupos con cantidades de marcas igual a una potencia entera de 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, etc., **PRIMERO LOS GRUPOS MÁS GRANDES**.



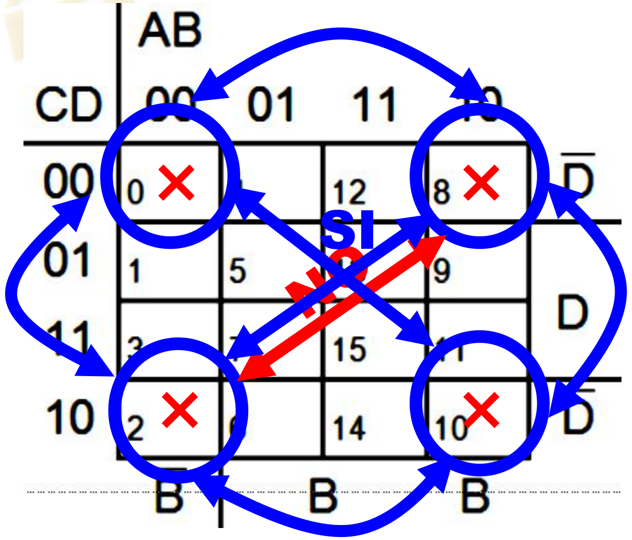
- En todos los grupos, las marcas deben ser **adyacentes** (juntas, no en diagonal).

También hay adyacencia entre las columnas extremas,

filas extremas,

dos vértices no opuestos por una diagonal

o los cuatro vértices.

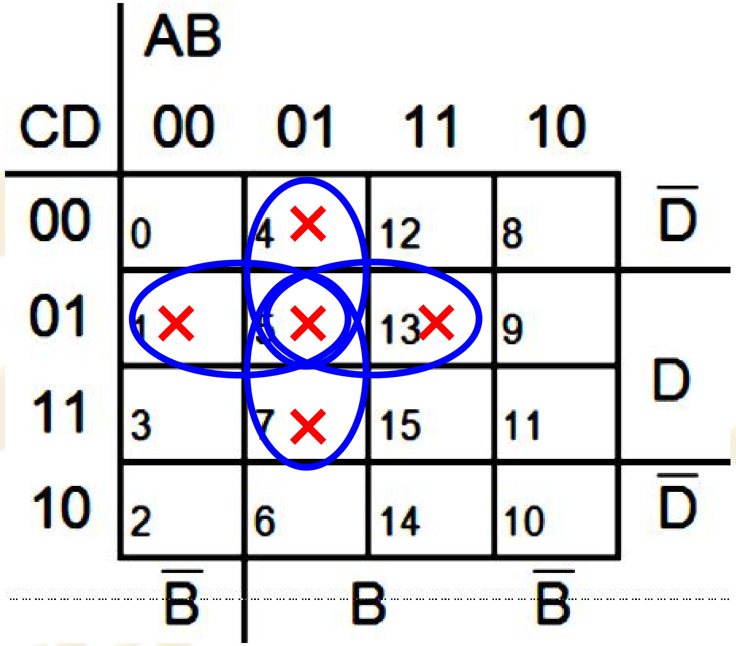


Mapa de Karnaugh

Método de Aplicación *(continuación)*

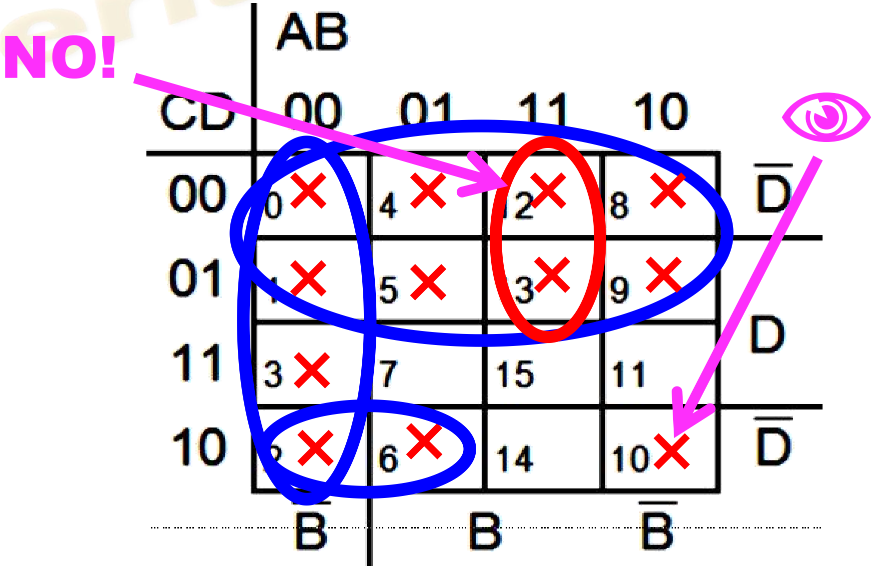
5. **Se forman grupos** de marcas bajo las siguientes consideraciones:

- Una misma marca puede formar parte de **más de un grupo**, si con ello se logra configurar un grupo más grande (propiedad de idempotencia).



- No deben quedar marcas **sin pertenecer** a algún grupo,

ni formarse **grupos redundantes**.

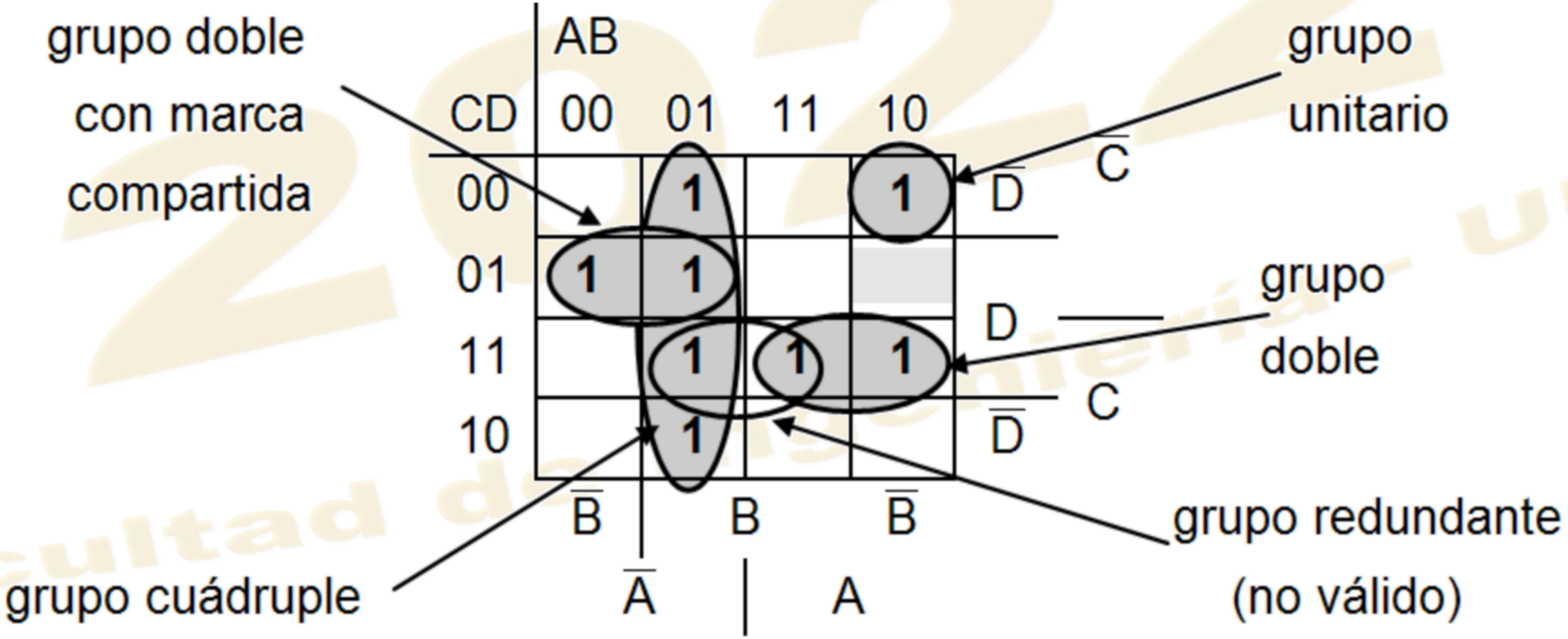


- Las marcas que no puedan agruparse con otras, formarán **grupos unitarios** y no podrán eliminar ninguna variable.

Mapa de Karnaugh

Método de Aplicación *(continuación)*

5. Formación de grupos - resumen



Mapa de Karnaugh

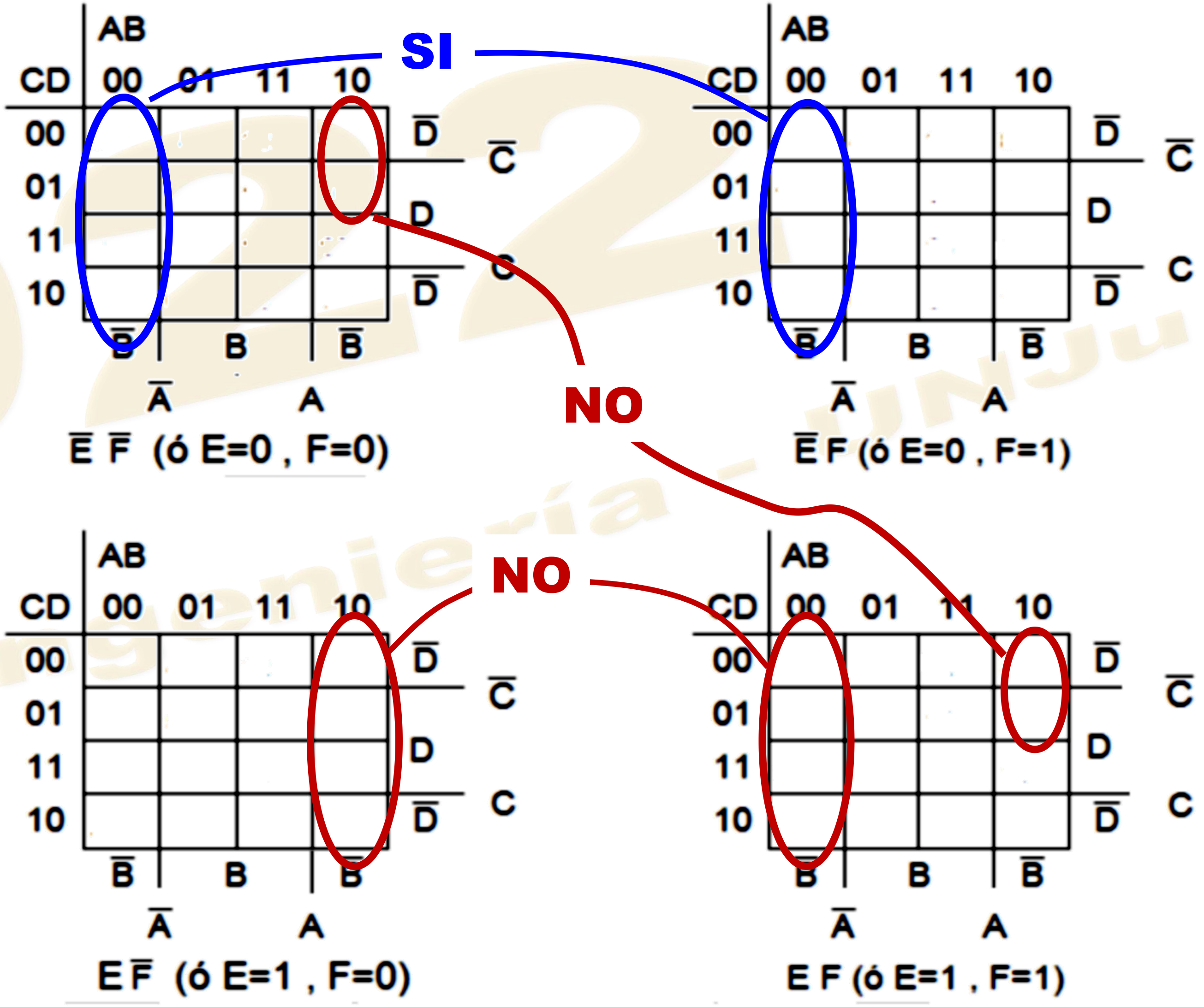
Método de Aplicación *(continuación)*

5. Formación de grupos (*continuación*)
Para los mapas de 5 ó 6 variables, cada mapa individual sigue los mismos lineamientos que el de 4 variables.

Para formar grupos entre mapas, los ´terminos deben estar en la misma posición relativa.

Los grupos entre mapas deben enlazar los 4 mapas ó 2 mapas NO diagonales.

Siempre es requerimiento formar los grupos más grandes primero.



Método de Aplicación *(continuación)*

6. Finalmente **se escribe la nueva función** minimizada y equivalente con la primitiva:

- Debe **mantenerse el formato** de la estructura de origen (Σπ o πΣ), aunque la nueva función minimizada no será estrictamente canónica.
- Debe contener **tantos términos como grupos** se hayan formado.
- Las variables que están **directas y negadas** en el grupo, **se eliminan:**

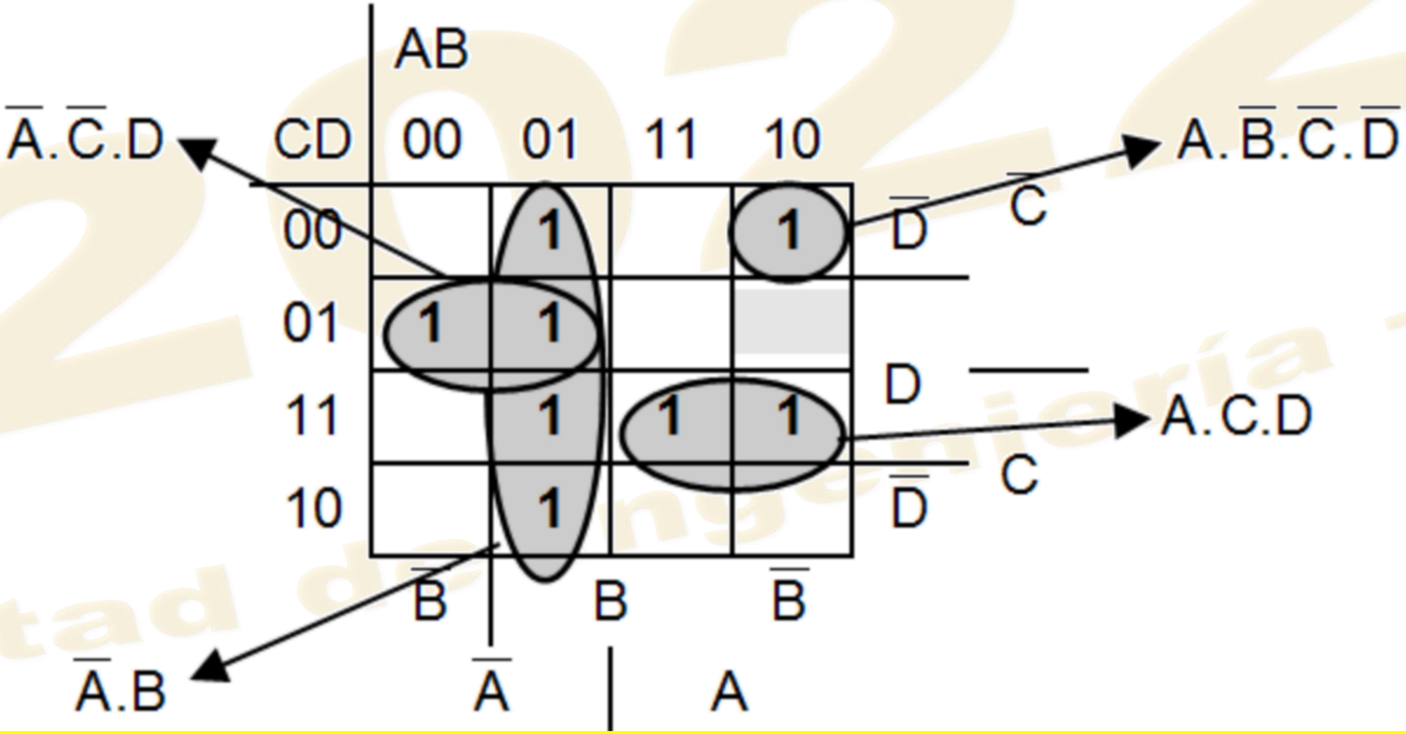
$$\Sigma\Pi \rightarrow \bar{A}.\bar{B}.C.\cancel{D} \quad \bar{A}.\bar{B}.C.\cancel{\bar{D}}$$

$$(A+\cancel{B}+C) \quad (A+\cancel{\bar{B}}+C) \leftarrow \Pi\Sigma$$

- De este modo en grupos de
  - **8 marcas** se eliminan **3 variables**,
  - **4 marcas** se eliminan **2 variables**,
  - **2 marcas** se elimina **una sola variable,**
  - **1 marca** **no elimina variables,**
  - **2^n marcas** se eliminan **n variables**.

Método de Aplicación *(continuación)*

6. **Interpretación de grupos como términos minimizados: cada grupo representa un término en la nueva estructura minimizada, se mantiene el formato original, y no contiene la o las variables que estén directas y negadas.**

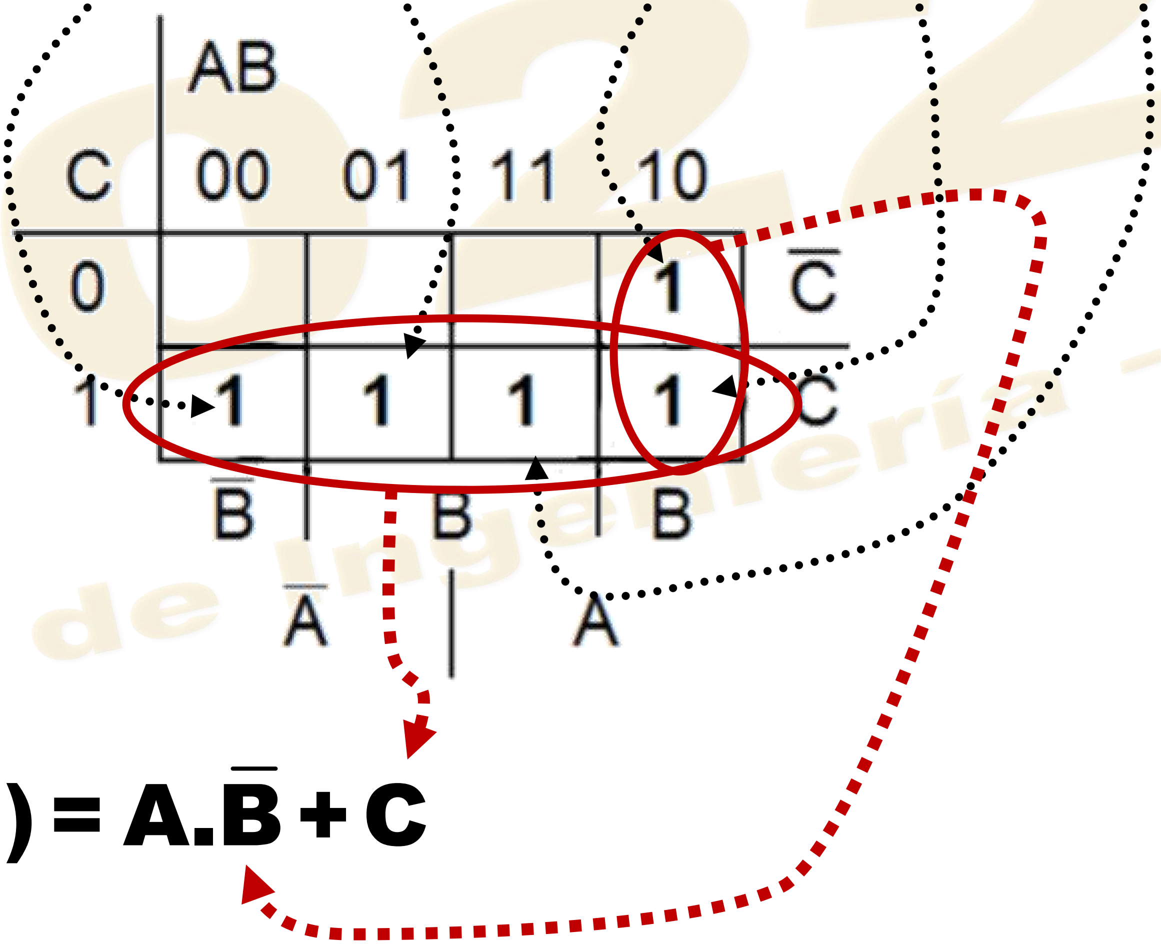


La cantidad de grupos y la cantidad de términos en la función minimizada, se puede usar como método de control; de la misma forma, la cantidad de marcas en el grupo y la cantidad de variables que quedaron en el término.

Mapa de Karnaugh

Ejemplo 1: Función canónica algebraica de 3 variables.

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.C$$



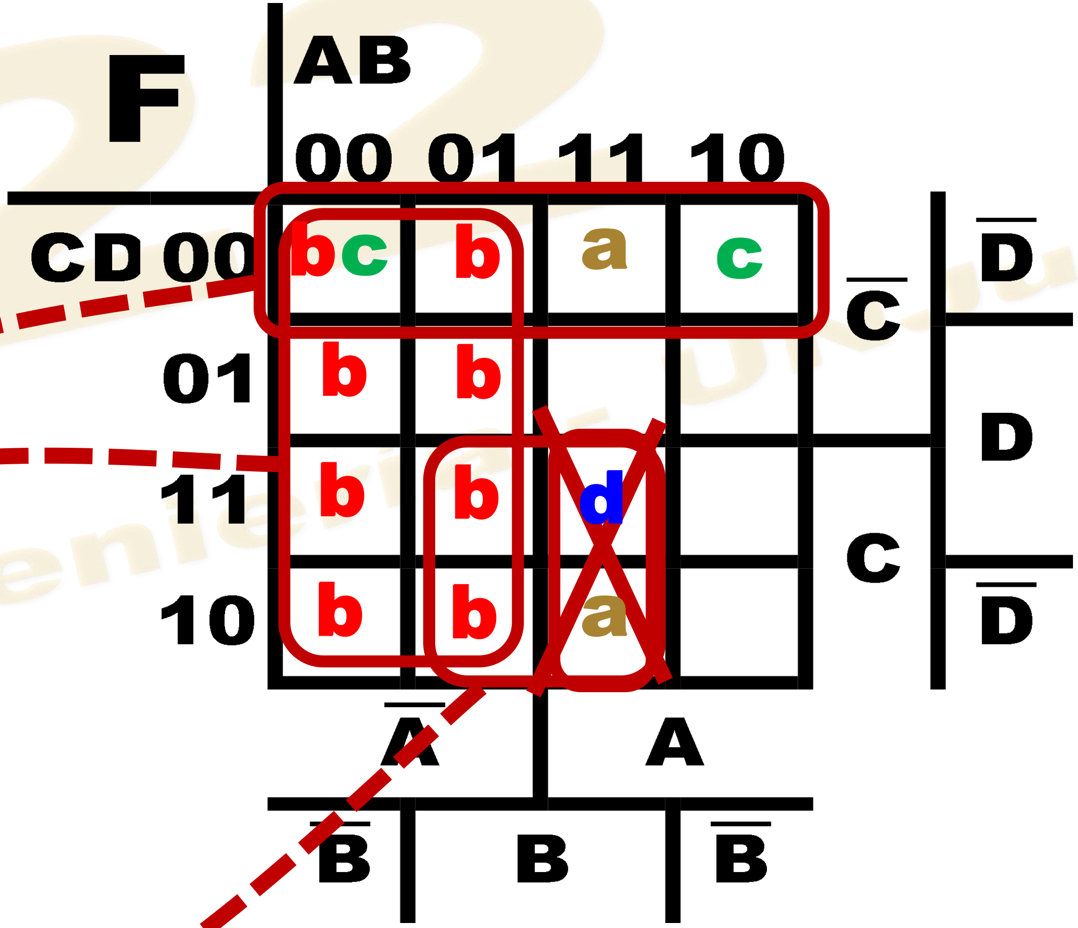
$$F(A,B,C) = A.\overline{B} + C$$

Mapa de Karnaugh

Ejemplo 2 Función pseudo-canónica algebraica de 4 variables. Las letras minúsculas se utilizan para mostrar donde se sitúa cada término.

$$F(A,B,C,D) = \underbrace{A.B.\overline{D}}_{a} + \underbrace{\overline{A}}_{b} + \underbrace{\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}}_{c} + \underbrace{A.B.C.D}_{d}$$

La cantidad de lazos/grupos debe coincidir con la cantidad de términos finales



F	AB 00	01	11	10
CD 00	bc	b	a	c
01	b	b		
11	b	b	d	
10	b	b	a	

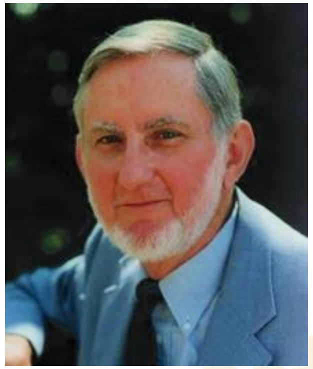
$$F(A,B,C,D) = \overline{A} + \overline{C}.\overline{D} + B.C$$

Método de Quine-McCluskey

(Brown, pg. 207; Mandado, pg. 49)

W. Quine
(1908 – 2000)

E. McCluskey
(1929 – 2016)



El Algoritmo Quine–McCluskey es un método de simplificación de funciones booleanas desarrollado por Willard Van Orman Quine y Edward J. McCluskey

Es el método más adecuado cuando las funciones lógicas presentan más de 6 variables, lo que puede resultar muy complicado para el método de Karnaugh.

La esencia de este método es similar al de Karnaugh, pero en vez de utilizar mapas emplea tablas.

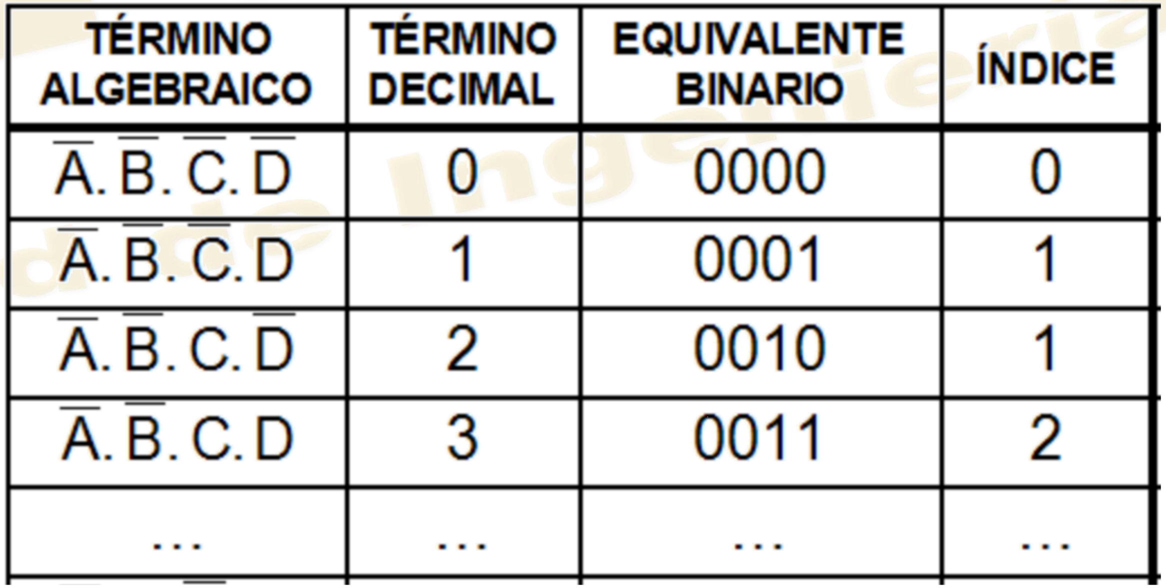
Comparado con Karnaugh, significaría formar todos los grupos de todos los tamaños y luego elegir los adecuados.

Utiliza una tabla final, llamada de implicantes primos, para depurar (eliminar) los grupos redundantes.

Método de Aplicación

1. **Se parte de una función canónica expresada como Σπ o πΣ en su forma algebraica o numérica. Si la expresión es algebraica, todos las variables debes estar en la misma secuencia.**
2. **Se crea una primera tabla (tabla I) donde cada término se representa con su equivalente binario y decimal, más un número, denominado *índice*, que indicará la cantidad de '1' que contenga el término expresado en forma binaria .**

Tabla I →



TÉRMINO ALGEBRAICO	TÉRMINO DECIMAL	EQUIVALENTE BINARIO	ÍNDICE
$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$	0	0000	0
$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$	1	0001	1
$\overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D}$	2	0010	1
$\overline{A}.\overline{B}.C.D$	3	0011	2
...	...	...	...

Método de Quine-McCluskey

Método de Aplicación *(continuación)*

3. Se crea una segunda tabla (tabla II) donde los términos son clasificados por el número índice en forma creciente. En una columna adicional (NO COMB) se indica si el respectivo término no ha sido utilizado en la tabla siguiente.

Tabla II →

TÉRMINO ALGEBRAICO	TÉRMINO DECIMAL	EQUIVALENTE BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$	0	0000	0	
$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$	1	0001	1	
$\overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D}$	2	0010		
$\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D}$	4	0100		
$A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$	8	1000		
$\overline{A}.\overline{B}.C.D$	3	0011	2	
...	...	...	...	...

Método de Quine-McCluskey

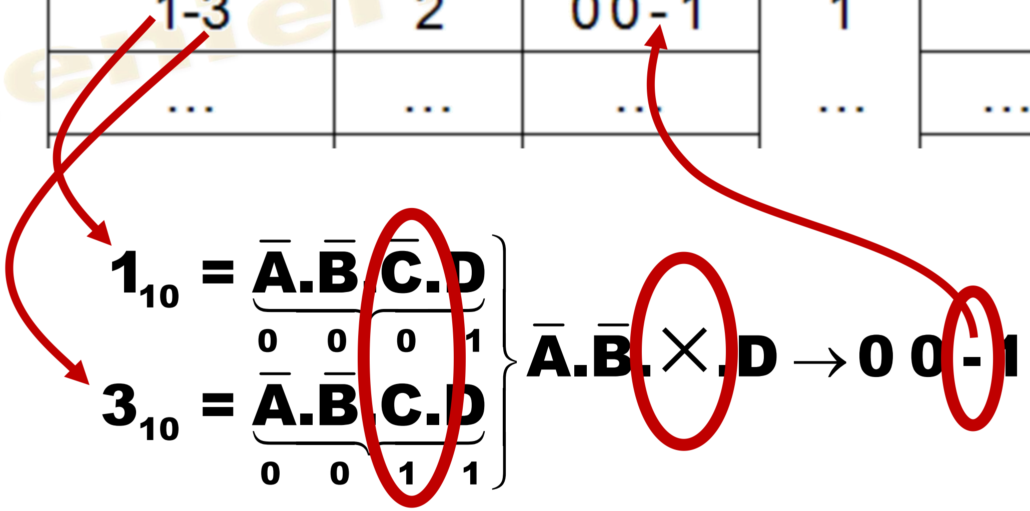
Método de Aplicación *(continuación)*

4. Se crea una siguiente tabla (tabla III) con la combinación de cada término de un índice con cada término del índice inmediato siguiente, siempre y cuando sean términos adyacentes.

- **La variable directa y negada del par de términos será reemplazada por un guión al formar el equivalente binario de la combinación (en ésta tabla y las sucesivas).**
- **El guión, en la posición respectiva, representa la variable que se elimina por encontrarse directa y negada en el grupo.**
- **El término que no pueda combinarse con ningún otro, se marcará en la tabla anterior para ser considerado posteriormente.**

Tabla III

COMBI-NACIÓN	DIFE-RENCIA	BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
0-1	1	0 0 0 -	0	
0-2	2	0 0 - 0		
0-4	4	0 - 0 0		
0-8	8	- 0 0 0		
1-3	2	0 0 - 1	1	
...	...	...	...	...

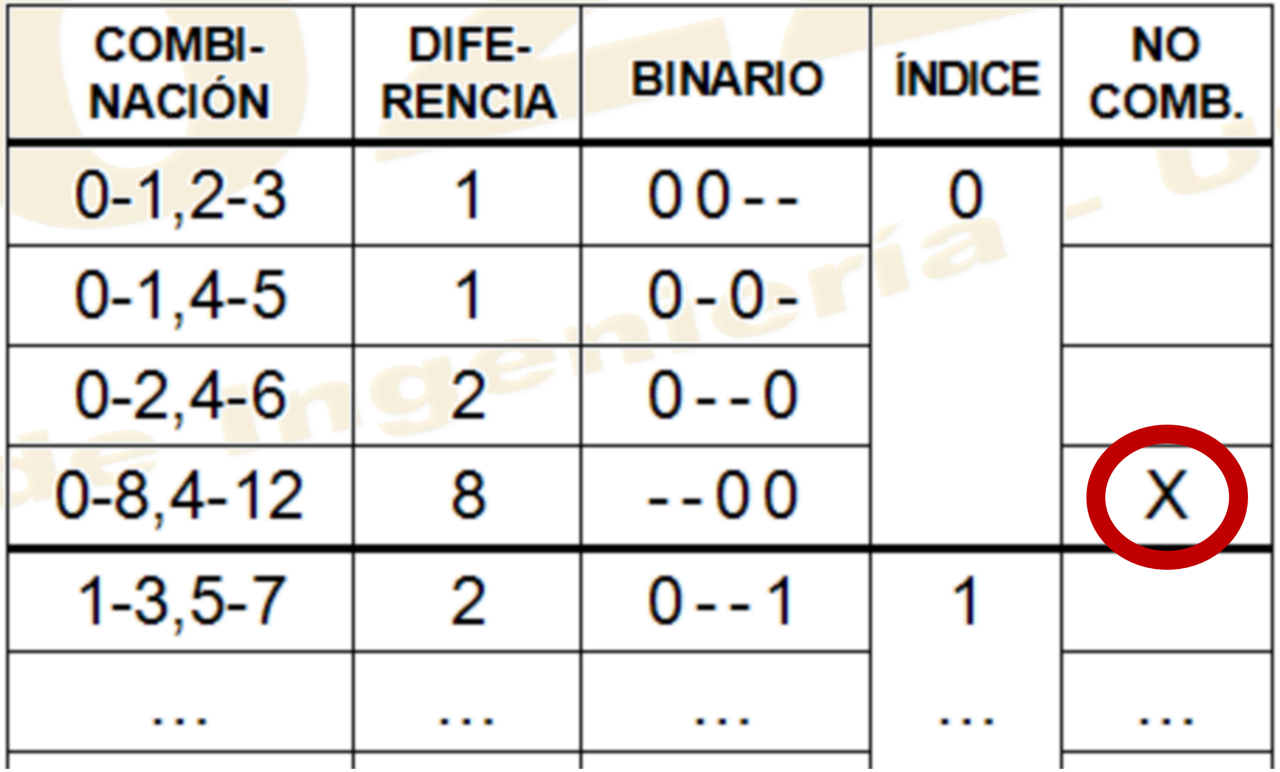


$$\left.\begin{array}{l} 1_{10} = \underset{0}{\bar{A}}.\underset{0}{\bar{B}}.\underset{0}{\bar{C}}.\underset{1}{D} \\ 3_{10} = \underset{0}{\bar{A}}.\underset{0}{\bar{B}}.\underset{1}{C}.\underset{1}{D} \end{array}\right\} \bar{A}.\bar{B}.\times.D \rightarrow 0\;0\;-\;1$$

Método de Aplicación *(continuación)*

5. **En las tablas siguientes (tabla IV y posteriores) se continúa agrupando términos adyacentes y reemplazando por guiones a las variables que difieren. Los términos que no se usan en una tabla siguiente, se marcan.**

Tabla IV →



COMBI-NACIÓN	DIFE-RENCIA	BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
0-1,2-3	1	0 0 - -	0	
0-1,4-5	1	0 - 0 -		
0-2,4-6	2	0 - - 0		
0-8,4-12	8	- - 0 0		X
1-3,5-7	2	0 - - 1	1	
...	...	...	...	...

Método de Aplicación *(continuación)*

6. El proceso continúa con sucesivas tablas, hasta que no puedan efectuarse más combinaciones.

7. Si resultan términos redundantes o repetidos se eliminan.

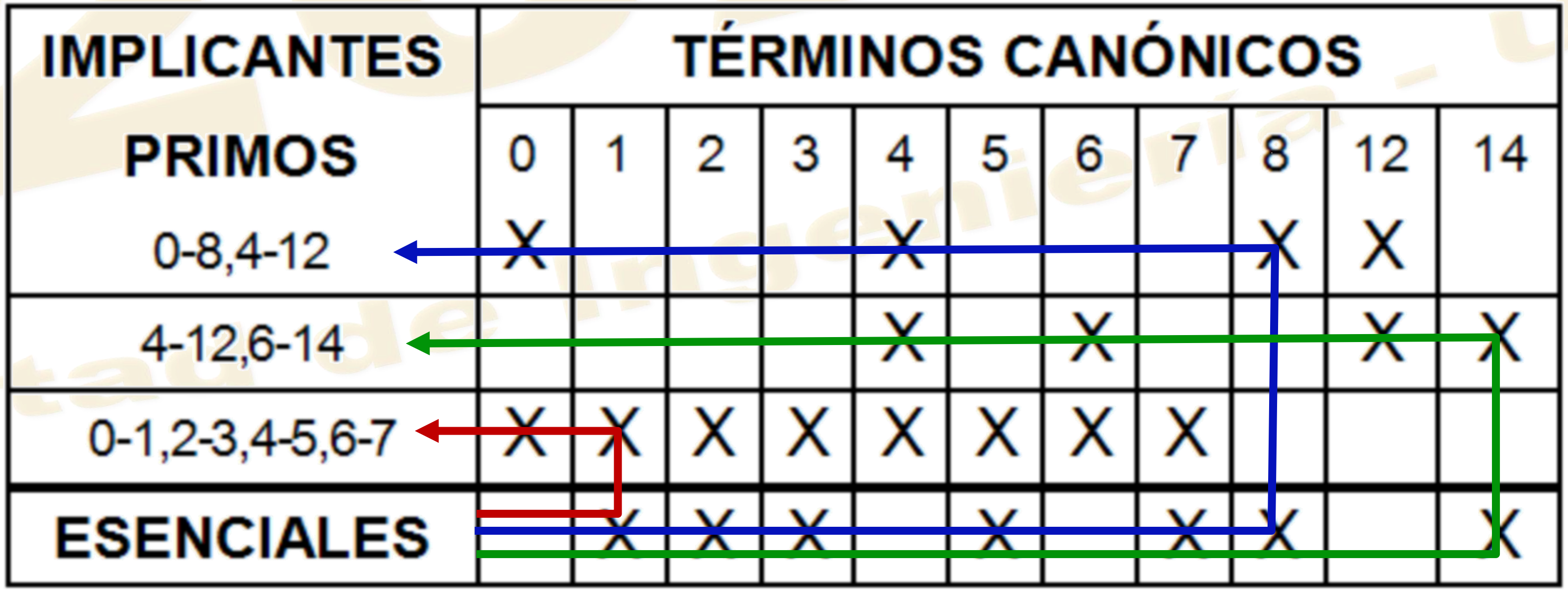
Tabla N →

COMBI-NACIÓN	DIFE-RENCIA	BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
0-1,2-3,4-5,6-7	4	0---	0	X
~~0-1,4-5,2-3,6-7~~	~~2~~	~~0---~~		
~~0-2,4-6,1-3,5-7~~	~~1~~	~~0---~~		

8. La tabla final (siguiente), se compone de los términos (o conjuntos) que llegaron al final del proceso, más todos aquellos que se marcaron por NO combinarse durante el proceso.

Método de Aplicación *(continuación)*

8. (*Continuación*), en la tabla final, llamada de **implicantes primos***, se depuran todos los términos redundantes y se obtiene la **función final minimizada**.
9. Se marcan como esenciales aquellos términos que tengan una sola marca en su columna (sin considerar la fila de las marcas "esenciales". Luego se selecciona como término esencial a aquél que presente la primera ocurrencia de la marca esencial (véase las flechas en la tabla de abajo).



IMPLICANTES	TÉRMINOS CANÓNICOS										
PRIMOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	12	14
0-8,4-12	X				X				X	X	
4-12,6-14					X		X			X	X
0-1,2-3,4-5,6-7	X	X	X	X	X	X	X	X			
ESENCIALES		X	X	X		X		X	X		X

* Algunos autores la llaman *tabla de cobertura*.

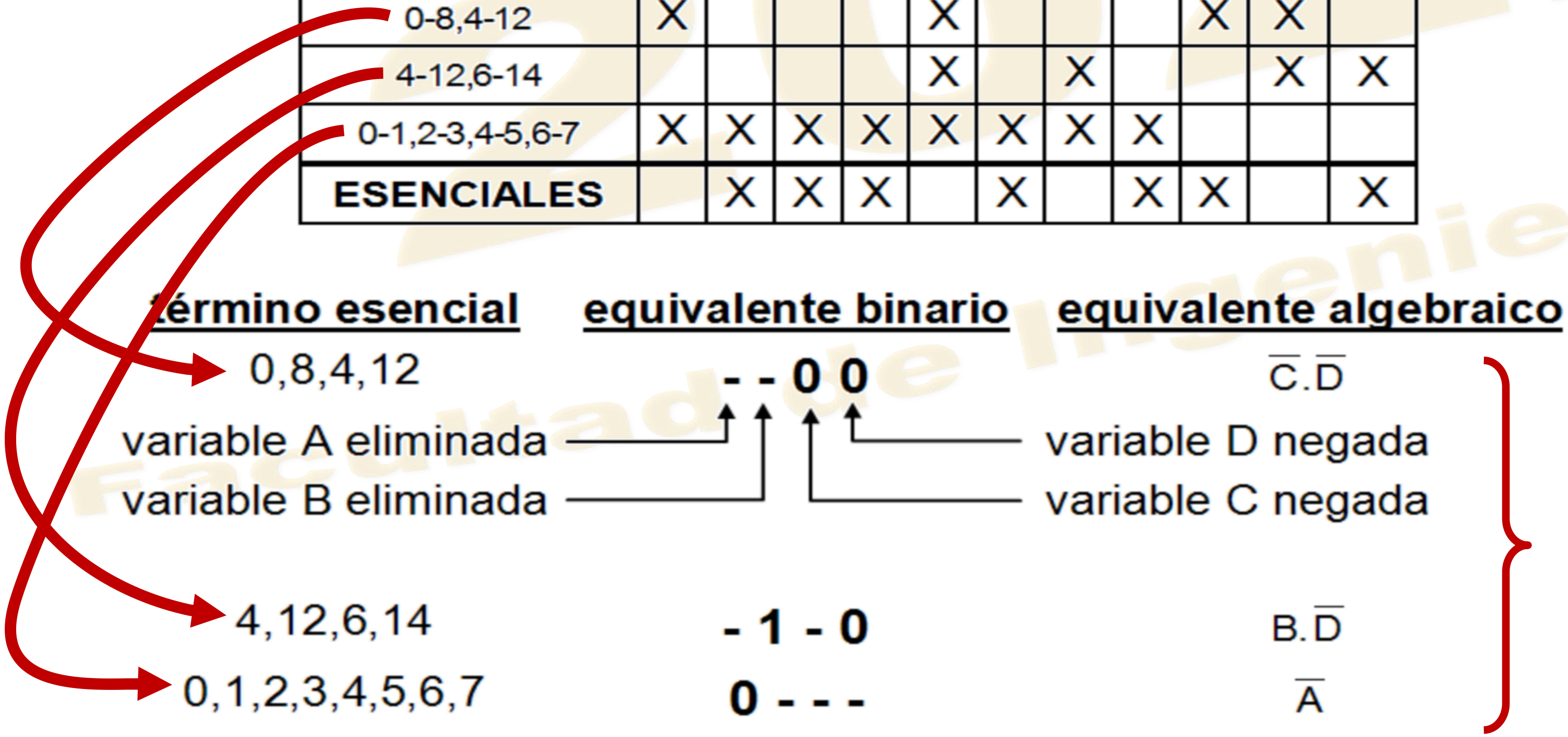
Método de Quine-McCluskey

Método de Aplicación *(continuación)*

9. (... *continuación*), básicamente significa seleccionar la mínima cantidad de términos (los esenciales), que sean de mayor tamaño, cuyas marcas cubran a los restantes términos que serán descartados. Finalmente se toman los patrones que quedaron y se decodifican.

IMPLICANTES	TÉRMINOS CANÓNICOS										
PRIMOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	12	14
0-8,4-12	X				X				X	X	
4-12,6-14					X		X			X	X
0-1,2-3,4-5,6-7	X	X	X	X	X	X	X	X			
ESENCIALES		X	X	X		X		X	X		X

Este proceso es equivalente, en el mapa de Karnaugh, a seleccionar los grupos más grandes y evitar formar grupos redundantes.



término esencial	equivalente binario	equivalente algebraico
0,8,4,12	- - 0 0	$\overline{C}.\overline{D}$
4,12,6,14	- 1 - 0	$B.\overline{D}$
0,1,2,3,4,5,6,7	0 - - -	$\overline{A}$

$$F(A,B,C,D) = \overline{A} + B.\overline{D} + \overline{C}.\overline{D}$$

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo: Minimización de la función

$$F = \pi_4(\underbrace{0,2,4,5,6,8,10,12,14,15})$$

TABLA I: codificación de los maxi-términos y generación del número índice.

TÉRMINO ALGEBRAICO	TÉRMINO DECIMAL	EQUIVALENTE BINARIO	ÍNDICE
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	0	0 0 0 0	0
$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	2	0 0 1 0	1
$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$	4	0 1 0 0	1
$\overline{A}+B+\overline{C}+D$	5	0 1 0 1	2
$\overline{A}+B+C+\overline{D}$	6	0 1 1 0	2
$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	8	1 0 0 0	1
$A+\overline{B}+C+\overline{D}$	10	1 0 1 0	2
$A+B+\overline{C}+\overline{D}$	12	1 1 0 0	2
$A+B+C+\overline{D}$	14	1 1 1 0	3
$A+B+C+D$	15	1 1 1 1	4

TABLA II: ordenación de las filas por número índice.

TÉRMINO ALGEBRAICO	TÉRMINO DECIMAL	EQUIVALENTE BINARIO	ÍNDICE
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	0	0 0 0 0	0
$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	2	0 0 1 0	1
$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$	4	0 1 0 0	
$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	8	1 0 0 0	
$\overline{A}+B+\overline{C}+D$	5	0 1 0 1	2
$\overline{A}+B+C+\overline{D}$	6	0 1 1 0	
$A+\overline{B}+C+\overline{D}$	10	1 0 1 0	
$A+B+\overline{C}+\overline{D}$	12	1 1 0 0	
$A+B+C+\overline{D}$	14	1 1 1 0	3
$A+B+C+D$	15	1 1 1 1	4

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo: Minimización de la función $F = \pi_4(0,2,4,5,6,8,10,12,14,15)$

todos los grupos de 2

TABLA III: combinación de términos adyacentes en pares (equivale en Karnaugh a grupos de 2)

COMBI-NACIÓN	DIFE-RENCIA	BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
0-2	2	0 0 - 0	0	
0-4	4	0 - 0 0		
0-8	8	- 0 0 0		
2-6	4	0 - 1 0	1	
2-10	8	- 0 1 0		
4-5	1	0 1 0 -		X
4-6	2	0 1 - 0		
4-12	8	- 1 0 0		
8-10	2	1 0 - 0		
8-12	4	1 - 0 0		
6-14	8	- 1 1 0	2	
10-14	4	1 - 1 0		
12-14	2	1 1 - 0		
14-15	1	1 1 1 -	3	X

todos los grupos de 4

TABLA IV: combinación de términos adyacentes en cuartetas (equivale en Karnaugh a grupos de 4)

COMBI-NACIÓN	DIFE-RENCIA	BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
0-2,4-6	2	0 - - 0	0	
0-2,8-10	2	- 0 - 0		
~~0-4,2-6~~	~~4~~	~~0 - - 0~~		~~red~~
0-4,8-12	4	- - 0 0		
~~0-8,2-10~~	~~8~~	~~- 0 - 0~~		~~red~~
~~0-8,4-12~~	~~8~~	~~- - 0 0~~		~~red~~
2-6,10-14	4	- - 1 0	1	
~~2-10,6-14~~	~~8~~	~~- - 1 0~~		~~red~~
4-6,12-14	2	- 1 - 0		
~~4-12,6-14~~	~~8~~	~~- 1 - 0~~		~~red~~
8-10,12-14	2	1 - - 0		
~~8-12,10-14~~	~~4~~	~~1 - - 0~~		~~red~~

X = no combina   red = redundante

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo: Minimización de la función $F = \pi_4(0,2,4,5,6,8,10,12,14,15)$

todos los grupos de 8

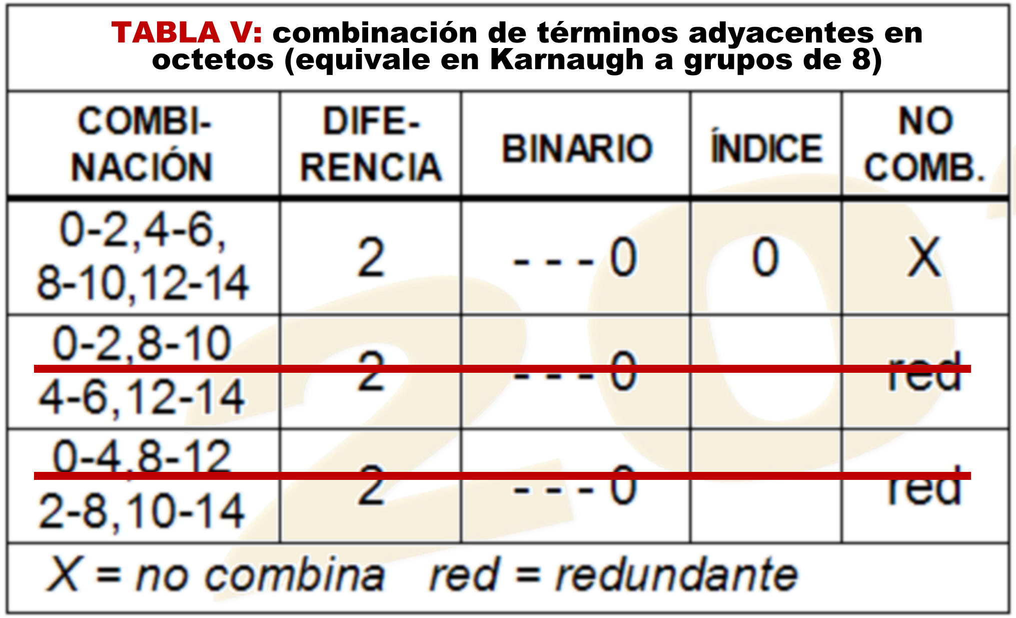


TABLA V: combinación de términos adyacentes en octetos (equivale en Karnaugh a grupos de 8)

COMBI-NACIÓN	DIFE-RENCIA	BINARIO	ÍNDICE	NO COMB.
0-2,4-6, 8-10,12-14	2	- - - 0	0	X
~~0-2,8-10~~ ~~4-6,12-14~~	~~2~~	~~- - - 0~~		~~red~~
~~0-4,8-12~~ ~~2-8,10-14~~	~~2~~	~~- - - 0~~		~~red~~

X = no combina red = redundante

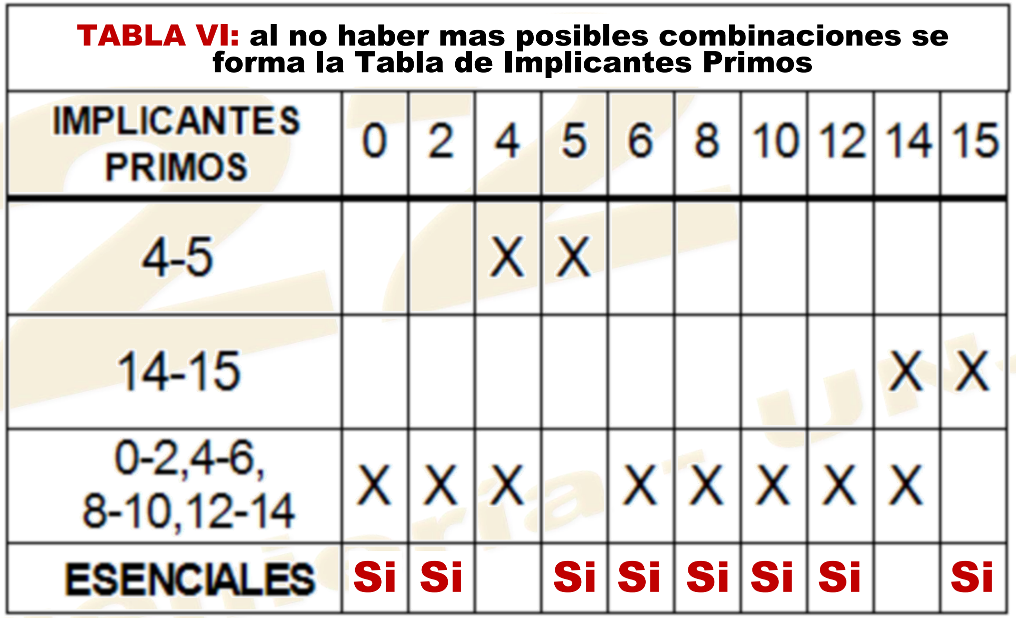


TABLA VI: al no haber mas posibles combinaciones se forma la Tabla de Implicantes Primos

IMPLICANTES PRIMOS	0	2	4	5	6	8	10	12	14	15
4-5			X	X						
14-15									X	X
0-2,4-6, 8-10,12-14	X	X	X		X	X	X	X	X	
ESENCIALES	Si	Si		Si	Si	Si	Si	Si		Si

4-5	0 1 0 -	$\bar{A}+B+\bar{C}$
14-15	1 1 1 -	$A+B+C$
0-2,4-6,8-10,12-14	- - - 0	$\bar{D}$

$$F(A,B,C,D) = (\bar{A}+B+\bar{C}).(A+B+C).(\bar{D})$$

Función minimizada

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo: Comparación de métodos Quine - Mc Cluskey vs. Karnaugh

$$F = \Sigma_4(0,5,7,8,10,13,15)$$

Tabla I - inicial

Dec	Término	Índice
0	0 0 0 0	0
5	0 1 0 1	2
7	0 1 1 1	3
8	1 0 0 0	1
10	1 0 1 0	2
13	1 1 0 1	3
15	1 1 1 1	4

Karnaugh

		AB			
	F	00	01	11	10
CD	00	X			X
	01		X	X	
	11		X	X	
	10				X

Tabla II - Ordenación

Dec	Término	Índice
0	0 0 0 0	0
8	1 0 0 0	1
5	0 1 0 1	2
10	1 0 1 0	2
7	0 1 1 1	3
13	1 1 0 1	3
15	1 1 1 1	4

A partir de la función dada, se forman las primeras tablas de Quine - Mc Cluskey, lo que equivale a trazar el mapa de Karnaugh y ubicar los términos.

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo: Comparación de métodos Quine - Mc Cluskey vs. Karnaugh

(continuación)

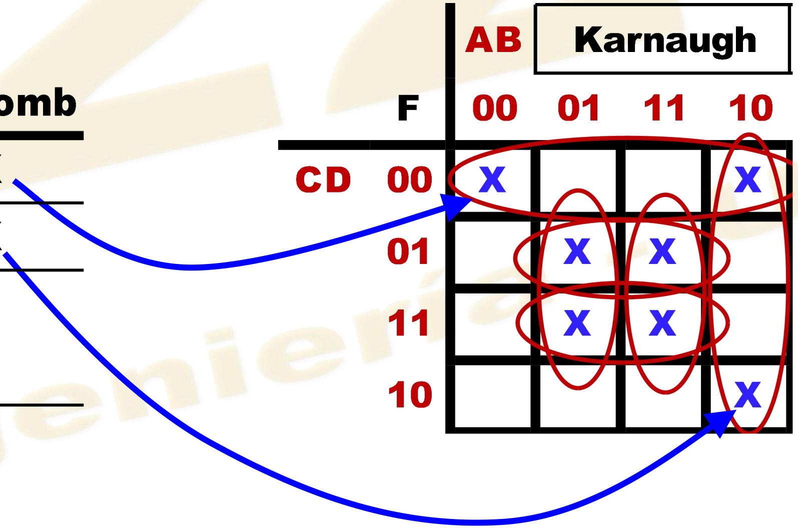
$$F = \Sigma_4(0,5,7,8,10,13,15)$$

Tabla II - Ordenación

Dec	Término	Índice
0	0 0 0 0	0
8	1 0 0 0	1
5	0 1 0 1	2
10	1 0 1 0	2
7	0 1 1 1	3
13	1 1 0 1	3
15	1 1 1 1	4

Tabla III - Pares

Pares	Término	Índice	No Comb
0-8	- 0 0 0	0	X
8-10	1 0 - 0	1	X
5-7	0 1 - 1	2	
5-13	- 1 0 1	2	
7-15	- 1 1 1	3	
13-15	1 1 - 1	3	



De la tabla II, **se inician las combinaciones de términos**, cada uno de cada índice, con cada uno del índice siguiente, siempre que sean adyacentes. En Karnaugh equivale a formar **todos los grupos de 2 marcas**. Los marcados como "No Comb" son aquellos que no podrán formar grupos de 4, deben ser considerados en la tabla final.

Método de Quine-McCluskey

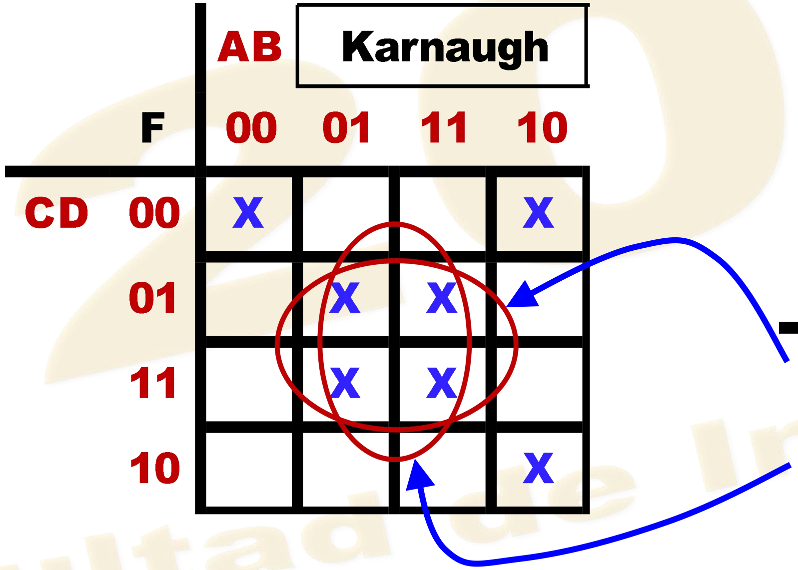
Ejemplo: Comparación de métodos Quine Mc - Cluskey vs. Karnaugh

(continuación)

$$F = \Sigma_4(0,5,7,8,10,13,15)$$

Tabla III - Pares

Pares	Término	Índice	No Comb
0-8	- 0 0 0	0	X
8-10	1 0 - 0	1	X
5-7	0 1 - 1	2	
5-13	- 1 0 1	2	
7-15	- 1 1 1	3	
13-15	1 1 - 1	3	



Karnaugh

F	AB 00	01	11	10
CD 00	X			X
01		X	X	
11		X	X	
10				X

Tabla IV - Cuartetos

Cuartetos	Término	Índice	No Comb
5-7-13-15	- 1 - 1	2	
5-13-7-15	- 1 - 1	2	red

De la tabla III, se inician las combinaciones de términos, con el mismo criterio anterior. En este caso, el **patrón binario debe diferir en un solo bit**. En Karnaugh equivale a formar **todos los grupos de 4 marcas**. El grupo marcado "red" está repetido; el método lo formó agrupando los mismos términos en otro orden.

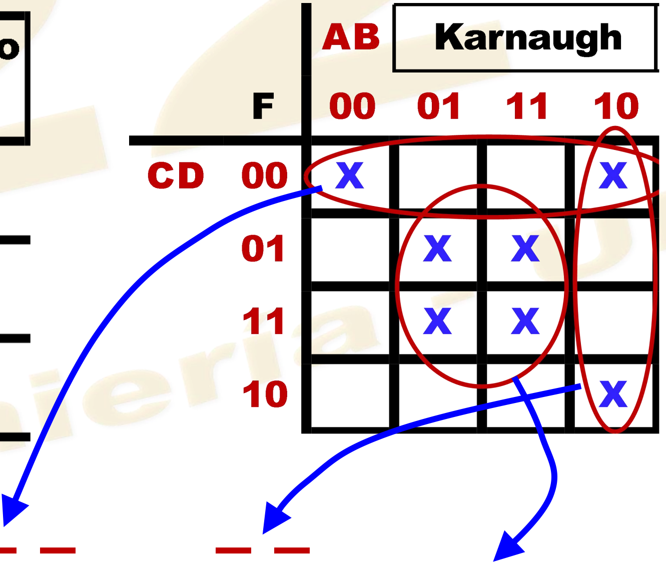
Método de Quine-McCluskey

Ejemplo: Comparación de métodos Quine - Mc Cluskey vs. Karnaugh

$$F = \Sigma_4(0,5,7,8,10,13,15)$$

Tabla de Cobertura

Grupos	Canónicos 0	5	7	8	10	13	15	Patrón binario	Término literal
0-8	x			x				- 0 0 0	$\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$
8-10				x	x			1 0 - 0	$A.\overline{B}.\overline{D}$
5-7-13-15		x	x			x	x	- 1 - 1	B.D
Esenciales	▲	▲			▲				



Karnaugh

CD \ AB	00	01	11	10
00	X			X
01		X	X	
11		X	X	
10				X

Función minimizada ➡ $F(A,B,C,D) = \overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{D} + B.D$

Cuando ya no hay posibilidad de más agrupaciones (en Karnaugh significa que no se pueden formar grupos más grandes), se crea la tabla de cobertura y se extrae la función minimizada.