

Tema 6: Estudio de funciones de dos variables independientes

Contextualización

- 01-C. Una empresa dispone de dos fábricas, A y B, en cada una de las cuales elabora el mismo producto. El costo total de producción de cada fábrica depende de la respectiva cantidad de productos fabricados, siendo para la fábrica A de \$ $3x^2 + 2700$ y para la B de \$ $2y^2 + 12800$, donde x e y representan las cantidades producidas en cada fábrica. Determinar cómo debe distribuirse la producción entre las dos fábricas para cumplir un pedido de 110 productos, a fin de minimizar el costo total de producción. Calcular el costo unitario de producción para esta distribución, y compararlo con otras diez posibles distribuciones cualesquiera, incluidas las de fabricar todos los productos sólo en A y todos los productos sólo en B.
- 02-C. Se dispone de dos máquinas M_1 y M_2 para fabricar tres productos diferentes P_1 , P_2 y P_3 . El tiempo, en minutos, necesario para fabricar una unidad de cada artículo en cada una de las máquinas viene dado por la tabla:

	P_1	P_2	P_3
M_1	6	9	5
M_2	7	8	6

La máquina M_1 puede funcionar 5 horas al día y la máquina M_2 puede hacerlo durante 6 horas. Cada unidad de los productos diferentes P_1 , P_2 y P_3 produce un beneficio, respectivamente, de \$ 25, \$ 30 pesos y \$ 16. En estas condiciones, determinar el plan de producción para obtener un máximo beneficio.

- 03-C. Para fabricar un abono combinado se dispone de tres productos P_1 , P_2 y P_3 , que contienen cada uno dos sustancias distintas E_1 , E_2 . Cada miligramo de los tres productos tiene un costo final de \$ 4,00; \$ 5,00 y \$ 3,00 respectivamente y la composición química de cada uno de ellos con relación a las sustancias mencionadas viene dada, en porcentajes contenidos, por la tabla:

	E_1	E_2
P_1	60%	40%
P_2	30%	70%
P_3	20%	80%

Si el abono preparado debe contener, al menos, un 30% de E_1 y un 50% de E_2 , formular la composición del abono que resulte en el menor costo.

Observación Reflexiva

- 01-R. ¿Por qué el plano tangente a la gráfica de una función de dos variables en un extremo relativo es horizontal? ¿Podría justificarlo al menos con dos razonamientos diferentes?

Conceptualización

- 01-T. Defina máximo relativo para una función real de dos variables reales. Proporcione un ejemplo. Representelo gráficamente.

- 02-T ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que quede establecido que un punto es un mínimo relativo?
- 03-T ¿Conoce alguna forma de clasificar los puntos críticos de una función real de dos variables reales?
- 04-T. ¿Qué interpreta cuando se hace referencia a extremos condicionados? ¿Podría proponer un problema real que se pueda resolver sólo aplicando el concepto de extremo condicionado?

Experimentación Activa

01-E. Determinar la existencia de extremos relativos en las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$
- b) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1$
- c) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4$

02-E. A continuación, se dan las derivadas de segundo orden de una función $z = f(x, y)$ diferenciable. Se supone que en (x_0, y_0) las derivadas parciales primeras se anulan. Decida, en cada caso, si en (x_0, y_0) hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla o si la información es insuficiente para decidir.

- a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 3$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 4$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$
- b) $f_{xx}(x_0, y_0) = 5$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 4$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$
- c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -4$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 3$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -6$
- d) $f_{xx}(x_0, y_0) = -4$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -9$

03-E. Determinar y clasificar los extremos relativos de las siguientes funciones.

- a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$
- b) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
- c) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
- d) $f(x, y) = xy - x^2 - xy^2$
- e) $f(x, y) = xye^{x+2y}$

04-E. Determinar y clasificar los extremos absolutos de las siguientes funciones.

- a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - x - 2y + 24$
en la región $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 4 \text{ y } 0 \leq y \leq 2\}$
- b) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en R región triangular de vértices $(0,0)$; $(3,0)$ y $(3,2)$
- c) $f(x, y) = e^{-xy}$ en la región $R = \{(x, y) / x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

05-E. Hallar los extremos condicionados de las siguientes funciones aplicando el método multiplicadores de Lagrange, y clasificarlos.

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y$ sujeto a $x + 2y = 7$

b) $f(x, y, z) = xyz$ sujeto a $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27} + \frac{z^2}{12} = 1$, con $x, y, z > 0$

c) $f(x, y, z) = x^2y^4z^6$ sujeto a $x + y + z = 1$, con $x, y, z > 0$

06-E. Hallar el volumen máximo de un cilindro circular recto, tal que el área de su superficie sea 600π .

07-E. Una aerolínea cobra por exceso de equipaje, a cualquier valija cuya suma de dimensiones sea mayor a 100 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo con mayor capacidad al que no se le cobraría por exceso de equipaje?

08-E. Se dispone de $12 m^2$ de cartón para construir una caja rectangular sin tapa. Determinar las dimensiones de esta, para que su volumen sea máximo.

09-E. Hallar las coordenadas del punto del plano $2x + y - z = 5$ que se encuentra a la menor distancia del origen de coordenadas.

----ooo0ooo----