VARIABLE ALEATORIA

> Dado el ***espacio muestral*** **S** de todos los resultados posibles de un ***experimento aleatorio*** si ***asociamos un número real a cada uno de esos resultados*** estamos definiendo una **variable aleatoria** .

Esta variable expresa los resultados de un experimento aleatorio.

Por *ejemplo* , consideremos el experimento en el que se lanza una moneda tres veces ; el espacio muestral S es el conjunto de resultados consistentes en las ocho sucesiones posibles distintas de caras y sellos :

$$S = \{ ccc , ccs , csc , css , scc , scs , ssc , sss \}$$

Como vemos los resultados de este experimento aleatorio no son números; por eso para poder cuantificarlos, tendremos que asociar un número a cada uno de estos resultados. Se recurre a una función para establecer esta correspondencia y de este modo lo que definimos es una variable aleatoria .

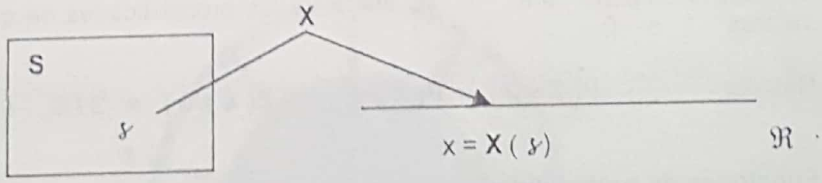
Sea **X** esta variable , tal que **X** es el *" número de caras obtenidas en los tres lanzamientos "* .

Entonces para cada punto muestral s o elemento de **S** , **X** asigna el número de caras que corresponden al punto muestral y **X** resulta una función que asocia un número a cada elemento del espacio muestral . Los números que asocia **X** los resultados del experimento son 0 , 1 , 2 , 3 y estos valores constituyen el recorrido de la variable aleatoria **X**. Obtenemos :

s	ccc	ccs	csc	css	scc	scs	ssc	sss
X (s)	3	2	2	1	2	1	1	0

En donde hemos definido la *variable aleatoria* como una *función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral* .

Esquemáticamente :



De este concepto surge que *cada número del recorrido de* **X** *tendrá una* ***probabilidad asociada*** .

Para el ejemplo podemos construir una **tabla de frecuencias** para el recorrido de **X** :

REC **X** = { 0 , 1 , 2 , 3 }

x	0	1	2	3
f	1	3	3	1

Inmediatamente como todos los puntos muestrales son igualmente posibles (moneda perfecta), se puede determinar una **distribución de probabilidades** para los valores posibles de la variable aleatoria .

Se define así una función que hace corresponder a los valores posibles x de la variable aleatoria **X** un número que determina la probabilidad que tiene la variable aleatoria **X** de asumir un valor particular x de su recorrido .

Simbólicamente indicamos los valores que toma esta función de probabilidades en la formas

$$P(X=x) \quad \text{o} \quad P(\{s/\ X(s) = x\})$$

que indican la probabilidad de que algún punto muestral s tome el valor x de X

Así, en este ejemplo, obtenemos los siguientes valores de la función de probabilidad:

$P(X=0) = P(\{s/\ X(s) = 0\}) = P((s,s,s)) = 1/8$

$P(X=1) = P(\{s/\ X(s) = 1\}) = 3/8$ $\qquad P(X=2) = 3/8$ $\qquad P(X=3) = 1/8$

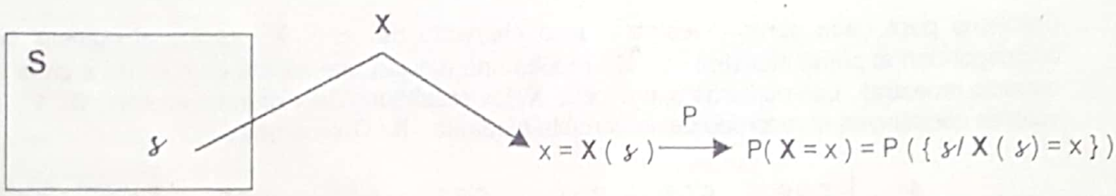
que resumimos en la siguiente tabla

x	0	1	2	3
P (X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Completamos la definición de variable aleatoria diciendo que es una variable numérica en la que ***la presentación de sus valores está regida por un conjunto bien definido de probabilidades.***

Esto da lugar a definir la **función de probabilidad** como aquella que surge al ***asignar probabilidades a cada uno de los valores de una variable aleatoria.***

Podemos representar esquemáticamente :



La probabilidad de que una variable aleatoria X (VA X) tome un valor menor que x , $P(X < x)$, se obtiene sumando las probabilidades de todos los sucesos elementales s para los cuales $X(s) < x$

Entonces la probabilidad de obtener menos de dos caras en las tres tiradas sucesivas de la moneda está dada por la suma de las probabilidades de los sucesos elementales : *" se obtiene una cara "* y *"no se obtiene ninguna cara "* o la suma de las probabilidades de que la variable aleatoria asuma los valores 1 o 0 .

Resulta : $\quad P(X < 2) = P(X = 1) + P(X = 0) = 3/8 + 1/8 = 1/2$

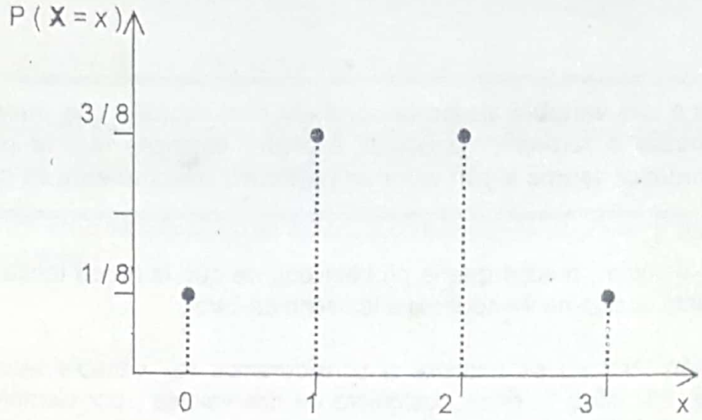
Funciones de probabilidad

Variables aleatorias discretas

> Una **variable aleatoria** X **se llama discreta** si x puede tomar un número finito k de valores distintos, $x_1, x_2, \ldots, x_k$; o a lo sumo una sucesión infinita de valores distintos , $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$

Estas variables corresponden a experimentos en los que se cuenta el número de veces que ha ocurrido un suceso y donde la variable aleatoria asume cada uno de sus valores con una cierta probabilidad.

En el caso de la moneda que se lanza tres veces , la **VA X** que representa el número de caras , toma los valores 0 , 1 , 2 y 3 , en donde , teniendo en cuenta el número de apariciones de la variable y que todos los resultados son igualmente probables se ha obtenido la distribución de probabilidades dada en la tabla Esta distribución puede representarse mediante el **gráfico de bastones** siguientes en el que indicamos los puntos $(x, P(X = x))$:



Con frecuencia es conveniente y posible representar con una fórmula todas las probabilidades de una variable aleatoria **X**. Dicha fórmula debe ser una función de los valores numéricos x y se simboliza p_X

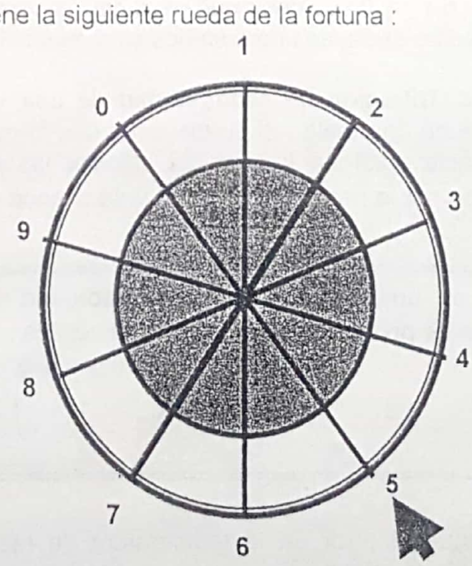
Así, $p_X(x) = P(X = x) = P(\{ s / X(s) = x \})$ donde X es una variable aleatoria discreta y p_X define su distribución de probabilidad y se llama **función de masa de la VA X**.

> El conjunto de pares ordenados $(x, p_X(x))$ es una ***distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta*** X o ***una función de masa de la*** VA X o función de probabilidad de X , si para cualquier x se verifica :
>
> (1) $p_X(x) \geq 0$ (2) $\sum_x p_X(x) = 1$ (3) $p_X(x) = P(X = x)$

Posteriormente estudiaremos algunas distribuciones discretas como las distribuciones uniforme, binomial, hipergeométrica y de Poisson.

Variables aleatorias continuas

Consideremos , por ejemplo que se tiene la siguiente rueda de la fortuna :



Supongamos que el punto de partida para que gire la rueda está bien definido como el punto opuesto a la flecha fija . Ahora bien *¿ cuántos puntos de partida hay ?* .La rueda puede estar , como en este caso , dividida en 10 sectores y el punto de partida definido como el número más cercano a la flecha. Pero a su vez , cada sector podrá ser posteriormente dividido en 10 sectores para dar 100 puntos de partida y así sucesivamente. Es evidente entonces que **no *hay un número finito de puntos de partida*** y , si se quisiera calcular la probabilidad de que el punto de partida sea , por ejemplo el 5 , no existirá un número para el denominador pues el contempla infinitos casos posibles .Estos están dados para el caso de nuestra rueda por los infinitos puntos que se encuentran en el sector más cerca de 5 que de 4 o de 6 .

Si definimos a una **variable aleatoria continua** como aquella que ***puede asumir un valor cualquiera en un intervalo o región*** , podemos expresar entonces que **la probabilidad que una variable aleatoria continua asuma algún valor en particular exactamente es cero.**

En nuestro ejemplo , resulta que la probabilidad de que la rueda tenga al número 5 como punto de partida o punto exactamente opuesto a la flecha es cero .

Esta situación también se observa si consideramos la variable aleatoria " *altura de las personas mayores de 21 años* " . Entre cualquiera de dos valores , por ejemplo 1,635 m y 1,645 m o incluso entre 1,6399 m y 1, 6401 m hay un número infinito de alturas , una de las cuales es 1,64 m. Es remota la posibilidad de seleccionar una persona que tenga exactamente una altura de 1,64 m y no cualquier otra altura del conjunto infinito de alturas tan cercanas a ese valor que no se puede medir la diferencia . Entonces se asigna la probabilidad cero al evento . Esto nos lleva a expresar que no existen dos personas con exactamente la misma altura.

Simbólicamente expresamos: $P(X = x) = 0 \quad \forall x$ si X es una **variable aleatoria continua**

Sin embargo, en el caso de la rueda de la fortuna dividida en diez sectores con los números 0, 1 , 2 , . . . , 9 se pueden tomar *probabilidades asociadas a los sectores* como la probabilidad de que el punto de partida se encuentre en el sector más cercano a 5 que a 4 o 6 . En el caso de las alturas se puede hablar de la *probabilidad asociada a intervalos* , la probabilidad, por ejemplo , de seleccionar una persona que al menos mida 1.63 m pero no más de 1.65 m ($P(1.63\text{ m} < X < 1{,}65\text{ m})$)

Como se observa, para variables aleatorias continuas podemos calcular probabilidades del tipo :

$$P(a < X < b) \qquad P(X < b) \qquad P(X > b)$$

En particular resulta que $P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b)$

por ser $P(X = b) = 0$. Es decir que para calcular probabilidades, si la variable es continua, no importa que se incluyan o excluyan uno o ambos extremos del intervalo .

A pesar de que la **distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua** no se puede presentar en la forma de una tabla , sí puede tener una fórmula. Dicha fórmula resulta una función del recorrido de la variable aleatoria y permitirá calcular las probabilidades asociadas con sectores o intervalos , se expresa por la notación f_X y se conoce con el nombre **función de densidad de probabilidad de X** .

Se dice que f_X es **una distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua** o una **función de densidad de probabilidad de X** si se verifica :

(1) $f_X(x) \geq 0$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (3) $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

Ejemplo : Suponga que el error en la temperatura de reacción en grados centígrados (°C) en un experimento controlado de laboratorio es una variable aleatoria que tiene una función de densidad de probabilidad f_X

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2/3 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En este caso f_X es una función no negativa en los reales.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2/3)\,dx = (x^3/9)\Big]_{-1}^{2} = 1$$

La función dada es una función de densidad que representa la distribución de probabilidad de la variable aleatoria continua **X** : " error en la temperatura de reacción en ° C ".

La probabilidad de que el error en la temperatura de reacción tome valores positivos y menores o iguales a uno se obtiene del siguiente modo :

$$P(0 < X \le 1) = P(0 < X < 1) = \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{1} (x^2/3)\,dx = (x^3/9)\Big]_{0}^{1} = 1/9$$

Estudiaremos las distribuciones uniforme y normal como ejemplos de distribuciones para variables aleatorias continuas.

Función de Distribución Acumulada (FDA)

La **función de distribución acumulada (FDA)** o función de distribución de una variable aleatoria **X** es una función definida para todo número real como sigue :

$$F(x) = P(X \le x) \qquad -\infty < x < \infty .$$

- Esta definición vale para toda variable aleatoria independientemente si su distribución es discreta , continua o mixta .
- Es una función definida sobre la recta real.
- El valor de F para cualquier x debe se un número tal que $0 \le F(x) \le 1$ pues F es la probabilidad del suceso $\{X \le x\}$

Propiedades de FDA

- ***La FDA es no decreciente.*** Esto es : Si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

En efecto, si $x_1 < x_2$,entonces $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$ y la ocurrencia del suceso $\{X \le x_1\}$ también implica que el suceso $\{X \le x_2\}$ ha ocurrido .
Luego $P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$ y entonces $F(x_1) \le F(x_2)$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

- ***La FDA es siempre continua por la derecha***

Esto es $F(x) = F(x^+)$ para todo real . Simbolizamos $F(x^+)$ al valor de F cuando nos acercamos a x por los valores mayores que x o por la derecha .

Dado que la función de distribución acumulada puede no ser continua y presentar un número finito de discontinuidades finitas o saltos , diremos que **F es continua en x si $F(x^-) = F(x^+) = F(x)$**

$F(x^-)$ es el valor de F cuando nos acercamos a x por los valores menores que x o por la izquierda .

Determinación de probabilidades a partir de la FDA

Si se conoce la **FDA** de una variable aleatoria **X** , entonces se puede determinar la probabilidad de que **X** esté en cualquier intervalo real . Para ello tendremos en cuenta los siguientes **teoremas o reglas** :

(1) $P(X > x) = 1 - F(x)$ para cualquier valor de x.

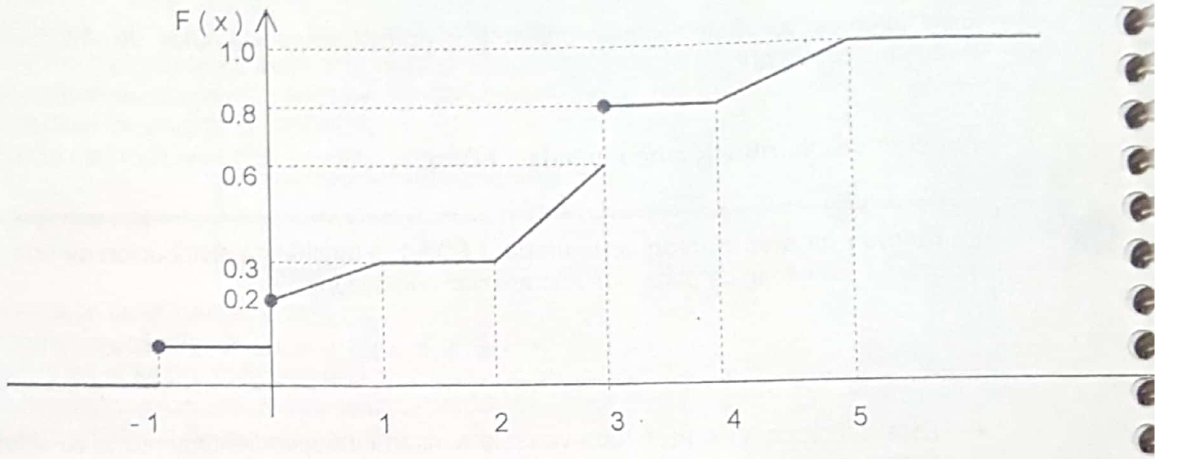
Demostración: $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

(2) $x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ para todo x_1, x_2

(3) $P(X < x) = F(x^-)$ para cualquier valor de x.

(4) $P(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$ para cualquier valor de x.

Ejemplo : Conocemos la siguiente **FDA** de una variable aleatoria **X** :



Entonces podemos obtener probabilidades empleando la **FDA** :

$P(X = 1) = F(1^-) - F(1^+) = 0$ pues $F(x)$ es continua en 1

$P(X = -1) = F(1^+) = 0,1$ pues $F(x)$ presenta un salto en -1.

$P(X < 0) = F(0^-) = 0,1$

$P(X \le 0) = P(X < 0) + P(X = 0) = F(0^-) + [F(0^+) - F(0^-)] = F(0^+) = 0,2$

$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0$

$P(X \ge 5) = P(X > 5) + P(X = 5) = 0 + 0 = 0$

$P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(1 < X \le 3) = F(3) - F(1) = 0,5$

FDA *para una variable aleatoria discreta*

Si p_X es la **función de masa** para los valores de la **VA X** se define **FDA X** a la siguiente función F :

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p_X(t)$$

Ejemplo : Sea la distribución de probabilidad para el caso de la moneda que se lanza tres veces :

x	0	1	2	3	
P (X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8	$\longrightarrow p_X(x)$

Donde la función de masa para los valores posibles de la variable está dada por los valores de la tabla y el valor cero para otro caso.

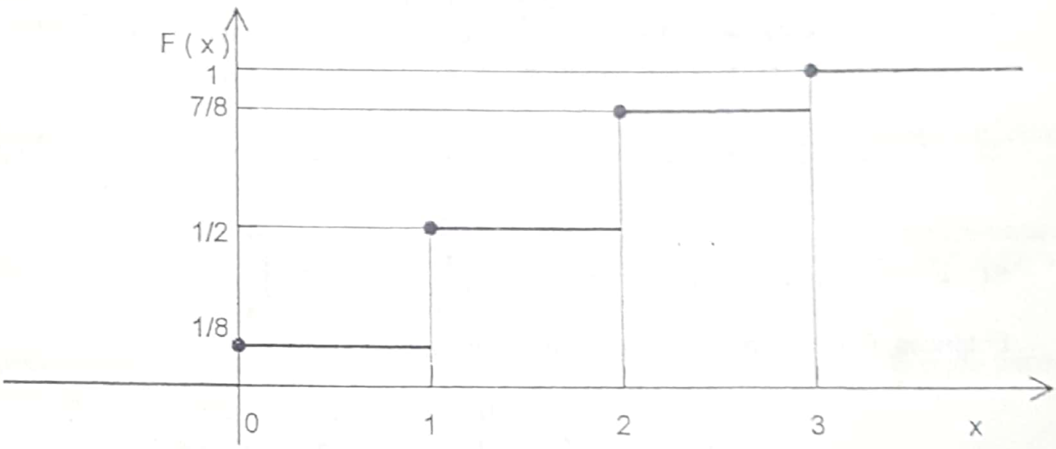
La función F resulta : $F(0) = P(X \leq 0) = \sum_{t \leq 0} p_X(t) = p_X(0) = 1/8$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{t \leq 1} p_X(t) = p_X(0) + p_X(1) = 1/8 + 3/8 = 1/2$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{t \leq 2} p_X(t) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 7/8$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 1 = \sum_{t \leq 3} p_X(t) \quad \text{donde } t = 0, 1, 2, 3.$$

La representación gráfica de F es la función escalonada siguiente :



Podemos definir F :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/8 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

FDA *para una variable aleatoria continua*

Sea X una variable aleatoria continua y f_X la **función de densidad** definida para los valores x de X , se define la **FDA** de la **VA X** , F como :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt , \quad -\infty < x < \infty$$

De esta expresión surge que :

$F'(x) = f_X(x)$ para todo x donde exista la derivada.

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

En efecto ; $P(a < X < b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

donde hemos tenido presente que si X es una variable aleatoria continua $P(X \leq b) = P(X < b)$ pues $P(X = b) = 0$ y análogamente $P(X \leq a) = P(X < a)$

Teniendo en cuenta la definición de $F(x)$ y las propiedades de la integral definida, obtenemos :

$$P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt$$

Obtengamos F para el *ejemplo* del error en la temperatura de reacción , donde la variable aleatoria tiene una función de densidad de probabilidad f_X definida como :

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2/3 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $x \leq -1$ entonces $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0$ pues $f_X(t) = 0$ si $-\infty < x \leq -1$

Si $-1 < x < 2$ entonces $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (t^2/2)\,dt = (t^3/9)\Big]_{-1}^{x} = (x^3+1)/9$

Si $x \geq 2$ entonces $F(x) = (t^3/9)\Big]_{-1}^{2} = (t^3/9)\Big]_{-1}^{2} = 1$

Entonces, F resulta la función continua siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ (x^3+1)/9 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Podemos obtener , por ejemplo la $P(0 < X < 1)$ a partir de esta función F:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = (2/9) - (1/9) = 1/9$$

Otra forma es calcular la integral

$$P(0 < X < 1) = \int_{0}^{1} f_X(t)\,dt = = \int_{0}^{1} (x^2/3)\,dt = (t^3/9)\Big]_{0}^{1} = 1/9$$

Esta probabilidad coincide con el área entre la función de densidad f_X y el eje de abscisas en el intervalo [0 , 1] .

La **FDA** , $F(x)$, es el área entre la función de densidad f_X y el eje de abscisas a la izquierda de x

Esperanza matemática , valor esperado o media de una VA X

Variable aleatoria discreta

Sea X una **variable aleatoria discreta** con función de masa p_X y REC $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$; la **esperanza matemática** de X es :

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i \, p_X(x_i)$$

El valor esperado de una variable aleatoria discreta se puede considerar como su promedio ponderado sobre todos los resultados posibles , siendo las ponderaciones las probabilidades asociadas con cada uno de los resultados.

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado , **X** es el número de puntos que arroja el dado y la distribución de **X** resulta :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p_X(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Entonces $\mu_X = \sum_{i=1}^{6} x_i \; p_X(x_i) = 1.(1/6) + 2.(1/6) + 3.(1/6) + 4.(1/6) + 5.(1/6) + 6.(1/6)$

$$\mu_X = 21/6 = 3,5$$

El valor esperado de los resultados de lanzar un dado no parece tener significado puesto que nunca se puede obtener una cara de 3,5 . Sin embargo, este número cobra significado si nos preguntamos ¿cuánto dinero se estaría dispuesto a apostar si se pagara en pesos la cantidad que aparece en la cara del dado ?.
Puesto que el valor esperado de una tirada de un dado es 3,5 ; la utilidad que se puede esperar, a largo plazo es de $ 3,5 por tirada. Es decir , en una tirada en particular se obtendrán $ 1 , $ 2 , . . . $ 6 pero después de muchos lanzamientos se puede esperar una utilidad promedio de $ 3,5 por lanzamiento. Ahora bien , si se desea que el juego sea justo, ni jugadores, ni oponentes (la "casa ") deben tener ventaja alguna . Por tanto para jugar se debería estar dispuesto a pagar $ 3, 5 por lanzamiento. Si la casa quiere cobrar $ 4 por lanzamiento se espera perder en este juego al paso del tiempo $ 0,50 por jugada .

Variable aleatoria continua

Sea X una **variable aleatoria continua** con función de densidad f_X ; la **esperanza matemática** de X es :

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_X(x) \; dx$$

Ejemplo : Sea **X** la variable aleatoria que representa la vida útil en horas de un cierto dispositivo electrónico ; la función de densidad de probabilidad es :

$$f_X(x) = \begin{cases} 20.000 / x^3 & \text{si } x > 100 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La vida esperada del dispositivo es :

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (20.000/x^2)\, dx = \int_{100}^{\infty} (20.000/x^2)\, dx = (-20.000/x)\Big]_{100}^{\infty} = 200 \text{ horas}$$

Es decir que se puede esperar que este tipo de dispositivo dure en promedio 200 horas.

Varianza de una VA X

La esperanza matemática de una variable aleatoria es de especial importancia en estadística debido a que determina el lugar donde se concentra la distribución de probabilidad . No obstante E (**X**) no proporciona una información adecuada de la forma de la distribución de probabilidad o de su variabilidad o dispersión en torno a la media. Para ello definimos la **varianza** de X

Variable aleatoria discreta

Sea X una **variable aleatoria discreta** con función de masa de probabilidad p_X y esperanza matemática μ_X ; la **varianza de X**, se define como el promedio ponderado de las discrepancias elevados al cuadrado , entre cada resultado posible y el valor esperado , donde la ponderación está dada por la probabilidad de cada uno de los resultados respectivos :

$$\sigma_X^2 = VAR(X) = E(X - \mu_X)^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \, p_X(x_i)$$

La **desviación estándar** es igual a la raíz cuadrada de la varianza : $\sigma_X = D(X) = \sqrt{VAR(X)}$

Para la distribución de probabilidad en el ejemplo de la tirada del dado, obtenemos :

$$\sigma_X^2 = \sum (x_i - 3,5)^2 \, p_X(x_i) = (1-3,5)^2(1/6) + (2-3,5)^2(1/6) + \ldots + (6-3,5)^2(1/6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_X^2 = 2,9166 \qquad , \qquad \sigma_X = \sqrt{VAR(X)} = 1,71$$

En términos del juego , la retribución media por lanzamiento es de \$ 3, 5 con una desviación estándar de 1, 71 .

De acuerdo a la Regla de Chebyschev , se podría esperar que , por lo menos , el 50 % de los pagos esté en el intervalo $(E(X) - \sqrt{2}\ 1,71 \ , \ E(X) + \sqrt{2}\ 1,71)$, pues $(1 - (1/k^2))\ 100\ \% = 50\ \%$ si $k^2 = 2$ y $k = \sqrt{2}$.

Este intervalo resulta (1,08 , 5,91) y significa, tomando los enteros más próximos , que los pagos están entre \$ 1 y \$ 6 la mitad de las veces por lo menos .

Variable aleatoria continua

Sea X una **variable aleatoria continua** con función de densidad de probabilidad f_X y esperanza matemática μ_X; la **varianza de X** , se define :

$$\sigma_X^2 = VAR\ X = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \, f_X(x)\, dx$$

La **Desviación Estándar** es $\sigma_X = D(X) = \sqrt{VAR(X)}$

Escaneado con Cam