MATEMÁTICA PARA INGENIEROS

VARIABLE ALEATORIA

Variable Aleatoria Continua

Cuando los valores que toma una variable aleatoria es algún intervalo de los reales se dice que es **continua.**

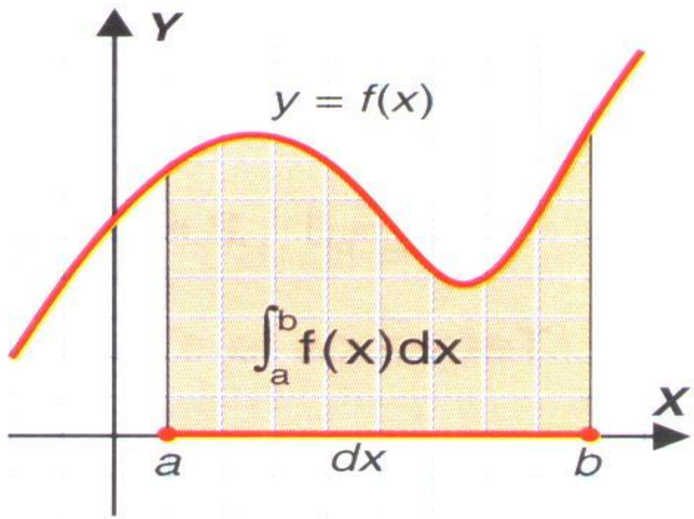
Ejemplos variable aleatoria continua

- Tiempos de desintegración de partículas radioactivas
- Tiempo necesario para ejecutar una reacción química

- La altura de un adulto seleccionado al azar en una población.
- Un número real elegido al azar entre 0 y 1.
- Se pesa un paquete de arroz elegido al azar de la producción de una fabrica.

Se dice que f_x es una distribución de probabilidad de una VA continua o una función de densidad de probabilidad de X si se verifica:

$f_X(x) \geq 0$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ $\quad$ $P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$



Observaciones:

- Si X es una VA continua entonces para todo
  $x \in R;\ P_X(x) = 0.$
- La función de densidad puede no ser una función continua, aunque generalmente lo es.

Dada la función:

$$\begin{cases} ax & si\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & si\ x \notin [0,1] \end{cases}$$

Para que valor de a resulta una función de densidad?

Necesitamos que $a \ge 0$ para satisfacer la condición 1)

Necesitamos que se cumpla también $\int_0^1 ax dx = 1$, para cumplir con la condición 2).

FDA para una variable aleatoria continua

Siendo X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X. Se llama función de distribución acumulada (FDA) de X a la función $F: R \longrightarrow [0;1]$ tal que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \qquad -\infty < x < \infty$$

Propiedades de la Función de Distribución (probabilidades acumuladas)

- $0 \leq F_X \leq \ 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- F_X es monótona no decreciente.

- F_X es continua.

- $F'_X(x) = f_X(x)$ por el Teorema Fundamental del Calculo Integral.

- $P_X([a, b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$ para todo a < b.

Sea $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$ Obtener su FDA

$$Si\ x \leq -1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0$$

$$Si\ -1 < x < 2 \qquad F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}dt = \frac{x^3+1}{9}$$

$$Si\ x \geq 2 \qquad F(x) = \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}dt = \frac{8+1}{9} = 1$$

Dadas las siguientes tres funciones de densidad de probabilidad, y tres funciones de distribución acumulada, ¿Cuál es la correspondencia?

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \notin [0;2] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \notin [0;2] \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \notin [0;2] \end{cases}$$

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Variable aleatoria continua

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_x; la esperanza matemática de X es:

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

✓ Determina el lugar donde se concentra la distribución de probabilidad
✓ **No** proporciona una información adecuada de la forma de la distribución de probabilidad o de su variabilidad o dispersión en torno a la media.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f_x y esperanza matemática μ_x; la varianza de X, se define:

$$\sigma^2 = VAR\ X = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)^2 f_x(x) dx$$

Dada la variable aleatoria X: “longitud de un corte de madera”, de la cual conocemos la función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & si \quad 2 \leq x < 4 \\ 1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Derivando podemos obtener la expresión de la función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Con la expresión de la función de densidad podemos graficar la función y calcular el valor de su esperanza