Unidad 2.3 – ÁLGEBRA DE LOS CIRCUITOS DIGITALES

FUNCIONES LÓGICAS CANÓNICAS

Contenido

- Concepto y definición
- Teorema de Existencia de las F.C.
- Ejemplo
- Formas canónicas numéricas
- Obtención
- Conversión
- Obtención de funciones canónicas
  - Método algebraico
  - Por tablas de verdad
- Ejemplos

Referencias (Aula Virtual)

> Flórez Fernández H. (2010). DISEÑO LÓGICO. Capítulo 2: Compuertas Lógicas; Capítulo 3: Álgebra de Boole.

> Mano M., Kime C., (2005). FUNDAMENTOS DE DISEÑO LÓGICO Y DE COMPUTADORAS. Cap. 2: Circuitos Lógicos Combinacionales.

> Mandado E., (1998). SISTEMAS ELÉCTRÓNICOS DIGITALES. Capítulo 2: Álgebra de Boole; Capítulo 3: Sistemas Combinacionales.

> Angulo Usategui (1991). ELECTRÓNICA DIGITAL MODERNA - Teoría y Práctica. Cap. 3: El Álgebra Lógica o de Boole.

Concepto

(Mano, pg. 39)

- También llamadas estándares o regulares, son formas de representación equivalentes de las funciones lógicas.
- Son las formas más utilizadas de representación debido a su formato regular y facilidad de cómputo.
- Toda función lógica tiene dos representaciones equivalentes como formas canónicas.
- Una de las formas se denomina canónica suma de productos (o Forma Normal Disyuntiva).
- La otra forma se denomina canónica producto de sumas (o Forma Normal Conjuntiva).

Definición Suma de Productos (Σπ)

(Florez, pg.42)

- **Una función canónica tipo suma de productos (Σπ) es aquella formada por la suma lógica de los productos canónicos *que forman parte* de la función.**
- **Un producto canónico –o minitérmino– es el producto lógico de todas las variables de la función dadas en forma directa o negada.**

Ejemplos:

$$F(A,B,C) = \underbrace{A.\bar{B}.C}_{} + \underbrace{\bar{A}.B.\bar{C}}_{\text{minitérminos}} + \underbrace{A.B.C}_{}$$

Función Σπ de 3 variables y 3 términos

$$H(a,b,c,d) = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + b.c.a.\bar{d} + \bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.d$$

Función Σπ de 4 variables, incompleta (3º minitérmino falta *a*), se denomina pseudo-canónica. También está desordenada.

$$N(X,Y) = \bar{X}.\bar{Y} + \bar{X}.Y + X.\bar{Y} + X.Y$$

Función Σπ de 2 variables con todos los términos ⇒ N=1 para cualquier valor.

$$FL = 0.1.1.0 + 1.1.0.0 + 0.0.0.1 + 1.1.1.0$$

Forma binaria de función Σπ de 4 variables y 4 términos. Debe estar ordenada y completa para evitar ambigüedades.

Definición Producto de Suma(ΠΣ)

- **Una función canónica tipo producto de sumas (πΣ) es aquella formada por el producto lógico de todas las sumas canónicas *que forman parte* de la función.**
- **Una suma canónica –o maxitérmino– es la suma lógica de todas las variables de la función dadas en forma directa o negada.**

Ejemplos:

$$F(A,B,C) = \underbrace{(A+\bar{B}+C)}.\underbrace{(\bar{A}+B+\bar{C})}_{\text{maxitérminos}}.\underbrace{(A+B+C)}$$

Función πΣ de 3 variables y 3 términos

$$Z(v,w,x,y) = (\bar{v}+w+x+\bar{y}).(v+\bar{w}+\bar{x}+y).(\bar{v}+\bar{w}+\bar{x}+\bar{y}).(v+w+x+y)$$

Función πΣ de 4 variables y 4 términos

$$r(q,r) = (\bar{p}+\bar{q}).(q+\bar{p}).(p+\bar{q}).(q+p)$$

Función πΣ de 2 variables y todos los términos; luego r=0 para cualquier valor. Está desordenada

$$T(\alpha,\beta,\lambda) = \alpha.(\alpha+\beta).(\alpha+\beta+\lambda)$$

Función πΣ de 3 variables y 3 términos. Se denomina incompleta o pseudo-canónica

Teorema de Existencia de las Fnes. Canónicas

Toda función lógica de n variables se puede representar como una función canónica tipo suma de productos canónicos (Σπ) y como una función canónica tipo producto de sumas canónicas (πΣ).

Teorema de Existencia de las Fnes. Canónicas

(Mandado, pg. 30)

Toda función lógica de n variables se puede representar como una función canónica tipo suma de productos canónicos (Σπ).

a) Demostración como Σπ

Sea una función lógica genérica de n variables F(A,B,C,...) que puede expresarse como

$$F(A,B,C,\ldots) = A \cdot F(1,B,C,\ldots) + \bar{A} \cdot F(0,B,C,\ldots) \qquad (1)$$

esta identidad puede demostrarse asignando a la variable A sus dos valores posibles.

Si $A = 0 \Rightarrow \bar{A} = 1$ **; reemplazando en la ecuación (1) anterior**

$$F(A,B,C,\ldots) = \cancel{0 \cdot F(1,B,C,\ldots)} + 1 \cdot F(0,B,C,\ldots)$$

$F(A,B,C,\ldots) = 1 \cdot F(0,B,C,\ldots)$ **..............Ley de invarianza**

$F(A,B,C,\ldots) = F(0,B,C,\ldots)$ **....................Ley de tautología**

$F(A,B,C,\ldots) = F(A,B,C,\ldots)$ **............................Solo si A = 0**

(1) se conoce como Teorema de Expansión de Shannon

Teorema de Existencia de las Fnes. Canónicas

a) Demostración como Σπ *(continuación)*

Si $A = 1 \Rightarrow \bar{A} = 0$; reemplazando en la ecuación de origen

$$F(A,B,C,...) = A \,.\, F(1,B,C,...) + \bar{A} \,.\, F(0,B,C,...) \qquad (1)$$

$$F(A,B,C,...) = 1 \,.\, F(1,B,C,...) + \cancel{0 \,.\, F(0,B,C,...)}$$

$F(A,B,C,...) = 1 \,.\, F(1,B,C,...)$ ....Ley de invarianza

$F(A,B,C,...) = F(1,B,C,...)$ ....Ley de tautología

$F(A,B,C,...) = F(A,B,C,...)$ ....Solo si A = 1

aplicando la descomposición (1) en forma sucesiva

$$F(A,B,C,...) = A \,.\, F(1,B,C,...) + \bar{A} \,.\, F(0,B,C,...)$$

$$F(0,B,C,...) = B \,.\, F(0,1,C,...) + \bar{B} \,.\, F(0,0,C,...)$$

$$F(1,B,C,...) = B \,.\, F(1,1,C,...) + \bar{B} \,.\, F(1,0,C,...)$$

Teorema de Existencia de las Fnes. Canónicas

a) Demostración como Σπ *(continuación)*

Generalizando la aplicación de la descomposición (1) en la ecuación de origen y ordenando los términos

$$F(A,B,C,\ldots) = A.B.C\ldots\, F(1,1,1,\ldots) + \bar{A}.B.C\ldots\, F(0,1,1,\ldots) + \ldots$$
$$+ \bar{A}.\bar{B}.C\ldots\, F(0,0,1,\ldots) + \ldots + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}\ldots\, F(0,0,0,\ldots)$$

Cada coeficiente F(·) se puede obtener calculado el valor de la función para los argumentos dados o extraerlo de la tabla de verdad.

El coeficiente F(·) que vale 0, anula al minitérmino y ya no forma parte de la función.

De la expresión anterior se puede concluir que

Toda función lógica se puede expresar como la suma de todos los productos canónicos afectados por un coeficiente 0 o 1 (contenido en F()) según el resultado de la función al reemplazar por 1 cada variable cuando esté directa en el producto canónico y por 0 cuando esté negada.

Con la expansión de Shannon dual, se puede demostrar la existencia del otro formato canónico

Teorema de Existencia de las Fnes. Canónicas

b) Demostración como πΣ:

Sea una función lógica genérica de n variables F(A,B,C,...) que puede expresarse como

$$F(A,B,C,..) = [A + F(0,B,C,..)] \,.\, [\bar{A} + F(1,B,C,..)] \qquad (2)$$

Generalizando y aplicando en forma sucesiva la expansión (2), se tiene (la demostración se hace de forma similar al caso anterior)

$$F(A,B,C,...) = [A + B + C + ... + F(0,0,0,...)] \,.\, [\bar{A} + B + C + ... + F(1,0,0,...)] \,.$$
$$.\, [\bar{A} + \bar{B} + C + ... + F(1,1,0,...)] \,...\, [\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + ... + F(1,1,1,...)]$$

Cada término numérico F(·) se puede obtener calculado el valor de la función para los argumentos dados o extraerlo de la tabla de verdad.

El coeficiente F(·) que vale 1, anula al maxitérmino y ya no forma parte de la función.

De la expresión anterior se puede concluir que

cualquier función lógica se puede expresar como un producto de todas las sumas canónicas afectadas de un término 0 o 1 (contenido en F()) según el resultado de la función al reemplazar por 0 cada variable cuando esté directa en la suma canónica y por 1 cuando esté negada.

Teorema de Existencia de las Fnes. Canónicas

Ejemplo de aplicación: calculo de las dos formas canónicas de una función lógica, aplicando el Teorema de Existencia.

Sea una función lógica de 2 variables

$$F(A,B) = (\bar{A} + \overline{A.B}).\bar{B}$$

Se calculan los valores de la función para todos los valores de las variables de entrada

$$F(0,0) = 1 \qquad F(0,1) = 0 \qquad F(1,0) = 1 \qquad F(1,1) = 0$$

Como suma de productos

$$F(A,B) = \bar{A}.\bar{B}.\,F(0,0) + \bar{A}.B.\,F(0,1) + A.\bar{B}.\,F(1,0) + A.B.\,F(1,1)$$

$$F(A,B) = \bar{A}.\bar{B}.\;1 + \underbrace{\cancel{\bar{A}.B.\;0}}_{=0} + A.\bar{B}.\;1 + \underbrace{\cancel{A.B.\;0}}_{=0}$$

$$\boxed{F(A,B) = \bar{A}.\bar{B} + A.\bar{B}}$$

Como producto de sumas

$$F(A,B) = \left[\bar{A}+\bar{B}+F(1,1)\right].\left[\bar{A}+B+F(1,0)\right].\left[A+\bar{B}+F(0,1)\right].\left[A+B+F(0,0)\right]$$

$$F(A,B) = \left[\bar{A}+\bar{B}+\;0\right].\underbrace{\cancel{\left[\bar{A}+B+\;1\right]}}_{=1}.\left[A+\bar{B}+\;0\right].\underbrace{\cancel{\left[A+B+\;1\right]}}_{=1}$$

$$\boxed{F(A,B) = \left[\bar{A}+\bar{B}\right].\left[A+\bar{B}\right]}$$

Formas Canónicas Numéricas

Concepto

- **Las formas canónicas expresadas con sus variables y operadores lógicos, se las puede identificar como canónicas algebraicas o literales.**
- **Las formas canónicas numéricas son representaciones equivalentes y simplificadas obtenidas por medio de una codificación de los términos canónicos.**
- **A pesar de tener una estructura más reducida, contienen los mismos elementos que las formas algebraicas.**
- **Son más requeribles cuando la cantidad de variables o de términos es grande.**

Ejemplos

símbolo para suma de productos

$$F(A,B,C) = \Sigma_3\underbrace{(1 , 3 , 4 , 7)}$$

Cantidad de variables

Cantidad de términos

$$H(W,X,Y,Z) = \pi_4\overbrace{(0 , 5 , 9, 10 , 11)}$$

símbolo para producto de sumas

Formas Canónicas Numéricas

Obtención

- **A partir de la forma canónica algebraica**

$$F(A,B,C) = B.\bar{A}.\bar{C} + \bar{A}.B.C + \bar{C}.\bar{B}.A + A.B.C \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma\Pi$$

$$\Pi\Sigma\ldots\ldots\ldots\ldots G(A,B,C) = (C + \bar{B} + \bar{A}).(\bar{A} + B + \bar{C}).(A + B + \bar{C})$$

- **Se ordenan las variables en todos los términos manteniendo la misma secuencia (puede ser orden alfabético)**

$$F(A,B,C) = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.C \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma\Pi$$

$$\Pi\Sigma\ldots\ldots\ldots\ldots G(A,B,C) = (\bar{A} + \bar{B} + C).(\bar{A} + B + \bar{C}).(A + B + \bar{C})$$

- **Se le hace corresponder a cada variable en cada término un bit, cuyo valor será [0] si la variable se encuentra negada y [1] si la variable se encuentra directa**

$$F(A,B,C) = \underbrace{\bar{A}}_{0}.\underbrace{B}_{1}.\underbrace{\bar{C}}_{0} + \underbrace{\bar{A}}_{0}.\underbrace{B}_{1}.\underbrace{C}_{1} + \underbrace{A}_{1}.\underbrace{\bar{B}}_{0}.\underbrace{\bar{C}}_{0} + \underbrace{A}_{1}.\underbrace{B}_{1}.\underbrace{C}_{1} \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma\Pi$$

$$\Pi\Sigma\ldots\ldots\ldots\ldots G(A,B,C) = (\underbrace{\bar{A}}_{0} + \underbrace{\bar{B}}_{0} + \underbrace{C}_{1}) . (\underbrace{\bar{A}}_{0} + \underbrace{B}_{1} + \underbrace{\bar{C}}_{0}) . (\underbrace{A}_{1} + \underbrace{B}_{1} + \underbrace{\bar{C}}_{0})$$

Formas Canónicas Numéricas

Obtención *(continuación)*

- El número binario formado en cada término se convierte a su **equivalente decimal**

$$F(A,B,C) = \underbrace{\underbrace{\bar{A}}_{0}.\underbrace{B}_{1}.\underbrace{\bar{C}}_{0_2}}_{2_{10}} + \underbrace{\underbrace{\bar{A}}_{0}.\underbrace{B}_{1}.\underbrace{C}_{1_2}}_{3_{10}} + \underbrace{\underbrace{A}_{1}.\underbrace{\bar{B}}_{0}.\underbrace{\bar{C}}_{0_2}}_{4_{10}} + \underbrace{\underbrace{A}_{1}.\underbrace{B}_{1}.\underbrace{C}_{1_2}}_{7_{10}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Sigma\Pi$$

$$\Pi\Sigma\ldots\ldots\ldots\ldots \quad G(A,B,C) = \underbrace{(\underbrace{\bar{A}}_{0}+\underbrace{\bar{B}}_{0}+\underbrace{C}_{1_2})}_{1_{10}}.\underbrace{(\underbrace{\bar{A}}_{0}+\underbrace{B}_{1}+\underbrace{\bar{C}}_{0_2})}_{2_{10}}.\underbrace{(\underbrace{A}_{1}+\underbrace{B}_{1}+\underbrace{\bar{C}}_{0_2})}_{6_{10}}$$

- Los valores decimales obtenidos en cada término constituyen **el argumento de la forma numérica** que se identifica con Σ o π según la función de origen

$$F(A,B,C) = \Sigma_3(2,3,4,7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Sigma\Pi$$

$$\Pi\Sigma\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad G(A,B,C) = \Pi_3(1,2,6)$$

Conversión

- Del argumento de la forma numérica dada, se identifican los **términos faltantes** de la serie $[0 ; 2^{n^o\ var} - 1]$

$$H = \Sigma_3(2,3,4,7) \;\; .... \text{ faltan } [0, 1, 5, 6]$$

$$K = \Pi_3(1,2,6,7) \;\; .... \text{ faltan } [0, 3, 4, 5]$$

- Se **complementa** cada término faltante al valor $[2^{n^o\ var} - 1]$

$$2^3 - 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 7 - [0, 1, 5, 6] = [7, 6, 2, 1] \\ 7 - [0, 3, 4, 5] = [7, 4, 3, 2] \end{cases}$$

- Los términos complementados constituyen el **nuevo argumento** de la otra forma canónica numérica

$$\left.\begin{array}{l} H = \Sigma_3(2,3,4,7) = \Pi_3(1,2,6,7) \\ K = \Pi_3(1,2,6,7) = \Sigma_3(2,3,4,7) \end{array}\right\} H = K$$

Obtención de las Formas Canónicas

Método algebraico

- Aplicando las propiedades del álgebra binaria, se transforma la función original hasta llegar a la forma requerida, eliminando los términos duplicados.

ΣΠ

$F(A,B,C) = A + \overline{\overline{B} + \overline{C}}$ ……………………función original

$F(A,B,C) = A + B.C$ ……………………ley de DeMorgan

$F(A,B,C) = A.1.1 + 1.B.C$ ……………………ley de tautología

$F(A,B,C) = A.(B + \overline{B}).(C + \overline{C}) + (A + \overline{A}).B.C$ ……………………ley del complemento

$F(A,B,C) = A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.C + \overline{A}.B.C$ …ley distributiva

$F(A,B,C) = A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C$ …….ley de idempotencia

ΠΣ

$F(A,B,C) = A + \overline{\overline{B} + \overline{C}}$ ……………………función original

$F(A,B,C) = A + B.C$ ……………………ley de DeMorgan

$F(A,B,C) = (A + B) . (A + C)$ ……………………ley distributiva

$F(A,B,C) = (A + B + 0) . (A + 0 + C)$ ……………………ley de tautología

$F(A,B,C) = (A + B + C.\overline{C}) . (A + B.\overline{B} + C)$ ……………………ley del complemento

$F(A,B,C) = (A + B + C).(A + B + \overline{C}).(A + B + C).(A + \overline{B} + C)$ ……….ley distributiva

$F(A,B,C) = (A + B + C).(A + B + \overline{C}).(A + \overline{B} + C)$ ……………………ley de idempotencia

Obtención de las formas canónicas

Por Tabla de Verdad → algebraicas

- **Para Σπ:** Líneas con resultado = 1 ⟶ Variables de entrada = $\begin{cases} 0 \Rightarrow \text{negada} \\ 1 \Rightarrow \text{directa} \end{cases}$
- **Para πΣ:** Líneas con resultado = 0 ⟶ Variables de entrada = $\begin{cases} 0 \Rightarrow \text{directa} \\ 1 \Rightarrow \text{negada} \end{cases}$

Ejemplo

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

suma de productos

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + +A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$

producto de sumas

$$F(A,B,C) = (A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C)$$

Obtención de las formas canónicas

Por Tabla de Verdad → numéricas

- **Para Σπ:** Líneas con resultado = 1. Para el argumento se toma equivalente decimal directo.
- **Para πΣ:** Líneas con resultado = 0. Para el argumento se toma equivalente decimal complementado (numeración invertida).

Ejemplo

suma de productos

$F = \Sigma_3(7 , 6 , 5 , 4 , 3)$

Dec	A	B	C	F	Dec
0	0	0	0	0	7
1	0	0	1	0	6
2	0	1	0	0	5
3	0	1	1	1	4
4	1	0	0	1	3
5	1	0	1	1	2
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	0

$F(A,B,C) = \pi_3(5 , 6 , 7)$

producto de sumas