MATEMÁTICA PARA INGENIEROS

VARIABLE ALEATORIA

Variable aleatoria

Frecuentemente interesa conocer más que el resultado de un experimento aleatorio, una función de dicho resultado.

Una variable aleatoria es una función con valores numéricos y definida sobre un espacio muestral

Ejemplo: Si lanzamos al aire tres monedas, podemos definir la función como *X*:

X: número de caras que resultan del experimento.

Variable aleatoria

Una **variable aleatoria** X es una **función** que asocia a cada suceso del espacio muestral S de un experimento aleatorio un valor numérico real:

$$X : S \to \Re$$

La variable aleatoria puede ser discreta o continua.

Cuando los valores que toma una variable aleatoria son finitos o infinitos numerables se dice que es **discreta.**

Ejemplos variable aleatoria discreta

Experimento	Variable aleatoria	Valores posibles V.A
Llamar a cinco clientes	Cantidad de clientes	0, 1,2,3,4,5
Inspeccionar un embarque de 40 chips	Cantidad de chips defectuosos	0,1,2,….,40
Lanzar una moneda tres veces	Numero de caras	

Variable Aleatoria Continua

Cuando los valores que toma una variable aleatoria es algún intervalo de los reales se dice que es **continua.**

Ejemplos variable aleatoria continua

- Tiempos de desintegración de partículas radioactivas
- tiempo necesario para ejecutar una reacción química

Funciones de probabilidad
Variables aleatorias discretas

Una variables aleatoria X se llama discreta si x puede tomar un número finito K de valores distintos, x_1, x_2, …, x_k; o a lo sumo una sucesión infinita de valores distintos, x_1, x_2, …, x_k, …

Ejemplo de variable aleatoria discreta:

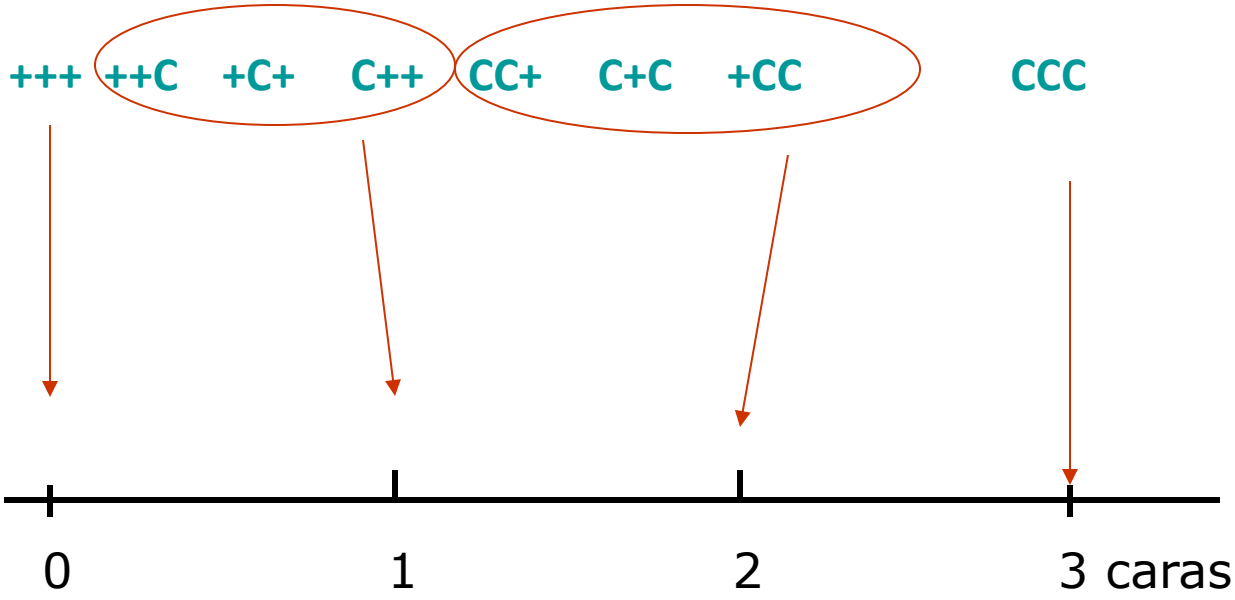
Experimento: se lanza una moneda tres veces

X: "número de caras obtenidas en los tres lanzamientos

Elementos del espacio muestral

Ley de correspondencia X

Nº reales



Podemos construir una tabla de frecuencias para el recorrido de X

REC X ={0, 1, 2, 3}

X	0	1	2	3
f	1	3	3	1

Como todos los puntos muestrales son igualmente posibles (moneda perfecta), se puede determinar una distribución de probabilidades para los valores posibles de la VA

Se define una función que hace corresponder a los valores posibles x de la variable aleatoria X un número que determina la probabilidad que tiene la variables aleatoria X de asumir un valor particular x de su recorrido.

Simbólicamente indicamos los valores que toma esta función de probabilidades en la formas

$$P(X=x) \quad o \quad P(\{s/X(s) = x\})$$

Que indican la probabilidad de que algún punto muestral **s** tome el valor **x** de **X**

Para nuestro ejemplo, obtenemos los siguientes valores de la función de probabilidad:

$P(X = 0) = P(\{s/X(s) = 0\} = P((+++)) = 1/8$

$P(X = 1) = P(\{s/X(s) = 1\} = 3/8$

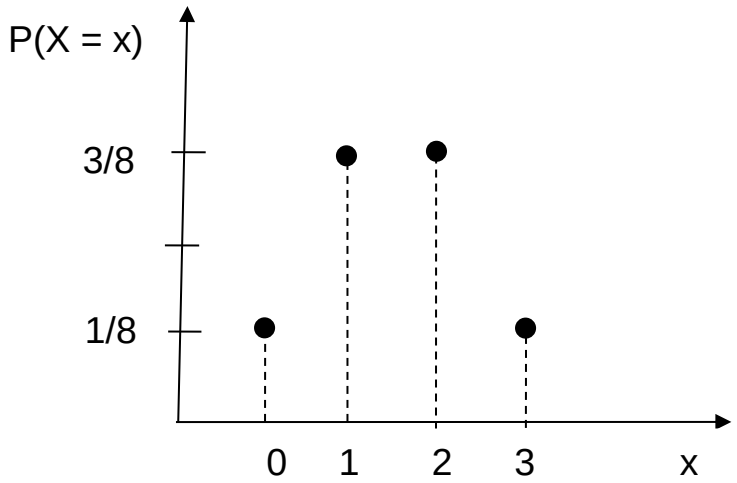
$P(X = 2) = 3/8$

$P(X = 3) = 1/8$

que resumimos en la siguiente tabla

X	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Representemos gráficamente esta distribución, mediante un gráfico a bastones



$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 0 \; y \; 3 \\ \frac{3}{8} & x = 1 \; y \; 2 \\ 0 & en \; otro \; caso \end{cases}$$

El conjunto de pares ordenados (x, $p_x(x)$) es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X o una función de masa de la VA X o función de probabilidad de X, si para cualquier x se verifica:

(1) $P_x(x) \geq 0$ (2) $\Sigma\, p_x(x) = 1$ (3) $P_x(x) = P(X=x)$

Función de probabilidad como aquella que surge al asignar probabilidades a cada uno de los valores de una variable aleatoria

Funciones de probabilidad
Variables aleatorias continuas

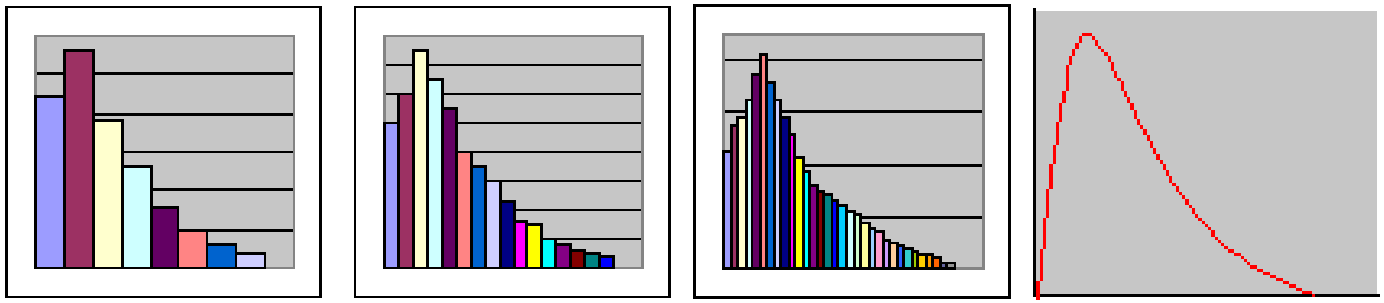
Si definimos a una **variable aleatoria continua** como aquella que puede asumir un valor cualquiera en un intervalo o región, podemos expresar entonces que la probabilidad que una variable aleatoria continua asuma algún valor en particular es cero.

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x \; si \; Xes \; VA \; continua$$

Para VA continuas podemos calcular probabilidades del tipo:

$$P(a < X < b) \qquad P(X < b) \qquad P(X > b)$$

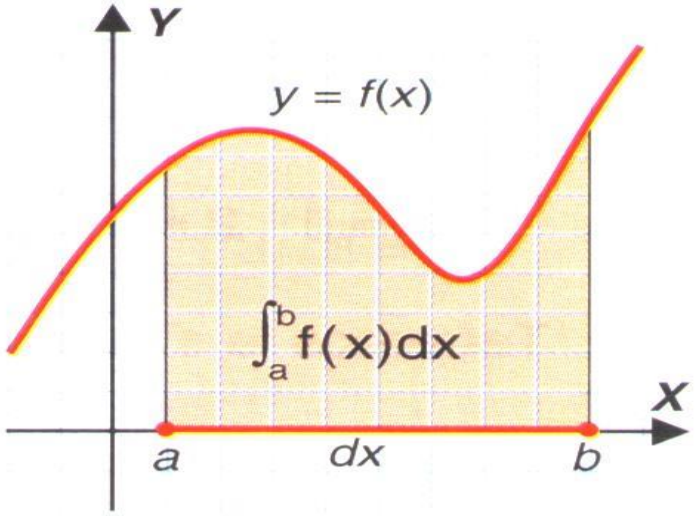
Las distribuciones de probabilidad son idealizaciones de los polígonos de frecuencias.



Las distribuciones de probabilidad de VA continua se definen mediante una función llamada **función de probabilidad** o **función de densidad f_x**.
Así como en el histograma la frecuencia viene dada por el área, en la función de densidad la probabilidad viene dada por el área bajo la curva.

Se dice que f_x es una distribución de probabilidad de una VA continua o una función de densidad de probabilidad de X si se verifica:

$f_X(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \quad P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$



Función de Distribución Acumulada (FDA)

La función de distribución acumulada (FDA) o función de distribución de una variable aleatoria X es una función definida para todo número real como sigue:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)} \qquad -\infty < x < \infty$$

- Esta definición vale para toda variable aleatoria independientemente si su distribución es discreta, continua o mixta.
- Es una función definida sobre la recta real.
- El valor de F para cualquier x debe ser un número tal que $0 \leq F(x) \leq 1$ pues F es la probabilidad del suceso $(X \leq x)$.

Propiedades de FDA

- La FDA es no decreciente:

Si $x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

- La FDA es siempre continua por la derecha

Esto es $F(x)=F(x^+) \; \forall \, x \in R$

La FDA puede no ser continua y presentar un número finito de discontinuidades finitas o salto, diremos que F es continua en x si

$$F(x^-)=F(x^+)= F(x)$$

- Cuando X es discreta, $p_X(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$

Determinación de probabilidades a partir de la FDA

Si se conoce la FDA de una variable aleatoria X, entonces se puede determinar la probabilidad de que X esté en cualquier intervalo real, teniendo en cuenta las siguientes reglas.

1. $P(X>x) = 1- F(x)$ para cualquier valor de x
2. $x_1 < x_2 \rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad \forall\, x_1, x_2$
3. $P(X<x) = F(x^-)$ para cualquier valor de x.
4. $P(X =x) = F(x^+) - F(x^-)$ para cualquier valor de x.

FDA para una variable aleatoria discreta

Si p_x es la función de masa para los valores de la VA X se define FDA X a la siguiente función F:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p_x(t)$$

Ejemplo: Si lanzamos al aire tres monedas, podemos definir la función como X:

X: número de caras que resultan del experimento.

X	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

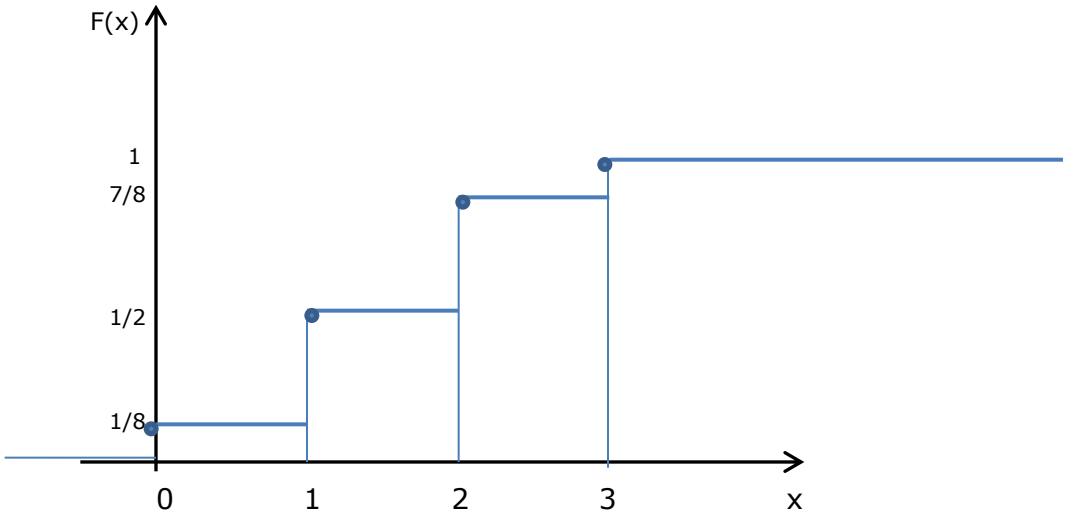
La función F resulta:

$$F(0) = P(X = 0) = \sum_{t \leq 0} p_x(t) = p_x(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{t \leq 1} p_x(t) = p_x(0) + p_x(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{t \leq 2} p_x(t) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = \sum_{t \leq 3} p_x(t) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) + p_x(3) = 1$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ x < 0 \\ \frac{1}{8} \ \ si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} \ \ si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} \ \ si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 \ \ si\ x \geq 3 \end{cases}$$

FDA para una variable aleatoria continua

- Para una variable aleatoria continua disponemos de un conjunto no numerable de valores.

No es posible definir una probabilidad para un valor en particular, definimos la **función densidad de probabilidad**

Definimos la FDA para la variable aleatoria continua como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \qquad -\infty < x < \infty$$

- $F'(x) = f_X(x) \quad \forall x$ donde exista la derivada

$$P(a < X < b) = P(\leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Sea $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$ Obtener su FDA

$$Si\ x \leq -1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0$$

$$Si\ -1 < x < 2 \qquad F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \frac{x^3 + 1}{9}$$

$$Si\ x \geq 2 \qquad F(x) = \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3} dt = \frac{8+1}{9} = 1$$

Esperanza matemática, valor esperado o media de una VA X- Varianza de una VA X

Variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa p_x y ReC X = {x_1, x_2, x_3,…}; **la esperanza matemática** de X es:

$$\mu_x = E(X) = \sum_i x_i p_x(x_i)$$

Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa p_x y esperanza matemática μ_x; **la varianza de X**, se define como el promedio ponderado de las discrepancias elevadao al cuadrado entre cada resultado posible y el valor esperado, donde la ponderación está dada por la probabilidad de cada uno de los resultados respectivos:

$$\sigma_x^2 = VAR(X) = E(X - \mu_x)^2 = \sum_i (X - \mu_x)^2 p_x(x_i)$$

Ejemplo: en el lanzamiento de un dado, X es el número de puntos que arroja el dado y la distribución de X resulta:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_x(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{6} x_i p_x(x_i) = 1.\left(\frac{1}{6}\right) + 2.\left(\frac{1}{6}\right) + 3.\left(\frac{1}{6}\right) + 4.\left(\frac{1}{6}\right) + 5.\left(\frac{1}{6}\right) + 6.\left(\frac{1}{6}\right) = 21/6$$

$$\sigma_x^2 = \sum (x_i - 3.5)^2 p_x(x_i) = (1-3.5)^2(1/6) + (2-3.5)^2(1/6) + \cdots + (6-3.5)^2(1/6)$$

$$\sigma_x^2 = 2.9166 \ , \sigma = \sqrt{VAR(X)} = 1.71$$

Juegos

A un juego de azar podemos asignarle una **variable aleatoria *X***, cuyos valores son **las ganancias correspondientes a los posibles resultados**. La esperanza matemática de la variable aleatoria *X* representa el **beneficio medio o ganancia media** que se obtiene en cada jugada cuando se juega un número elevado de veces.

Si la esperanza matemática es 0 se dice que el **juego** es **justo.**
Si es mayor que 0 se dice que el **juego** es **favorable** al jugador.
Si es menor que 0 se dice que perjudica al jugador y **no** es **favorable**.

Sea el juego que consiste en sacar una bola de una urna que contiene 7 bolas rojas y 3 bolas negras. Ganamos $50 si la bola extraída es roja y pagamos $150 en el caso de que sea negra. ¿Qué podemos esperar si jugamos muchas veces?

Espacio muestral S = *{R, N}.* Consideramos las ganancias como positivas y las pérdidas negativas:

Variable aleatoria *X*		Función de probabilidad
R	*50*	*0,70*
N	*150*	*0,30*

$$\mu = 50 \cdot 0{,}7 + (-150) \cdot 0{,}3 = -10$$

Ejemplo
Una ruleta tiene los números del 0 al 36. Se apuesta $1 a que sale un número par. Sea X es la variable que indica la ganancia en cada tiro. ¿Cuál es la ganancia esperada? (el cero no se considera par

X	1	-1
$p_x(x)$	18/37	19/37

Entonces $E(X) = 1 * \frac{18}{37} + (-1) * \frac{19}{37} = -0{,}027$

En este caso la esperanza es negativa lo que indica que si jugamos muchas veces por cada peso apostado esperamos perder 3 centavos

Variable aleatoria continua

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_x; la esperanza matemática de X es:

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

- ✓ Determina el lugar donde se concentra la distribución de probabilidad
- ✓ **No** proporciona una información adecuada de la forma de la distribución de probabilidad o de su variabilidad o dispersión en torno a la media.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f_x y esperanza matemática μ_x; la varianza de X, se define:

$$\sigma^2 = VAR\ X = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)^2\, f_x(x)\, dx$$

Ejemplo:

Sea X: “vida útil en horas de un cierto dispositivo electrónico”

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{20000}{x^3} & si\ x > 100 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{20000}{x^2} dx = \left(-\frac{20000}{x}\right|_{100}^{\infty} = 200$$