TEORIA DE PROBABILIDADES

En los *experimentos aleatorios o estadísticos* no podemos predecir de antemano el resultado que obtendremos cuando se repita siempre de la misma manera. Sin embargo, si es factible prever una ***ley de comportamiento*** de todos los resultados posibles, se puede, en base a ella, calcular la probabilidad de obtener cada uno de los mismos.

La **teoría de probabilidades** es la *teoría matemática* que permite calcular o cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un resultado.

Básicamente, existen tres teorías bien conocidas para medir la probabilidad : **clásica**, **frecuencial** y **subjetiva**. La teoría clásica se basa en el conteo de todos los resultados posibles en base a conocimientos teóricos previos . En la teoría frecuencial el conteo se basa en datos reales. Existirán situaciones en las que, para cuantificar la probabilidad de un cierto evento o suceso futuro se recurre a la subjetividad del investigador, o se hace uso de la intuición o de la creencia personal y de alguna otra información indirecta . Esto forma parte de la definición subjetiva de la probabilidad.

No obstante, en todos los casos , se cumplen los **axiomas** exigidos para que una medida sea considerada una probabilidad.

Los especialistas en estadística usan la palabra experimento para describir cualquier proceso o estudio planeado que genere un conjunto de datos. Una encuesta de opinión, un muestreo, la recopilación de datos o una investigación científica son experimentos estadísticos.

La opinión de los ciudadanos respecto a un determinado candidato en las elecciones reflejada en una encuesta ; la toma de una muestra para analizar la presencia de plomo en el agua de un tanque de almacenamiento ; el registro del número de accidentes que ocurren mensualmente en algún lugar determinado de la ciudad o el experimento que realiza un químico en el laboratorio para medir la energía que consume una reacción, son ejemplos de experimentos aleatorios o estadísticos. En estos casos no puede pronosticarse con certeza cuales son los resultados a obtenerse pues la selección de los ciudadanos a entrevistar o de la muestra de agua será al azar. Del mismo modo, los accidentes que sucederán o los resultados que obtenga el químico en su prueba programada de laboratorio dependerán de factores no controlados.

La teoría de probabilidades brinda los elementos para modelar y analizar un experimento aleatorio con el objeto de poder establecer la ley de comportamiento de los resultados del mismo . A continuación introduciremos los conceptos que nos ayudarán a comprender esta teoría .

Espacio Muestral

Se llama **espacio muestral** al **conjunto de todos los resultados posibles** de un experimento estadístico y se lo representa con el símbolo **S** .

Los ***elementos*** del espacio muestral que representan los posibles resultados del experimento se indican con **s** y se los llama simplemente ***puntos muestrales***.

Debido a esta interpretación , el lenguaje y los conceptos de la teoría de conjuntos proporcionan un contexto natural para el desarrollo de la teoría de probabilidades.

Ejemplo 1 : Consideremos el experimento que consiste en lanzar un dado y observar el número que representa la cara que queda hacia arriba. Antes de arrojar el dado , no podemos predecir con certeza el valor de la cara del dado , pero puede registrarse el conjunto de todos los resultados posibles del experimento **S** .

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Si se lanzan dos dados (distinguibles) , cada dado puede tomar un valor del uno al seis inclusive y S será:

$$S = \{ (x_1 , x_2) \ / \ 1 \le x_1 \le 6 \ , \ 1 \le x_2 \le 6 \} \qquad (x_1 , x_2 \in N)$$

Si un solo dado se lanza dos veces **S** es el mismo que el anterior (para dos dados) solo que x_1 indica el valor obtenido en el primer lanzamiento y x_2 indica el valor en el segundo.

Ejemplo 2 : Consideremos el número de partículas α que llega a un contador colocado a una distancia conocida de la fuente durante un intervalo de 10 seg.

El número de tales partículas es un número entero no negativo ($N \cup \{0\}$) , resulta **S** :

$$S = \{ 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \}$$

Ejemplo 3 : Consideremos un experimento que consiste en arrojar una moneda y observar el lado hacia arriba .

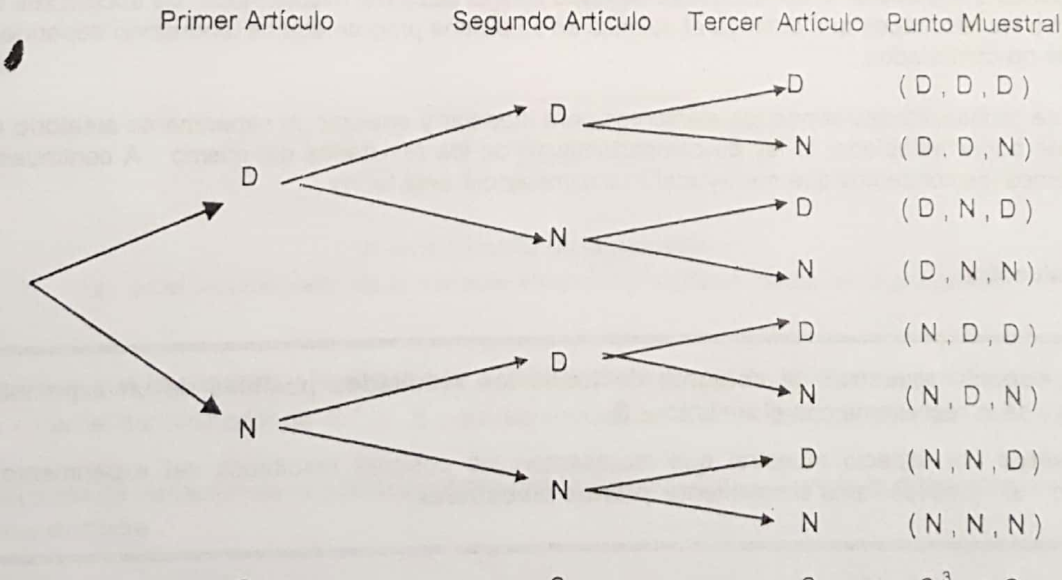
Se presenta este ejemplo para ilustrar el hecho que el espacio muestral no tiene que consistir necesariamente en un conjunto de números , en este caso

S = { C , S } , donde C : Cara y S : Sello

Ejemplo 4 : Se seleccionan en forma aleatoria 3 artículos de un proceso de manufactura . Se examina cada uno de ellos y se les clasifica como Defectuoso (D) o No Defectuoso (N) .

Para describir graficamente los elementos del espacio muestral se construyó un ***diagrama de árbol*** siguiente

Diagrama de Arbol



$$2 \ . \ 2 \ . \ 2 = 2^3 = 8$$

Cantidad de resultados posibles

Cuando un espacio muestral puede construirse en varios pasos o etapas, entonces cada uno de los resultados posibles del primer paso puede representarse como una rama del árbol y cada una de las formas de completar el segundo paso puede representarse por tantas ramas que comienzan donde terminaron las ramas anteriores; y así sucesivamente.

El espacio muestral de este caso, resulta :

S = { (D, D, D) ; (D, D, N) ; (D, N, D) ; (D, N, N) ; (N, D, D) ; (N , D, N) ; (N, N, D) ; (N, N, N) }

La cantidad de puntos muestrales es ocho . La primera observación brinda dos resultados posibles, la segunda dos resultados por cada uno de los anteriores ; resulta 2 . 2 = 4 y la tercera aporta dos observaciones por cada una de la cuatro anteriores. : 2

Ejemplo 5 : Sea un lote con los artículos A, B y C y el experimento que consiste en seleccionar dos de estos sin reemplazo, esto es no podemos seleccionar las dos veces el mismo artículo.

El espacio muestral tiene seis resultados posibles ; tres posibilidades para la primera selección y dos para cada una de estas en la segunda selección. Resulta

S = { AB , AC, BA , BC , CA , CB }

Si el experimento consiste en seleccionar dos de esos artículos con reemplazo, es decir puedo seleccionar dos veces el mismo artículo porque los artículos se reponen en el lote luego de la primera selección; el espacio muestral tiene 9 resultados posibles

S = { AA , AB , AC, BB , BA , BC , CC , CA , CB }

Ejemplo 6 : El experimento consiste en verificar, cada 10 minutos, el volumen de llenado de las latas de gaseosa de una máquina de llenado automático con el objeto de verificar si el contenido responde a las especificaciones. La verificación continúa hasta encontrar una lata que no cumpla las especificaciones.

Si c denota que la lata verificada cumple las especificaciones y n que no las cumple resulta el siguiente espacio muestral con infinitos resultados posibles

$$S = \{ n \, , \; cn \, , \; ccn \, , \; cccn \, , \; ccccn \, , \; cccccn \, , \ldots \}$$

Conteo de Puntos Muestrales

En muchos casos debe tenerse la capacidad de resolver un problema de probabilidades mediante el conteo del número de elementos del espacio muestral sin realmente anotar cada uno de los elementos. Frecuentemente se hace referencia al principio fundamental del conteo llamado también **regla de la multiplicación**, la cual se enuncia como sigue:

- *Si una operación puede realizarse en n_1 formas , y si por cada una de estas una segunda operación puede llevarse a cabo en n_2 formas , y por cada una de las dos primeras se puede realizar una tercera en n_3 formas, y así sucesivamente entonces las k operaciones sucesivas pueden realizarse en $n_1 . n_2 . n_3 . . . n_k$ formas.*

La cantidad de puntos muestrales o formas en el lanzamiento de una moneda cinco veces es 2.2.2.2.2 pues cada tirada de la moneda da 2 resultados posibles ; cada una de las cinco operaciones puede realizarse en dos formas distintas. Similarmente la cantidad de puntos muestrales en el lanzamiento de un dado siete veces consecutivas será 6^7 = 279.936 porque en cada una de las siete tiradas del dado pueden obtenerse seis formas para el resultado.

La cantidad de maneras para la selección de un menú consistente en entrada, plato principal , postre y una gaseosa si se puede seleccionar entre 4 sopas diferentes, 3 platos principales, 5 postres y 4 tipos de gaseosas es 4.3.5.4 = 240

Se pueden verificar las respuestas de los ejemplos si se dibujan los diagramas de árbol y se cuentan las ramas obtenidas .

→ interesa el orden o posición

A veces interesa un espacio muestral que tiene como elementos todos los órdenes o arreglos de un grupo de objetos. Los diferentes arreglos se llaman **permutaciones** y puede involucrar a todos los objetos de un lote o sólo a un parte de ellos.

Si consideramos los cinco objetos A B C D y E y queremos determinar la cantidad de arreglos para estos cuatro objetos vemos que hay $n_1 = 5$ posibilidades para la primera posición, $n_2 = 4$ para la segunda, $n_3 = 3$ para la tercera, después $n_4 = 2$ para la cuarta y únicamente $n_5 = 1$ para la última. Luego empleamos la regla de la multiplicación y resulta un total de

$$n_1 \, . \, n_2 \, . \, n_3 \, . \, n_4 \, . \, n_5 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5! = 120 \text{ formas .}$$

Cinco objetos distintos pueden ser acomodados en 5! formas.

- *El número de permutaciones de* n *objetos distintos es* $n!$

Para elegir los caballos que ocupen los dos primeros puestos en la quiniela de un hipódromo si los caballos inscriptos son 8 ; tenemos $n_1 = 8$ formas para la primera selección y $n_2 = 7$ para la segunda y obtenemos , empleando la regla de la multiplicación $n_1 \, n_2 = 8.7 = 56$ formas de arreglar los dos primeros puestos a partir de un grupo de ocho candidatos.

- *El número de permutaciones de* n *objetos distintos tomando* r *de ellos es*

$$n(n-1)\ldots(n-r+1) = n!/(n-r)!$$

En muchos problemas interesa el número de formas posibles de seleccionar r objetos de un total de n sin importar el orden.

Si queremos determinar la cantidad de formas de seleccionar $r = 3$ problemas de una lista que contiene $n = 20$ problemas distintos, tenemos $n_1 = 20$ formas de seleccionar el primer problema, $n_2 = 19$ para el segundo y $n_3 = 18$ para el tercero . Resulta empleando la regla de la multiplicación $n_1 \, n_2 \, n_3 = 20. 19 .18$ permutaciones o formas de arreglar 3 objetos distintos seleccionados de un grupo de 20 en donde se incluyen todas las formas de ordenar los tres problemas seleccionados . En este experimento tiene sentido seleccionar solo una de estas formas de ordenar tres problemas distintos por lo que tenemos que dividir las permutaciones obtenidas por el número de permutaciones para tres problemas ; 3 !. Se obtiene :

$$(n_1 n_2 n_3) \;/\; r! = 20.19.18/3! = 20!/3!\,17!$$

El número obtenido se llama combinación de 20 objetos tomando 3 y puede indicarse $\binom{20}{3}$

→ No interesa el orden ó posición

- *El número de* **combinaciones** *de* n *objetos distintos , tomando* r *a la vez es*

$$[n.(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)/r!] = [n!/r!(n-r)!] = \binom{n}{r}$$

Sucesos o Eventos

En cualquier experimento dado quizá interese más el hecho que ocurran ciertos sucesos que el resultado de un elemento específico de un espacio muestral.

Por *ejemplo* podría interesar el suceso **A** que consiste en obtener un número par en el lanzamiento de un dado . Esto sucederá si el resultado es un elemento del subconjunto $A = \{2, 4, 6\}$ del espacio muestral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

En el *ejemplo 4* podría interesar el suceso **B** , consistente en que el número de artículos defectuosos fuera mayor que 1 . Esto ocurrirá si el resultado es un elemento del subconjunto B /

$$B = \{(D, D, N), (D, N, D), (N, D, D), (D, D, D)\} \text{ del espacio muestral } S$$

A cada suceso se le asigna una colección de puntos muestrales , que constituyen un subconjunto del espacio muestral.

> Un **suceso** es un **subconjunto del espacio muestral**

Dado el espacio muestral $S = \{ s / s \geq 0 \}$ donde s es la vida en años de determinado componente electrónico , entonces el suceso A de que el componente se dañe antes del final del quinto año es el subconjunto $A = \{ s / 0 \leq s < 5 \}$.

Es posible que un suceso sea un subconjunto que incluya al espacio muestral en su totalidad o que sea el subconjunto vacío.

Por ejemplo si A es el suceso de detectar un organismo microscópico a simple vista en un experimento biológico , entonces $A = \varnothing$.

Si $B / B = \{ s / s$ es divisor par de $7 \}$, entonces $B = \varnothing$ dado que los únicos divisores posibles de 7 son los números impares 1 y 7 .

El ***conjunto vacío*** representa al ***suceso imposible*** .

Por ejemplo son sucesos imposibles obtener siete puntos en la tirada de un dado u obtener más de 12 puntos en la tirada de dos dados.

Sucesos Complementarios (A^c: los elementos que no están en A)

Diremos que se ha presentado el suceso A si y sólo si el resultado **s** obtenido al efectuar el experimento pertenece al conjunto A . Si en cambio , **s** no pertenece a A , se dice que no se ha presentado o no ha ocurrido el suceso A . La **no** presentación de A equivale a la presentación de A^C , llamado *suceso complementario.*

> El **suceso complementario** de un suceso A con respecto a S es el conjunto de todos los elementos de S que no están en A y se denota A^C.
>
> $$A \cup A^C = S \quad , \quad A \cap A^C = \varnothing$$

Ejemplo : Considérese el experimento en el cual se registran los hábitos de fumar de los empleados de una empresa .

En un espacio muestral posible se podría establecer la siguiente clasificación para un individuo :

S = { No Fumador, Ligeramente Fumador , Fumador Moderado , Fumador Empedernido }

Sea el suceso B de los empleados No Fumadores, entonces todos los Fumadores pertenecen a un evento diferente también subconjunto de S , denominado complemento del conjunto de No Fumadores , B^C y que resulta :

B^C = { Ligeramente Fumador, Fumador Moderado, Fumador Empedernido }

<u>Consecuencias inmediatas de la definición de suceso</u>

Del hecho que, de acuerdo a su definición , un suceso no es más que un subconjunto del espacio muestral S , se deduce que ***toda proposición relativa a sucesos se traduce a una correspondiente proposición relativa a conjuntos.***

• Unión : "Ocurre A ó bien ocurre B ó bien ocurren ambos a la vez" "ocurre alguno de los sucesos se ha presentado" "por lo menos uno de los" $A \cup B$

Los sucesos son iguales

Dos sucesos A y B se dicen iguales si la presentación de uno cualquiera de ellos trae como consecuencia la presentación automática del otro.

Ejemplo : Si para S igual al espacio muestral asociado al experimento que consiste en arrojar dos dados , o sea : $S = \{ (x_1 , x_2) \ / \ 1 \le x_1 \le 6 \ , \ 1 \le x_2 \le 6 \} \quad (x_1 , x_2 \in N)$ se definen los sucesos :

A = { la suma de los puntos de los dos dados un número par }

B = { los puntos obtenidos en ambos dados tienen la misma paridad }

Los sucesos A y B son iguales.

• Intersección : $A \cap B$ "Suceso consistente en la presentación simultánea de los sucesos A y B", "ocurren A y B a la vez"

Por lo menos uno de los sucesos A y B se ha presentado

Esto significa que realizado el experimento el resultado **s** *obtenido pertenece al conjunto* **A** *, al conjunto* **B** *ó a ambos a la vez ; esto es* **s** *pertenece al conjunto* ***unión*** $A \cup B$.

Ejemplo : Sea **P** el evento de que un empleado de una compañía perforadora al que se selecciona al azar fume cigarrillos y sea **Q** el evento de que aquél que se escoge tome bebidas alcohólicas. Entonces el evento $P \cup Q$ es el conjunto de todos los empleados que fuman , o beben , o ambas cosas.

• Diferencia : $A/B = A \cap B^c$ El suceso diferencia consiste en la presentación de A y en la no presentación de B .

Los sucesos A y B se han presentado simultáneamente

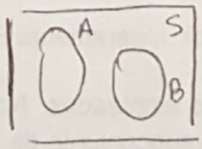
El suceso consistente en la presentación simultánea de los sucesos **A** *y* **B** *, se denomina suceso intersección y se representa por* $A \cap B$.

Ejemplo : Sea **P** el evento de que una persona seleccionada al azar entre los que comen en un restaurante cumple con el pago de impuestos y sea **Q** el evento que dicha persona pase los 65 años. Entonces $P \cap Q$ es el suceso formado por todas las personas que se encuentran en el restaurante que pagan sus impuestos y que son mayores de 65 años .

Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes

Si **A** *y* **B** ***son incompatibles o mutuamente excluyentes*** *en términos de conjuntos esta proposición significa que* $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo : Sea **A** el suceso que en la tirada de un dado el número de puntos en la cara del dado sea par y sea **B** el suceso de el número de puntos sea impar. Los sucesos **A** y **B** son mutuamente excluyentes o disyuntos ya que $A \cap B = \varnothing$.



Se ha presentado A pero no B

Al efectuar la experiencia , el resultado **s** logrado pertenece a **A** pero no a **B** , o lo que es lo mismo pertenece simultáneamente a **A** y B^c.

El suceso que consiste en la presentación de **A** *y en la no presentación de* **B** *, es el suceso* $A \cap B^c$ *y se denomina* ***suceso diferencia*** :

$$A / B = A \cap B^c$$

La presentación de A implica la presentación de B

La presentación de A *implica la presentación de* B *es una afirmación que, en términos de conjuntos, significa que* A *está contenido en* B *, o sea* $A \subset B$

Los sucesos simples pueden describirse mediante una característica sencilla mientras que los conjuntos reúnen dos o más características. En el juego de cartas francesas el evento " la carta es roja " es un evento simple pero el suceso " la carta es roja y de corazón " es conjunto.

Probabilidad de un Suceso

Consideremos los experimentos para los cuales el espacio muestral ~~es discreto y~~ contiene un número finito o infinito contable de elementos , es decir ,los elementos del espacio muestral se pueden contar . La probabilidad de que se presente un suceso como resultado del experimento se evalúa por medio de un conjunto de números reales llamados *pesos* que caen en el rango de 0 a 1. A cada punto del espacio muestral se le asigna un peso tal que la suma de todos los pesos es la unidad.

Si se tiene la razón para creer que un cierto punto muestral tiene una gran posibilidad de ocurrir cuando el experimento se lleva a cabo , el ***peso o probabilidad*** que se le asigne deberá ser cercana a 1 . Por el contrario, se le asigna un valor próximo a cero a un punto muestral que es muy posible que no ocurra.

En muchos experimentos , tales como el lanzamiento de un dado no cargado o de una moneda perfecta, todos los puntos muestrales tienen la misma oportunidad de presentarse y se les asigna pesos (probabilidades) iguales.

A los puntos fuera del espacio muestral , a los sucesos simples que no es posible que se den se les asigna una probabilidad de cero.

Para encontrar la probabilidad de un evento A , P (A) , se suman todos los ***pesos*** asignados a los puntos muestrales de A .

> *La* **probabilidad de un evento** A *, es la suma de los* **pesos** *de todos los puntos muestrales de* A *y :*
>
> $$0 \le P(A) \le 1 \quad , \quad P(\varnothing) = 0 \quad , \quad P(S) = 1$$

Ejemplo 1: Se carga un dado de tal manera que un número par tiene el doble de posibilidades de presentarse que un impar. Si E es el evento en el que se da un número menor que 4 en un solo lanzamiento , encuentre P (E) .

El espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y W es el peso que tiene la presencia de un número impar , entonces :

$$P(1) = P(3) = P(5) = W \qquad\qquad P(2) = P(4) = P(6) = 2W$$

$$P(S) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 9W = 1 \Rightarrow W = 1/9$$

Como $E = \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(E) = P(1) + P(2) + P(3) = 4W \Rightarrow P(E) = 4/9$

Ejemplo 2 : Con la situación del problema anterior , encuentre la probabilidad de que el dado caiga en un número par o resulte divisible por tres y la probabilidad de que dado caiga en un número par divisible por tres .

Sean los eventos simples $A = \{2, 4, 6\}$ (A : "el dado cae en un número par ")

$B = \{3, 6\}$ (B : "el dado cae en un número divisible por tres")

Resultan los eventos conjuntos :

$C = A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ (C : "el dado cae en un número par ó divisible por tres")

$D = A \cap B = \{6\}$ (D : "el dado cae en un número par y divisible por tres")

Entonces las probabilidades son : $P(C) = P(2) + P(3) + P(4) + P(6) = 7\,W \Rightarrow$

$$P(C) = 7/9 \quad \text{y} \quad P(D) = P(6) = 2\,W = 2/9$$

Axiomas de probabilidad

La **probabilidad de un evento A** en **un experimento aleatorio** , es el valor numérico P (A) que satisface los tres axiomas siguientes :

1) Si **A** es un evento $P(A) \geq 0 \quad \forall A$

2) Si **S** representa al conjunto de **todos los resultados posibles de un experimento aleatorio** , luego $P(S) = 1$

3) Para $A_1, A_2, \ldots$ una **sucesión finita o infinita de eventos incompatibles** o excluyentes .

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Definición *clásica* de probabilidad (Probabilidad de Laplace)

La probabilidad de que ocurra un suceso , se calcula como la cantidad de casos favorables a dicho suceso sobre el total de resultados igualmente posibles .

En este caso el espacio muestral tiene un número N definido de resultados posibles o puntos muestrales y **todos la misma posibilidad de presentarse** entonces a cada uno de los puntos muestrales se les asigna una probabilidad de **1 / N** .

P/ casos igual// probables ⇒ se usa

La probabilidad de cualquier evento A , que contiene n del total de N puntos muestrales , todos con la misma posibilidad de presentarse; es el cociente entre el número n de elementos de A , y el número N de elementos de S ;

$$P(A) = n / N$$

$P(A) = \frac{NCF}{NCT}$ NCF : N° de casos favorables al suceso A

NCT : N° de casos totales .

Teoría *frecuencial* de probabilidad

Si los resultados de un experimento **no tienen la misma posibilidad de ocurrir**, los pesos deben asignarse sobre la base de un conocimiento previo o de una evidencia experimental.

En este caso la probabilidad se determina como la proporción de éxitos en el experimento en el largo plazo o para un gran número de experimentos. Se puede estimar la probabilidad de cada uno de los resultados posibles, al repetir el experimento, en condiciones uniformes, un gran número de veces y registrar los resultados que permitan confeccionar una tabla de frecuencias. Esta es la definición de probabilidad como ***frecuencia relativa.***

Se informa en %.

Como ya hemos visto, el número de veces que se presenta un evento es la frecuencia absoluta , f_i , y la frecuencia relativa , f_i / N , representa la proporción de veces que se presenta un evento en particular en las N repeticiones del experimento. La experiencia indica que la frecuencia relativa tiende a estabilizarse para grandes valores de **N**.

En este caso podemos establecer una ley de comportamiento de los fenómenos aleatorios a traves de muchas repeticiones del experimento en condiciones uniformes y enunciar la teoría frecuencial de probabilidad de la siguiente manera :

Podemos asociar un número P (A) *a cada evento* A *surgido por medio de la realización de un experimento aleatorio , de manera tal que la frecuencia relativa de* A *será aproximadamente igual a* P (A) *si se considera una larga serie de repeticiones del experimento .*

Diremos que P (A) es la probabilidad de evento A en el experimento aleatorio y **su valor es el límite de la frecuencia relativa .**

No debemos olvidar que la frecuencia relativa y la probabilidad al vincularse , establecen la relación entre una situación de experimentación real (frecuencia realmente observada) y un modelo conceptual ideal (frecuencia teórica esperada) ; asimilación que sólo es posible ante experimentos que se pueden repetir indefinidamente . Aún así , siempre cabrá la duda respecto a la magnitud que debe tener **N** para que esta aproximación se produzca.

Las aplicaciones de probabilidad en Ingeniería y en las Ciencias se basan en experimentos que pueden repetirse y , en consecuencia se usa la interpretación de frecuencia relativa de probabilidad.

Ejemplo : La inspección visual de piezas fabricadas por un equipo arrojó los siguientes resultados

Cantidad de defectos	Proporción de piezas
0	0,40
1	0,20
2	0,15
3	0,10
4	0,05
5 ó más	0,10
	1,00

Si se elige una pieza al azar, obtener la probabilidad de los siguientes eventos : A : la pieza no tiene defectos , B: la pieza tiene tres o más defectos y C : la pieza no tiene defectos o tiene más de tres defectos.

Determinamos los puntos muestrales que contiene cada evento y obtenemos la probabilidad como suma de las probabilidades asociadas a cada resultado incluido en el evento. Así, se obtiene:

A = { 0 } , P (A) = P (0) = 0,40

B = { 3 , 4 , 5 ó más } , P (B) = P (3) + P (4) + P (5 ó más) = 0,10 + 0,05 + 0,10 = 0, 25

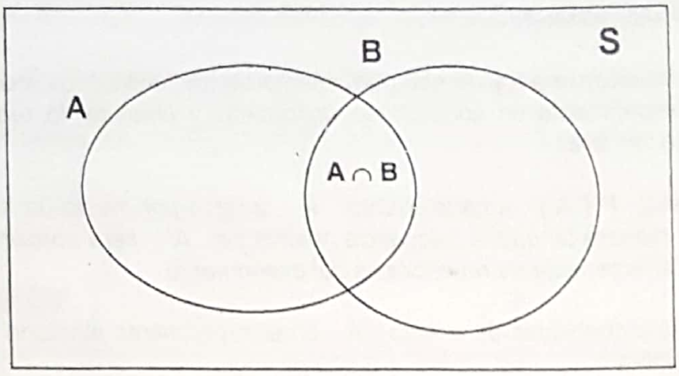
C = { 0, 4 , 5 ó más } , P (C) = 0,40 + 0,05 + 0,10 = 0,55

Reglas Aditivas → probabilidad de la unión .

Estas reglas permiten calcular la probabilidad de algún evento a partir de las probabilidades de los otros, para sucesos que pueden presentarse como unión de otros dos sucesos o como el complemento de otro.

Si A y B son dos eventos cualquiera , entonces **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**

Este resultado puede interpretarse a partir de la siguiente representación mediante el Diagrama de Venn.



Si A y B son dos eventos **mutuamente excluyentes**, entonces : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Demostración : Como A y B son mutuamente excluyentes , $A \cap B = \varnothing$, entonces :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing)$$

como $P(\varnothing) = 0$ resulta $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Generalización

1) Para **tres eventos** A , B y C ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

2) Si A_1 , A_2 , ... , A_k son **eventos mutuamente excluyentes**, entonces :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$

3) Si A_1 , A_2 , ... , A_n es una **partición del espacio muestral** S entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(S) = 1$$

Ejemplo : La probabilidad de que Paula apruebe Matemática es de 2 / 3 y la de que apruebe Inglés es de 4 / 9 . Si la probabilidad de que apruebe ambos cursos es de 1/ 4 , determinar cuál es la probabilidad de que Paula apruebe por lo menos uno de ellos.

$P(M) = 2/3$ (M: "aprueba Matemática") $P(I) = 4/9$ (I: " aprueba Inglés ")

$$P(M \cap I) = 1/4$$

Entonces la probabilidad de que apruebe al menos uno de ellos resulta $P(M \cup I)$:

$$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 31/36$$

Ejemplo : Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 cuando se lanza un par de dados .

$A = \{ (1,6) ; (2,5) ; (3,4) ; (4,3) ; (5,2) ; (6,1) \}$ (A: "ocurre la suma de 7 puntos ")

$n_A = 6$ (n_A : número de puntos muestrales del evento A)

$B = \{ (5,6) ; (6,5) \}$ (B : " ocurre la suma de 11 puntos)

$n_B = 2$ (n_B : número de puntos muestrales del evento B)

Como el número de elementos del espacio muestral S es $N = 6 . 6 = 36$, resulta

$P(A) = n_A / N = 1/6$ y $P(B) = n_B / N = 1/18$

Teniendo en cuenta que los eventos son excluyentes ($A \cap B = \varnothing$) obtenemos :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/9$ o $P(A \cup B) = (n_A + n_B) / N = 2/9$

Teorema : **Si A y A^c son eventos complementarios , entonces $P(A) + P(A^c) = 1$**

Ejemplo : Si las probabilidades de que un mecánico automotriz repare 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ó más vehículos en un día de trabajo son respectivamente 0,12 ; 0,19 ; 0,28 ; 0,24 ; 0,10 ; 0,07 . Obtener cuál es la probabilidad que le de servicio al menos a cinco (5) autos en un día de trabajo.

E : " se arreglan al menos 5 autos " (se arreglan 5 , 6 , 7 , 8 ó más)

E^c : " se arreglan menos de 5 autos " (se arreglan 3 ó 4)

$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - (0,12 + 0,19) = 0,69$

Probabilidad Condicional

la probab. de q' B ocurra dado que ocurrió A. $P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A) > 0$

A la probabilidad de que un evento B se dé cuando se sabe que el evento A se ha presentado se llama ***probabilidad condicional*** y se escribe **$P(B \backslash A)$** y se lee **" la probabilidad de que B ocurra dado que ocurrió A "**, ó **" la probabilidad de B dado A "**

Ejemplo : Sea el espacio muestral S , que corresponde a la población de adultos de un pequeño pueblo , clasificada de acuerdo con su sexo y a si trabajan o nó actualmente:

	EMPLEADO	DESEMPLEADO	TOTAL
HOMBRE	460	40	500
MUJER	140	260	400
TOTAL	600	300	900

Se selecciona al azar uno de estos individuos y se centra el interés en los siguientes eventos :

H : " se escoge a un Hombre " E : " el elegido tiene empleo "

entonces $P(H \backslash E)$: " probabilidad que el elegido sea Hombre si es Empleado " (es decir , ocurrió el evento " el elegido tiene empleo ") , resulta :

$P(H \backslash E) = 460/600 = 23/30$; donde :

$P(H \backslash E) = n_{(E \cap H)} / n_E = (n_{(E \cap H)} / n_S) / (n_E / n_S) = P(E \cap H) / P(E)$

El evento H dado E $(H \backslash E)$ es relativo al espacio muestral E.

La **probabilidad condicional** de B dado A que se indica P (B \ A) , se define :

$$P(B\backslash A) = [P(A \cap B)] \, / \, P(A) \qquad \text{si} \qquad P(A) > 0$$

Si observamos en el ejemplo dado $P(H\backslash E) = 23/30$ y $P(H) = 500/900 = 5/9$, es decir que $P(H\backslash E) \neq P(H)$. Esto indica que los eventos H y E son **dependientes** o que la ocurrencia de que una persona sea empleado influye en la probabilidad de que sea hombre.

Ejemplo : Consideremos el experimento de sacar dos cartas en sucesión , ***con reemplazo*** de un paquete de 52 cartas , y los eventos :

A : " la primera carta es un as " B : " la segunda carta es de corazón"

Obtener la probabilidad de que la segunda carta sea de corazón si la primera carta es un as.

$P(B\backslash A) = P(A \cap B) \, / \, P(A) = (1/52) \, / \, (4/52) = 1/4$

Si obtenemos la $P(B)$, resulta $P(B) = 13/52 = 1/4$

Para este ejemplo tenemos que $P(B\backslash A) = P(B) = 1/4$, decimos que los eventos A y B son ***independientes*** . Esto sucede pues se efectuó el reemplazo de la primer carta extraída.

Dos eventos **A** y **B** son **independientes** si y sólo si $P(B\backslash A) = P(B)$ ó $P(A\backslash B) = P(A)$ Si se cumple una cualquiera de estas condiciones , luego se cumple la otra.

En nuestro ejemplo : $P(A\backslash B) = (1/52) \, / \, (13/52) = 1/13$ $P(A) = 4/52 = 1/13$

Reglas multiplicativas → probabilidad de la intersección

De la definición de probabilidad condicional se obtiene la *regla multiplicativa* que permite calcular que dos eventos sucedan :

Si en un experimento pueden ocurrir dos eventos **A** y **B**, entonces $P(A \cap B) = P(A).P(B\backslash A)$

La probabilidad de que se presenten ambos sucesos es igual a la de que se dé **A** multiplicada por la de que ocurra **B** dado que ocurrió **A** .

Como $A \cap B = B \cap A$, resulta $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \, P(A\backslash B)$.

Esto permite concluir que en la probabilidad de que dos eventos sucedan no importa cuál evento se considera como ya presentado.

Ejemplo : En una bolsa se han colocado 4 pelotas blancas y 3 negras , y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una pelota de la primera bolsa y , sin verla se mete en la segunda Obtener la probabilidad de que la pelota que se saque de esta última bolsa sea negra .

Sean los eventos :

N_1 : La pelota de la bolsa 1 es negra

B_1 : La pelota de la bolsa 1 es blanca

N_2 : La pelota de la bolsa 2 es negra

C : La pelota que se saca de la bolsa 2 es negra

El evento C sucede cuando se efectúa el experimento consistente es extraer aleatoriamente una pelota de la bolsa 1 y colocarla en la bolsa 2 para luego extraer una pelota negra de la bolsa 2 y resulta de la unión de los eventos mutuamente excluyentes siguientes :

Se extrae una pelota negra de la bolsa 1 y una negra de la bolsa 2 : $N_1 \cap N_2$
Se extrae una pelota blanca de la bolsa 1 y una negra de la bolsa 2 : $B_1 \cap N_2$

Resulta $C = (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap N_2)$ y la $P(C) = P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2)$

Se obtiene empleando la regla multiplicativa en cada caso :

$$P(C) = P(N_1)\, P(N_2 \backslash N_1) + P(B_1)\, P(N_2 \backslash N_1)$$

Reemplazando : $P(C) = (3/7)\,(6/9) + (4/7)\,(5/9) = 38/63$

Dos eventos A y B son ***independientes*** si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Ejemplo : Un par de dados se lanza dos veces. Obtener la probabilidad de obtener totales de 7 y 11.

Sean los sucesos : S : Sale un total de 7 en un lanzamiento
O : Sale un total de 11 en un lanzamiento A : Sale un total de 7 u 11

El evento A surge cuando se lanzan dos dados un par de veces y se obtiene un total de 7 u 11 y resulta de la unión de los dos *eventos independientes* :

Sale un total de 7 en el primer lanzamiento y un total de 11 en el segundo : $S \cap O$
Sale un total de 11 en el primer lanzamiento y un total de 7 en el segundo : $O \cap S$

Resulta $A = (S \cap O) \cup (O \cap S)$ y la $P(A) = 2\,P(S \cap O)$

Se obtiene empleando la regla multiplicativa en cada caso : $P(A) = 2\,P(S)\,P(O)$

Reemplazando : $P(A) = 2\,(6/36)\,(2/36) = 1/54$

Generalización

- Si en un experimento , los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, pueden ocurrir , entonces :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\,P(A_2 \backslash A_1)\,P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2)$$
$$P(A_4 \backslash A_1 \cap A_2 \cap A_3) \ldots P(A_k \backslash A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

- Si en un experimento , los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, son *independientes* , entonces :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_k)$$

Ejemplo : Se sacan tres cartas en sucesión, ***sin reemplazo*** , de un paquete de 52 cartas . Dados los eventos : A_1 : La primera carta es un as rojo A_2 : La segunda un 10 o una sota A_3 : La tercera mayor que 3 pero menor que 7 . Obtener la probabilidad de que se presentes los tres eventos simultáneamente.

Debemos calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ y esta resulta :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2 \backslash A_1)\;P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2)$$

Donde : $P(A_1) = 2/52$, $P(A_2 \backslash A_1) = 8/51$, $P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) = 12/50$

Resulta reemplazando : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 8/\ 5525 \sim 0.00144$

Obtener la probabilidad de que los tres eventos se den simultáneamente si las cartas se sacan ***con reemplazo***

En este caso los eventos resultan *independientes* y entonces :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = (2/52)\,(8/52)\,(12/52)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3/2197 \sim 0.00136$$

Ejemplo : Determinación de probabilidades a partir de una ***Tabla de Contingencia***

Sea la siguiente tabla que resumen los resultados del curso de Matemática para Ingenieros del año 2002

Carrera	APROBADO	DESAPROBADO	LIBRE	Total
Ing. Química	21	14	14	49
Ing. Metalurgica o de Minas	5	5	8	18
Total	26	19	22	67

Esta tabla es de contingencia por que en ella intervienen o contienden los valores de dos variables Carrera y Resultado.

A partir de ella podemos calcular, por ejemplo, las probabilidades simples :

Si L es el suceso " el estudiante quedó libre " , entonces $P(L) = 22/67$

Si A es " el estudiante resultó aprobado , entonces $P(A) = 26/67$

Si O es que el estudiante no cursa Ing, Quimica , entonces $P(O) = 18/67$

Estas probabilidades también se llaman marginales porque el número de casos que corresponde al evento se buscan en los márgenes de la tabla.

En cambio, en las siguientes probabilidades corresponden a sucesos conjuntos y el número de casos que corresponde al evento se buscan en el interior de la tabla.

Si queremos calcular la probabilidad del evento $Q \cap A$: " los estudiantes que cursan Ing. Química y además están aprobados " resulta : $P(Q \cap A) = 21/67$ por ser 21 la cantidad de estudiantes que según la tabla cumplen ambos requerimientos.

Si se selecciona al azar un alumno y está aprobado, ¿cuál es la probabilidad que no curse Ing.Química?

En este caso la probabilidad pedida es $P(O \backslash A) = 5/26$

La probabilidad que un estudiante " curse Ing. Química o haya resultado aprobado" es la $P(Q \cup A)$

$$P(Q \cup A) = (49/67) + (26/67) - (21/67)$$

Debémos restar la probabilidad que surge de los estudiantes que cumplen simultáneamente los dos requisitos que fueron considerados dos veces.

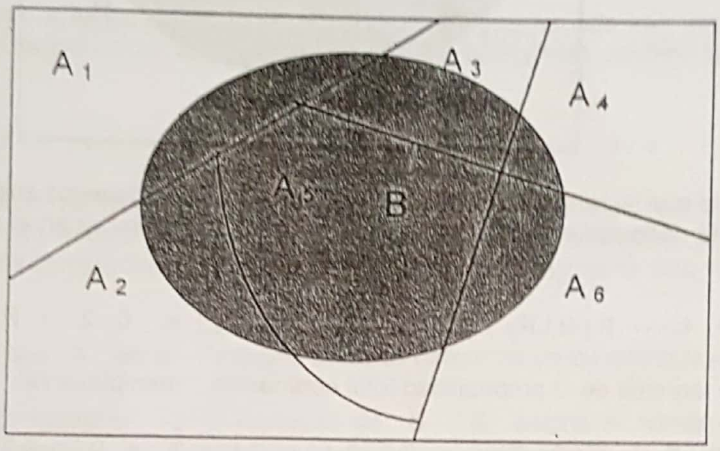
Teorema de la probabilidad total

eventos disyuntos : mutuamente excluyentes

Sea S el espacio muestral de un experimento y considérense los k sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de S , que constituyen una ***partición*** de S ; es decir , $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son disyuntos y $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = S$ y sea B cualquier otro suceso .

Entonces , **los sucesos** $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, . . . , $A_k \cap B$ **constituyen una partición de** B como se puede observar en el siguiente diagrama :

S



Así, el conjunto B puede obtenerse : $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)$
y la P (B) resulta : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_k \cap B)$

Como $P(A_j \cap B) = P(A_j)\, P(B \backslash A_j)$ $j = 1, 2, \ldots, k$ con $P(A_j) > 0$
resulta la siguiente expresión para P (B) :

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)\, P(B \backslash A_j)$$

Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forman una partición del espacio muestral **S** y $P(A_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$; entonces para todo suceso **B** de **S** :

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)\, P(B \backslash A_j)$$

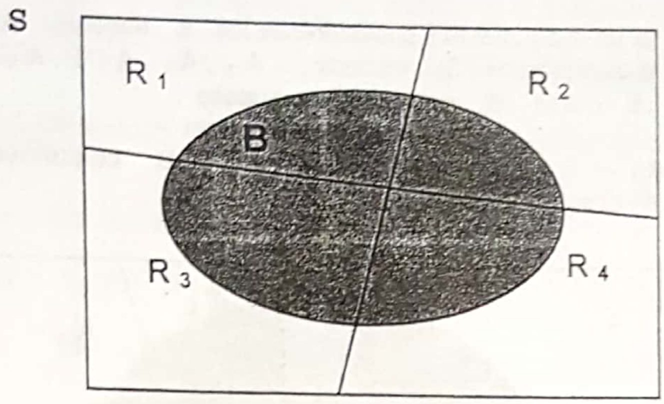
Ejemplo : La policía planea reforzar el respeto a los límites de velocidad mediante la utilización de un sistema de radar en 4 diferentes sitios dentro de la ciudad. Los sistemas de radar en cada sitio; R_1, R_2, R_3 y R_4 se ponen a funcionar respectivamente , el 40 % , 30 % , 20 % y 30 % del tiempo . Si una persona que conduce a gran velocidad rumbo a su trabajo tiene , respectivamente las probabilidades de 0, 2 ; 0, 1; 0, 5 y 0, 2 de pasar por alguno de estos sitios , obtener la probabilidad de que le hagan la multa.

El evento B es " la persona es multada por exceso de velocidad "

El espacio muestral S de sitios por donde pasa esta persona a gran velocidad se particiona en R_1 , R_2 , R_3 y R_4 con probabilidad de pasar por esos sitios dada en el problema :

$P(R_1) = 0{,}2$ - $P(R_2) = 0{,}1$ - $P(R_3) = 0{,}5$ - $P(R_4) = 0{,}2$

Si representamos en un diagrama , resulta :



La probabilidad de que la persona sea multada si pasa por alguno de estos sitios también es un dato del problema que está dado por el tiempo de funcionamiento de cada radar en el sitio donde está instalado y resultan :

$P(B \backslash R_1) = 0,4$ - $P(B \backslash R_2) = 0,3$ - $P(B \backslash R_3) = 0,2$ - $P(B \backslash R_1) = 0,3$

Si empleamos el teorema de la probabilidad total obtenemos , reemplazando :

$$P(B) = \sum_{j=1}^{4} P(R_j)\ P(B \backslash R_j) = 0,2\ \ 0,4 + 0,1\ \ 0,3 + 0,5\ \ 0,2 + 0,2\ \ 0.3 = 0,27$$

Teorema de BAYES

Este teorema proporciona una forma de determinar la probabilidad de que *un efecto o resultado en particular se deba a una causa específica.*

Supóngase que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forman una partición del espacio muestral **S** y $P(A_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$; entonces para todo suceso B de S y tal que $P(B) > 0$ resulta :

$$P(A_j \backslash B) = P(A_j \cap B) / P(B) = \frac{P(A_j)\ P(B \backslash A_j)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)\ P(B \backslash A_j)}$$

Resulta , una regla que permite calcular la probabilidad condicional de cada suceso A_j dado B a partir de las probabilidades condicionales de B dados cada uno de los sucesos A_j y las probabilidades incondicionales de cada A_j .

La probabilidad condicional toma en cuenta información sobre a ocurrencia de un suceso para predecir la probabilidad de otro , este teorema nos permite *revisar* las probabilidades en base a una nueva información y determinar la probabilidad de que un efecto en particular se deba a una causa específica.

Ejemplo : Si en el ejemplo anterior la persona recibe una multa por conducir a gran velocidad , determinar la probabilidad de que haya pasado el radar que se localiza en el sitio R_2 .

En este caso obtenemos : $P(R_2 / B) = [P(R_2)\ P(B \backslash R_2)]\ /\ P(B)$

Reemplazando : $P(R_2 \backslash B) = 0,1\ \ 0,3\ /\ 0,27 = 0,11$