UNIDAD 3

Flujo de Fluidos

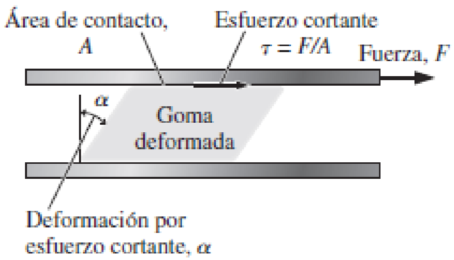
CONTENIDOS

Fluidos. Definición. Esfuerzo cortante en flujo laminar. Ecuación constitutiva de Newton. Reología. Viscosidad. Fluidos newtonianos y no-newtonianos. **Flujo de fluidos**. Compresible. Incompresible. Laminar. Turbulento. Interno. Externo. Ecuación de Navier-Stokes. Ecuación de Bernoulli. Ecuaciones de Conservación. Pérdida de carga. Números de Reynolds, de Fanning, de Darcy, de Karman. Ecuación de Poiseuille. Diámetro

DOCENTE: Ing. Héctor Mario Flores

❖ ¿QUÉ ES UN FLUIDO?

Una sustancia existe en tres estados de agregación: sólido, líquido y gas. (A temperaturas muy elevadas también existe como plasma.) Una sustancia en la fase líquida o en la gaseosa se conoce como **fluido**. La diferencia entre un sólido y un fluido se establece con base en la capacidad de la sustancia para oponer resistencia a un esfuerzo cortante (o tangencial) aplicado que tiende a cambiar su forma. Un sólido puede oponer resistencia a un esfuerzo cortante aplicado por medio de la deformación, en tanto que un *fluido se deforma de manera continua bajo la influencia del esfuerzo cortante*, sin importar lo pequeño que sea. Sabemos que un esfuerzo es la fuerza por unidad de área, y el esfuerzo de corte es la fuerza paralela a una superficie, distribuida en toda la superficie, dividido por dicha área: $\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{A}}$



Para un solido $\boldsymbol{\alpha = constante}$
Para un fluido $\boldsymbol{\alpha = varia}$

Deformación de una goma para borrar colocada entre dos placas paralelas bajo la influencia de una fuerza cortante. El esfuerzo cortante que se muestra es el que se ejerce sobre la goma; sobre la placa superior actúa un esfuerzo cortante igual pero opuesto.

Por lo tanto, podemos definir un fluido como, ***una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo cortante***. Cuando un fluido se encuentra en reposo, no pueden existir esfuerzos cortantes. Algunas sustancias como el vidrio se clasifican técnicamente como fluidos. Sin embargo, la proporción de deformación de un vidrio a temperaturas normales es tan pequeña que es impráctico considerarlo como un fluido.

Características de un fluido:

- Puede fluir
- Cambia de forma
- No resiste fuerzas tangenciales
- Puede ser liquido o gas

“Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de una fuerza cortante aplicada o esfuerzo”

❖ ESFUERZO CORTANTE EN FLUJO LAMINAR

El esfuerzo cortante que actúa sobre un fluido depende del tipo de flujo existente. En el *flujo laminar*, el fluido fluye en capas lisas o laminas y el esfuerzo cortante es el resultado de la acción microscópica (no observable) de las moléculas. El *flujo turbulento*, se caracteriza por las grandes fluctuaciones observables en las propiedades del fluido y del flujo siendo el esfuerzo cortante el resultado de estas fluctuaciones.

❖ ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE NEWTON

En un sólido, la resistencia a la deformación es el modulo de elasticidad. El módulo de corte de un sólido elástico esta dado por:

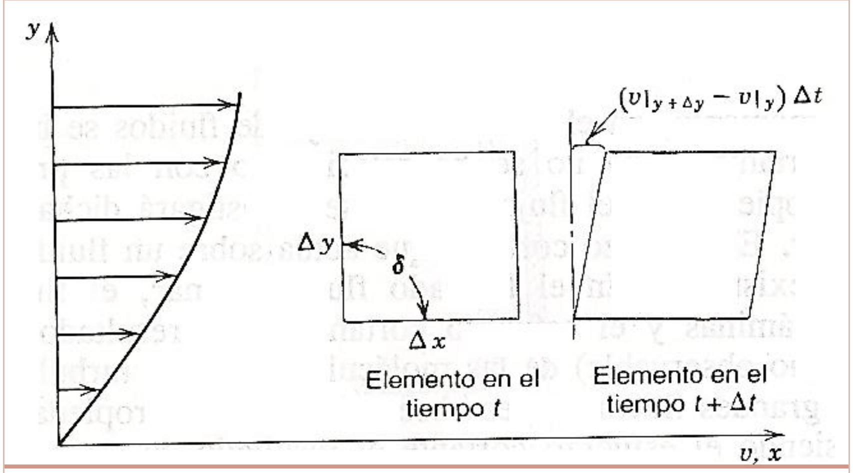
$$\text{Modulo de corte} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformacion cortante}}$$

Existe una relación similar que relaciona el esfuerzo cortante en un flujo paralelo laminar, con una propiedad del fluido. Esta relación es la Ley de Viscosidad de Newton:

$$\text{Viscocidad} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{rapidez de deformacion cortante}} = \frac{\tau}{\left({}^{dv}/_{dy}\right)} = \frac{\tau}{\gamma} \quad \boxed{\mathbf{1}}$$

La **viscosidad** es la propiedad de un fluido para resistir la rapidez con la que se lleva a cabo la deformación cuando actúan fuerzas cortantes sobre él. Como una propiedad del fluido, la viscosidad depende de la temperatura, la composición y presión del fluido, pero es independiente de la rapidez de deformación cortante.

En la siguiente figura se puede apreciar, la rapidez de deformación en un fluido simple. El flujo paralelo al eje x deformara el elemento si la velocidad, en la parte superior de dicho elemento, es diferente de la velocidad en su parte inferior.



Deformación de un elemento de fluido

La rapidez de velocidad cortante en un punto puede definirse como $-\frac{d\delta}{dt}$. En la figura se puede ver que:

$$-\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{dt}} = -\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta t\to 0}\frac{(\delta_{t+\Delta t}-\delta_t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta t\to 0}\left(\frac{\left\{{}^{\pi}\!/_{2} - \arctan\left[\left(v_{y+\Delta y}-v_y\right){}^{\Delta t}\!/_{\Delta y}\right]\right\} - {}^{\pi}\!/_{2}}{\Delta t}\right)$$

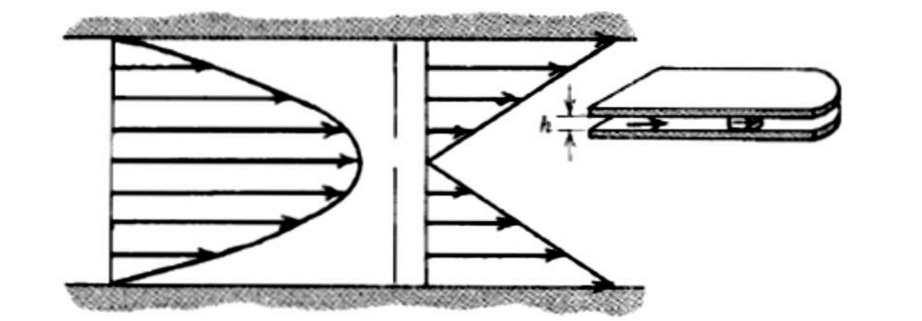
En el límite:

$$-\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dy}} = \text{rapidez de deformacion cortante} \quad \boxed{2}$$

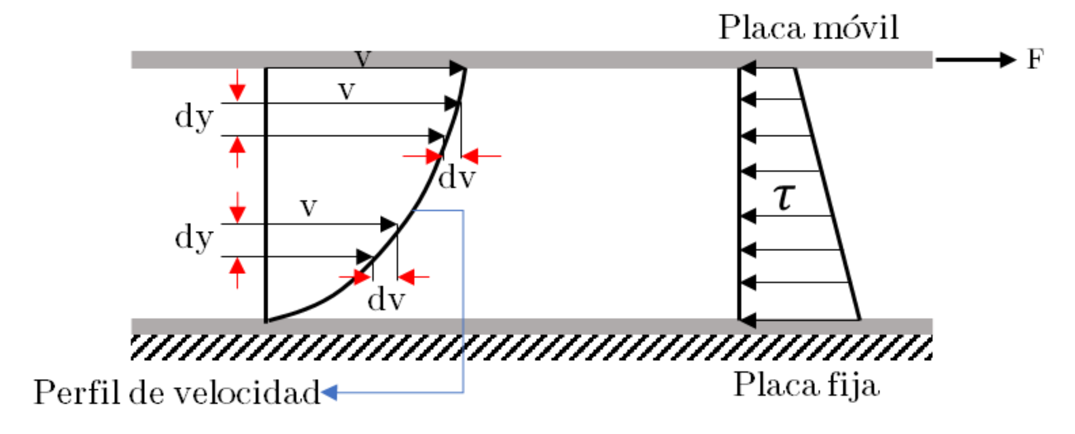
Si se combinan las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ y llamando μ a la viscosidad, podemos escribir la ley de Newton que corresponde a la viscosidad en la siguiente forma:

$\boldsymbol{\tau = \mu\frac{dv_x}{dy}}$	La "Ley de viscosidad de Newton" establece que la Fuerza por unidad de Área es proporcional a la disminución de la velocidad V con la distancia Y. La constante de proporcionalidad μ se denomina viscosidad del fluido.

El perfil de velocidad, en este caso es parabólico; así como la deformación cortante es proporcional a la derivada de la velocidad, el esfuerzo cortante varia en forma lineal.



Perfiles de la velocidad y del esfuerzo cortante para el flujo entre dos placas paralelas



Perfil de velocidad y esfuerzo cortante para el flujo entre dos placas una móvil y la otra fija

Los fluidos que cumplen con la ley de viscosidad de Newton se denominan fluidos newtonianos.

La **viscosidad** es una propiedad importante de los fluidos, se manifiesta cuando el fluido está en movimiento, ya que se define como la resistencia a la deformación. Se representa con el símbolo μ, y sus unidades en el sistema internacional son: $\frac{N \cdot s}{m^2}$ o $\frac{kg}{m \cdot s}$.

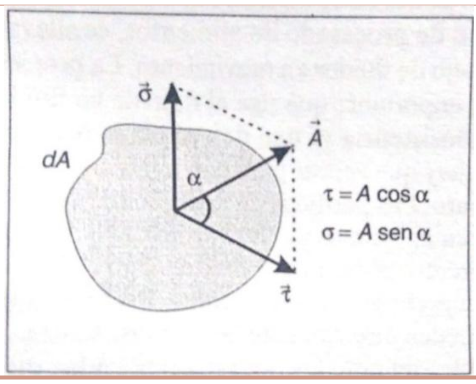
❖ REOLOGÍA

La *Reología* se define como la *ciencia que estudia el flujo y la deformación de la materia en general*.

Cuando la materia se encuentra sometida a la acción de fuerzas externas se pueden presentar dos casos extremos de comportamiento:

a) *Comportamiento elástico*: La aplicación de fuerzas externas provoca una deformación y un cambio de volumen de la materia, realizándose un trabajo que se acumula como energía interna de deformación. Estas transformaciones son reversibles, puesto que, cuando las fuerzas externas dejan de actuar, el sistema recupera instantáneamente la forma y dimensiones originales, mientras que la energía acumulada se retoma en forma de trabajo.
b) *Comportamiento viscoso*: En este caso la materia también se deforma bajo la acción de las fuerzas aplicadas, pero el trabajo realizado se disipa completamente en forma de calor. Por ello, cuando la acción de dichas fuerzas cesa, el estado de deformación permanece.

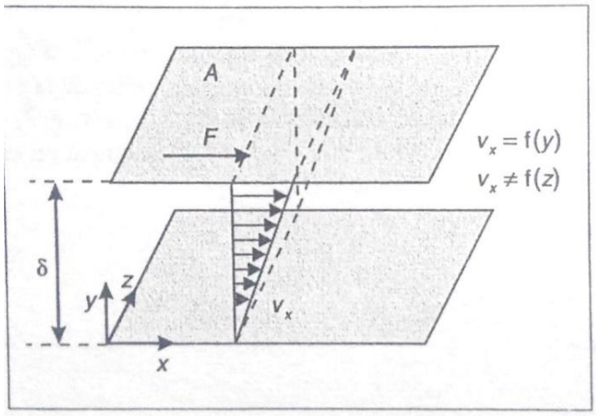
Consideremos una superficie sobre la que se aplica una fuerza. Se denomina *tensión* ($\vec{A}$) al cociente entre la fuerza aplicada y el área de dicha superficie. Tanto la fuerza como la tensión son magnitudes vectoriales, siendo necesario especificar su módulo, dirección y sentido. Lógicamente, la dirección y el sentido de ambas magnitudes son coincidentes. La tensión se puede desglosar en dos componentes, una perpendicular a la superficie que se denomina *tensión normal* (σ) y otra comprendida en el plano que pasa por esa superficie y que recibe el nombre de *tensión tangencial o rasante* (τ).



Componente de la tensión que actúa sobre un elemento diferencial de superficie.

El comportamiento de los fluidos es viscoso cuando se aplican fuerzas o tensiones tangenciales. Los fluidos se definen convencionalmente como aquellas sustancias que se deforman y fluyen continuamente al aplicar una fuerza tangencial por pequeña que ésta sea. Por ello, las tensiones tangenciales son las que se tienen en cuenta al estudiar el comportamiento reológico de los fluidos. No obstante, existen determinados tipos de fluidos, que también presentan comportamientos plásticos y viscoelásticos, recibiendo los restantes para diferenciarlos el nombre de fluidos viscosos puros.

Se analiza a continuación el sistema representado en la siguiente figura, constituido por un fluido situado entre dos placas paralelas. La placa inferior permanece estacionaria, mientras que la superior se desplaza en la dirección x con una velocidad constante (V) debido a la aplicación de una fuerza rasante F. El rozamiento entre el fluido y dicha superficie provoca un desplazamiento del mismo en la dirección x, generándose un perfil de velocidad en el seno del mismo; la capa longitudinal de fluido en contacto con la placa inferior ($y = 0$) no se desplaza, mientras que la lámina de fluido en las proximidades de la placa superior ($y = \delta$) se mueve con velocidad V.



Perfil de velocidad a través de una capa de fluido situada entre dos placas paralelas: inferior estática, superior en movimiento.

En el espacio comprendido entre ambas placas, la velocidad de cada elemento de fluido (velocidad local) tendrá un valor intermedio entre 0 y V. Si el espaciado entre las placas (δ) es suficientemente pequeño, el perfil de velocidad se puede considerar lineal. Además, si la velocidad V no es muy elevada, el fluido se desplazará en régimen laminar, sin que se produzca mezcla transversal de unas láminas de fluido con otras.

La tensión tangencial o rasante aplicada sobre el fluido se puede calcular como:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

El gradiente de velocidad o variación de la velocidad local del fluido con la coordenada espacial "y" se puede determinar como la pendiente del perfil de velocidad:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{V - 0}{\delta}$$

Dado que la tensión tangencial aplicada provoca la formación del gradiente de velocidad, ambas variables han de estar relacionadas:

$$\tau = \Phi\left(\frac{dv_x}{dy}\right) \quad \textbf{ecuacion reologica del fluido}$$

Según cuál sea la función matemática Φ se dará un tipo u otro de comportamiento reológico. El gradiente de velocidad se suele denominar también velocidad de deformación, representándose por γ lo que permite expresar la ecuación reológica independientemente de la geometría del sistema de flujo considerado:

$$\tau = \Phi(\gamma)$$

Las propiedades reológicas de un material se determinan por la aplicación de las leyes básicas de la Mecánica.

ESFUERZO → MATERIAL → DEFORMACIÓN

ESFUERZO → MATERIAL → SOLIDO: SE DEFORMA / LIQUIDO: FLUYE

❖ VISCOSIDAD

Propiedad relacionada con la consistencia de un fluido. Es una propiedad física en el caso de los fluidos newtonianos, mientras que en los fluidos no newtonianos depende de la tensión tangencial aplicada.

La viscosidad de un fluido es una medida de su resistencia a la rapidez de la deformación. La brea y la melaza son ejemplos de fluidos altamente viscosos, el aire y el agua, son ejemplos de fluidos cuya viscosidad es relativamente baja.

Las dimensiones de la viscosidad se pueden obtener a partir de la relación de Newton para la viscosidad:

$$\mu = \frac{\tau}{\left({}^{dv}/_{dy}\right)}$$

O, en forma dimensional:

$\frac{\mathbf{F}/_{\mathbf{L^2}}}{(\mathbf{L}/_{\mathbf{t}})(\mathbf{1}/_{\mathbf{L}})} = \frac{\mathbf{Ft}}{\mathbf{L^2}} \quad [\mathbf{Ns/m^2}]$	**F: fuerza** **L: longitud** **t: tiempo**

Si se usa la segunda Ley d Newton para relacionar a la masa con la fuerza ($F = {}^{\mathrm{ML}}/_{\mathrm{t}^2}$), se encontrará que las dimensiones de la viscosidad, en el sistema masa-longitud-tiempo, se convierte en ${}^{\mathrm{ML}}/_{t}$.

La razón de la viscosidad a la densidad μ/ρ se denomina viscosidad cinemática y se la denota con el símbolo ν:

$$\nu \equiv \mu/\rho \approx \frac{\mathrm{ML}/_{t}}{M/_{L^3}} = \frac{L^2}{t} \quad [\mathrm{m^2/s}]$$

❖ TIPOS DE FLUIDOS

TIPOS DE FLUIDOS

- Fluidos Newtonianos $$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$
- Fluidos No Newtonianos $$\tau \neq \mu \frac{dv}{dy}$$
  - Fluidos Independientes del Tiempo
    - Fluidos Pseudoplásticos
    - Fluidos Dilatantes
    - Fluidos plásticos de Bingham
    - Fluidos plásticos reales o mixtos
  - Fluidos Dependientes del Tiempo
    - Fluidos Tixotrópicos
    - Fluidos Reopécticos
  - Fluidos Viscoelásticos

TIPO DE FLUIDO			CARACTERÍSTICAS	EJEMPLOS
NEWTONIANOS			El esfuerzo cortante es proporcional al gradiente de deformación. La constante de proporcionalidad que los relaciona es la viscosidad, que depende de la temperatura (y a veces de la presión) pero no del tiempo ni de la rapidez de deformación.	Casi todos los fluidos simples: agua, aire y otros gases, compuestos orgánicos no poliméricos, aceites (a bajas velocidades de deformación)
NO NEWTONIANOS	Independientes del tiempo	Plástico de Bingham (Bingham plastic)	Muestra un esfuerzo de cedencia: se comporta como sólido hasta que se alcanza el esfuerzo de cedencia y luego se comporta similar a un fluido newtoniano	Pasta de dientes, arcilla húmeda, mayonesa, crema batida, algunos lodos
		Pseudoplástico (shear thinning)	La viscosidad aparente disminuye al aumentar la rapidez de deformación	pulpa de papel en agua, algunas pinturas, hielo, sangre, jarabes, melaza, gel para el cabello, soluciones de polímeros de alto peso molecular
		Dilatante (shear thickening)	La viscosidad aparente aumenta al aumentar la rapidez de deformación	suspensiones de almidón en agua, arena movediza
	Dependientes del tiempo	Tixotrópicos (thixotropic)	La viscosidad aparente disminuye respecto al tiempo, al mantener una rapidez de deformación constante	algunas arcillas, pinturas, catsup, yogurt, líquido sinovial, algunos geles y coloides
		Reopécticos (rheopectic)	La viscosidad aparente aumenta respecto al tiempo al mantener una rapidez de deformación constante (mucho más raro)	algunos lubricantes, suspensiones de yeso, tintas de impresión
		Viscoelásticos (viscoelastic)	Recobran parcialmente su forma al eliminar el esfuerzo aplicado	polímeros, metales a altas temperaturas, ligamentos y tendones

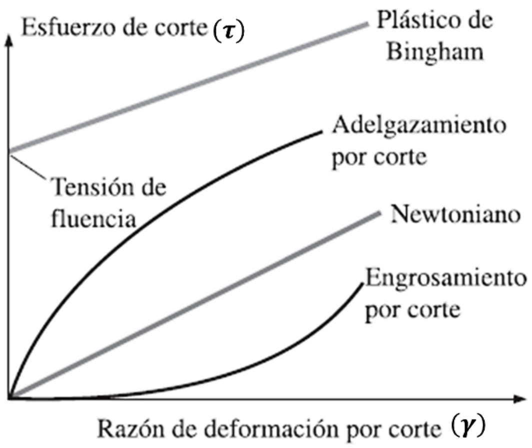
❖ FLUIDOS NEWTONIANOS

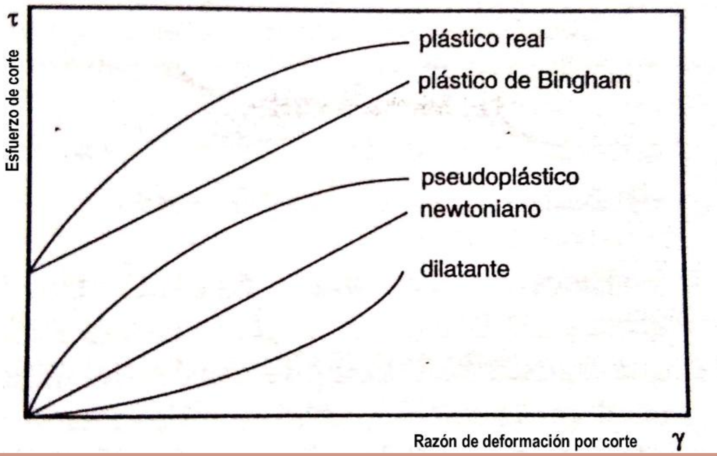
Son aquellos en los que la tensión tangencial es direct*amente proporcional a la *velocidad de deformación* (γ), cumpliéndose la ley de Newton de la viscosidad.

$\tau = \mu\, \gamma$	• **μ: Viscosidad** • **τ: esfuerzo cortante o tensión tangencial** • **γ: velocidad de deformación o rapidez de deformación cortante o gradiente de velocidad**

Los fluidos newtonianos son fluidos cuya viscosidad puede considerarse constante en el tiempo.

La representación gráfica $\tau - \gamma$ para un fluido newtoniano es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y cuya pendiente es la viscosidad del fluido.





Comportamiento reológico de fluidos: esfuerzo de corte como función de la razón de deformación por corte. Curvas reológicas de fluidos independientes del tiempo.
***Pseudoplastico o adelgazamiento por corte, Engrosamiento por corte o dilatante.**

Los fluidos newtonianos cumplen con la ley de viscosidad de Newton.

El comportamiento newtoniano se presenta en casi todos los líquidos ordinarios como el agua, disoluciones acuosas de concentración no muy elevada y compuestos orgánicos de peso molecular bajo o moderado. También es característico de la mayoría de los gases si no se encuentran a altas presiones.

Ejemplos: agua, aire, aceite, lubricantes, combustibles, entre otros.

"Los fluidos para los que el esfuerzo de corte es linealmente proporcional a la razón de deformación por corte, se denominan fluidos newtonianos".

❖ FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Son fluidos en los que la relación $\tau - \gamma$ no se ajusta a la ley de viscosidad de Newton. Tienen un comportamiento anómalo como consecuencia de su complejidad a nivel macroscópico. Suelen ser líquidos de naturaleza polimérica o están constituido por dispersiones de partículas solidas en el seno de un líquido. También pueden tratarse de emulsiones de dos fases liquidas inmiscibles. Cuando un fluido de estas características se encuentra sometido a la acción de tensiones tangenciales, se suelen producir cambios significativos en su microestructura, lo que a nivel macroscópico se traduce en una variación de la viscosidad del fluido en función de la intensidad de la tensión rasante aplicada. Por ello, en los fluidos no newtonianos *la viscosidad no es una propiedad física, denominándose viscosidad aparente al cociente entre la tensión tangencial y la velocidad de deformación*:

$\mu_A = \dfrac{\tau}{\gamma}$ $\boxed{1}$	• **μ_A: Viscosidad aparente** • **τ: esfuerzo cortante o tensión tangencial** • **γ: velocidad de deformación o rapidez de deformación cortante o gradiente de velocidad**

La viscosidad aparente depende de las mismas variables que la viscosidad en fluidos newtonianos, pero además es función de la tensión tangencial o de la velocidad de deformación y también puede depender del tiempo de aplicación de esta última. La viscosidad aparente es la viscosidad real o viscosidad verdadera observada.

"Los fluidos donde los esfuerzos de corte no se relacionan linealmente con la razón de deformación por corte se llaman fluidos no newtonianos".

Los fluidos no newtonianos se clasifican en tres grandes grupos:

- Fluidos independientes del tiempo.
- Fluidos dependientes del tiempo.
- Fluidos viscoelásticos.

Fluidos independientes del tiempo

La ecuación reológica de este tipo de fluidos y, por tanto, su viscosidad aparente no depende de la duración del tiempo de actuación de la tensión tangencial, ya que los cambios que provoca esta última se desarrollan de forma prácticamente instantánea.

Existen diferentes categorías de fluidos independientes del tiempo según la forma de la curva $\tau - \gamma$, como se vio en la figura de las curvas reológicas:

- ***Fluidos pseudoplásticos o fluidos de adelgazamiento por corte:*** La relación $\tau - \gamma$ se ajusta a una curva cóncava respecto del eje de abscisas y que pasa por el origen de coordenadas. *La viscosidad aparente disminuye al aumentar la tensión tangencial aplicada o la velocidad de deformación*. El origen de esta variación suele deberse a que la fuerza externa provoca un descenso en la intensidad de las fuerzas de cohesión entre moléculas o partículas. También, puede suceder que los agregados de partículas se rompan liberando el líquido que tenían ocluido (obturado o tapado). Todos estos fenómenos tienden a disminuir el rozamiento, la consistencia y, por tanto, la resistencia al flujo. Los fluidos pseudoplásticos son los más frecuentes dentro de los fluidos no newtonianos. Ejemplos: champú, salsas, mostaza, pintura, suspensiones acuosas de arcilla, etc.
- ***Fluidos dilatantes:*** La relación $\tau - \gamma$ conduce a una curva convexa respecto del eje de abscisas que pasa por el origen de coordenadas. Se caracterizan porque *la viscosidad aparente aumenta con el gradiente de velocidad*. Este tipo de comportamiento se presentan en suspensiones con una elevada concentración de sólidos, de forma que la aplicación de la tensión tangencial origina la expulsión del líquido situado entre las partículas sólidas, disminuyendo la lubricación y aumentando el rozamiento. Ejemplos: suspensiones concentradas de almidón, dióxido de titanio (TiO_2) y de arena húmeda.

  Tanto los fluidos pseudoplásticos como los dilatantes se describen mediante la misma ecuación reológica, denominada *ley de la potencia*:

$\boldsymbol{\tau = k\,\gamma^n}$ $\boxed{2}$	k: índice de consistencia n: índice de comportamiento • Si $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{1} \Rightarrow$ fluido pseudoplástico • Si $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{1} \Rightarrow$ fluido dilatante • Si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1} \Rightarrow$ fluido newtoniano

  La ley de la potencia se puede linealizar tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$\log \tau = \log k + n \ \log \gamma$$

  Por lo que la representación grafica $\log \tau - \log \gamma$ es una línea recta de pendientes n y ordenada en el origen $\log k$.

  La viscosidad aparente de un fluido pseudoplástico o dilatante se puede expresar en función de la velocidad de deformación combinando las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$:

$$\boldsymbol{\mu_A} = k\gamma^{n-1}$$

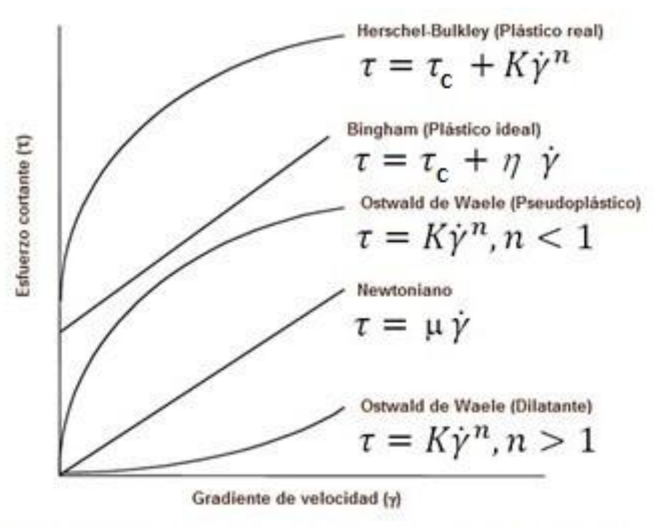
- ***Fluidos plásticos de Bingham***: Para tensiones tangenciales por debajo de un determinado valor crítico, el comportamiento de estos fluidos es similar al de los sólidos elásticos con viscosidad infinita. Una vez que la tensión excede el valor crítico, la variación $\tau - \gamma$ es lineal al igual que en los fluidos newtonianos. La curva reológica de los fluidos plásticos de Bingham es una recta que no pasa por el origen de coordenadas. Al igual que en los fluidos pseudoplásticos la viscosidad aparente disminuye al aumentar la velocidad de deformación. La existencia de un valor crítico de τ, denominado también *tensión de fluencia*, se debe a que el fluido posee

inicialmente una estructura tridimensional con la suficiente rigidez como para soportar sin deformarse la aplicación de tensiones tangenciales hasta una determinada magnitud.
El comportamiento reológico de este tipo de fluidos se describe matemáticamente mediante el modelo de Bingham:

$\boldsymbol{\gamma = 0; \text{si } \tau < \tau_C}$ $\boldsymbol{\tau = \tau_C + \eta\, \gamma; \text{si } \tau \geq \tau_C}$	$\boldsymbol{\tau_C}$: tensión de fluencia $\boldsymbol{\eta}$: rigidez o viscosidad plástica. **n=1**

El parámetro τ_C representa la ordenada en el origen y η la pendiente de la recta, en la gráfica $\tau - \gamma$.

- ***Fluidos plásticos reales o fluidos mixtos***: Sus propiedades reológicas son muy parecidas a las de los anteriores, presentando también un valor crítico o de fluencia de la tensión tangencial. Se diferencian de éstos en que, una vez superado el valor de τ_C la variación $\tau - \gamma$ es similar a la de un fluido pseudoplástico.
  Los modelos reológicos mas utilizados para describir los fluidos plásticos reales son:
  - → Modelo de Herschel-Bulkley: validos tanto para fluidos newtonianos como para todos los fluidos no newtonianos independientes del tiempo:
    $$\boldsymbol{\tau = \tau_C + k\gamma^n}$$
    La determinación simultanea de los valores τ_C, k y n a partir de datos del tipo $\tau - \gamma$ ha de realizarse mediante métodos de regresión no lineal.
  - → Modelo de Casson: se aplica con frecuencia a fluidos plásticos reales:
    $$\boldsymbol{\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_C} + k\sqrt{\gamma}}$$
    De acuerdo con esta expresión la representación grafica $\sqrt{\tau} - \sqrt{\gamma}$ es una recta de pendiente k y ordenada en el origen $\sqrt{\tau_C}$.



Modelos reológicos independientes del tiempo. Donde τ_c es la tensión de fluencia

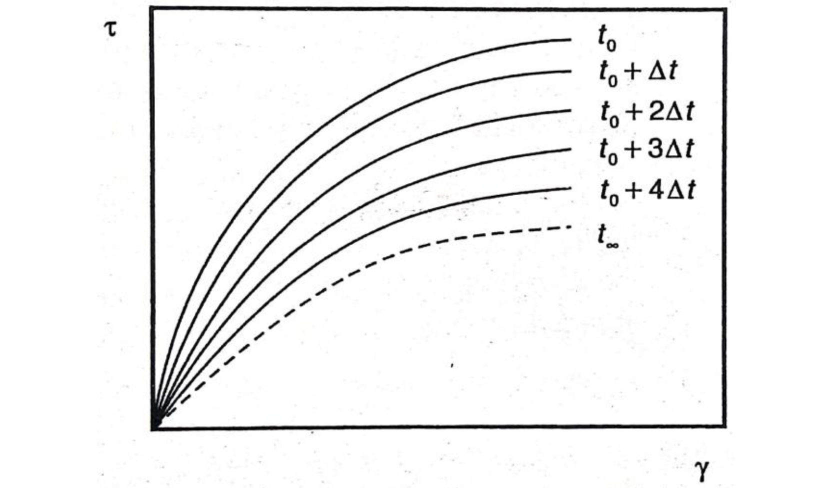
Fluidos dependientes del tiempo

En este tipo de fluidos los parámetros reológicos y la viscosidad aparente varían a medida que transcurre el tiempo respecto del momento en el que se inició la aplicación de la tensión tangencial. Ello se debe a que los cambios que provoca dicha tensión en la microestructura del fluido no son instantáneos, sino que se producen paulatinamente a lo largo del tiempo. Como consecuencia, el valor de la viscosidad aparente en un momento dado depende de la historia reológica del fluido.

Se clasifican en:

- ***Fluidos tixotrópicos***: La viscosidad aparente disminuye con la duración del esfuerzo aplicado. *La viscosidad aparente disminuye con el tiempo*. De acuerdo a la gráfica $\tau - \gamma$, el esfuerzo cortante decrece con la duración del corte, Ejemplos: yogurt, mayonesa, margarina.
- ***Fluidos reopécticos***: La viscosidad aparente se incrementa con la duración del esfuerzo aplicado. *La viscosidad aparente aumenta con el tiempo*. De acuerdo a la gráfica τ-γ, el esfuerzo cortante se incrementa conforme se incrementa la duración del corte. Ejemplos: yeso, arcilla bentonítica.

En función de la relación $\tau - \gamma$ existente en un tiempo determinado, se pueden dividir en los mismos tipos de fluidos que los considerados en el apartado anterior: pseudoplásticos, dilatantes, plásticos de Bingham y plásticos reales. De las diferentes combinaciones posibles, el caso más frecuente es el de fluido tixotrópico y pseudoplástico.



Curvas reológicas de un fluido tixotrópico y pseudoplástico

En el grafico se han representado las curvas reológicas que se obtendrían a diferentes tiempos para un fluido de estas características. La viscosidad aparente disminuye al aumentar tanto el tiempo de aplicación de la tensión tangencial como su intensidad. Para tiempos suficientemente largos (tiempo de relajación, t_∞), se suele llegar a un valor límite de la viscosidad aparente, es decir, el fluido alcanza finalmente un estado de equilibrio.

Una simplificación matemática para describir el comportamiento reológico de este tipo de fluidos, consiste en considerar que las influencias del tiempo y de la velocidad de deformación se pueden expresar mediante funciones independientes:

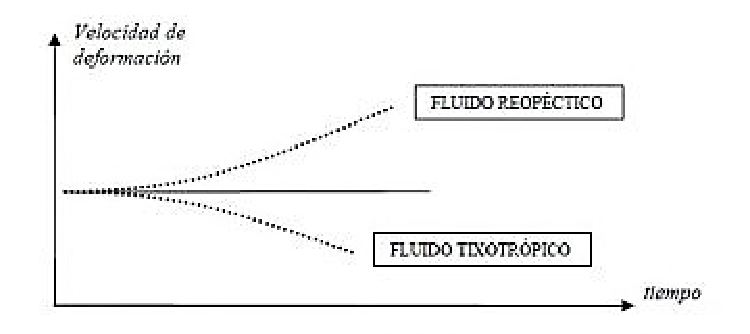
$$\tau = \Phi(\gamma, t) = \Phi_1(\gamma)\Phi_2(t)$$

donde la función $\Phi_1(\gamma)$ que tiene en cuenta la relación $\tau - \gamma$ se expresa tomando como referencia la ecuación reológica correspondiente a tiempo cero o al tiempo de equilibrio. Así, en el caso de fluido tixotrópico y pseudoplástico la ecuación reológica quedaría de la forma:

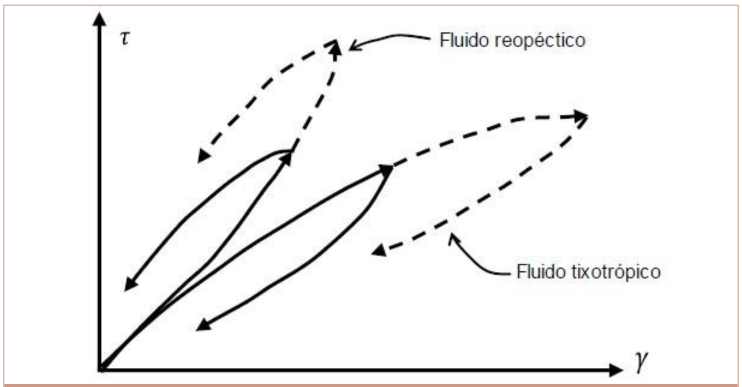
$$\tau = [k\,\gamma^n]_{t_0}\Phi_2(t)$$

siendo t_0 el tiempo de referencia.

En cálculos ingenieriles es frecuente suponer que la consistencia y viscosidad aparente de este tipo de fluidos no depende del tiempo. Así, si el tiempo de duración del ensayo o el tiempo de residencia del fluido en la instalación considerada son muy superiores al tiempo de relajación, no se comete un error demasiado importante si se aplica la ecuación reológica correspondiente al tiempo de relajación.



Variación de la velocidad de deformación con el tiempo

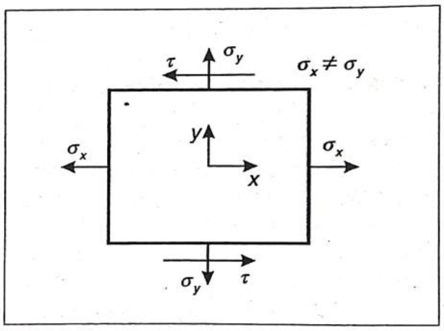


Comportamiento de fluidos dependientes del tiempo

Fluidos viscoelásticos

Un fluido que regresa (completo o parcialmente) a su forma original después que se retira el esfuerzo aplicado se le nombra viscoelástico.

Son fluidos con propiedades intermedias entre el comportamiento elástico y el plástico, es decir, bajo la acción de fuerzas tangenciales parte del trabajo se disipa en forma de calor (componente viscosa) y parte se almacena como energía interna (componente elástica). Se suele presentar en sustancias de naturaleza polimérica como los geles. Ejemplos: polímeros fundidos, soluciones de polímeros, nata, gelatina, helados.



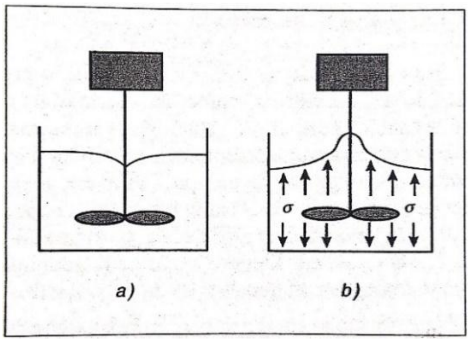
Tensiones que se generan en un elemento plano de fluido viscoelástico sometido a fuerzas tangenciales

En la figura se muestra un elemento plano de un fluido viscoelástico sobre el que se aplica una determinada tensión tangencial τ en la dirección x. La tensión normal que soporta el elemento en esa dirección (σ_x) es la debida a la presión hidrostática, mientras que en la dirección y, la tensión normal (σ_y) es la suma de dos términos, el relacionado con la presión y el originado por él comportamiento viscoelástico. Por tanto, la tensión normal en la dirección y será mayor que en la dirección x. La diferencia entre ambas tensiones normales se toma como referencia para cuantificar reológicamente la componente elástica de este tipo de fluidos, ajustándose a ecuaciones del tipo de la ley de la potencia:

$$(\sigma_y - \sigma_x) = k' \gamma^{n'}$$

siendo γ la velocidad de deformación relacionada con la aplicación de la tensión tangencial y k' y n' los correspondientes parámetros reológicos del modelo.

Las diferencias entre tensiones normales existentes en el seno de los fluidos viscoelásticos son responsables del desarrollo de fenómenos aparentemente anómalos durante su flujo. Así, el denominado efecto Weissenberg se observa al agitar un líquido viscoelástico en el interior de un recipiente. Durante la agitación de un fluido viscoso puro (figura a) se produce una depresión de la superficie del líquido en las proximidades del agitador. Sin embargo, en los líquidos viscoelásticos la existencia de tensiones normales paralelas al eje del agitador produce el efecto contrario: el fluido tiende a ascender por este último (figura b).



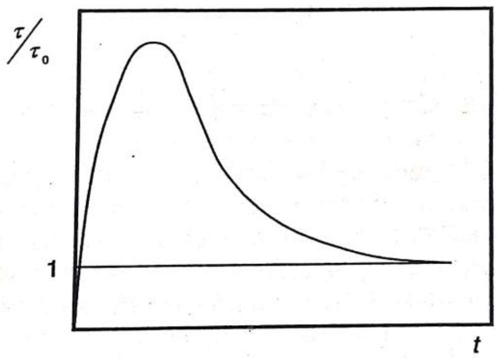
Efecto Weissenberg: a) fluido viscoso puro, b) fluido viscoelástico

Asimismo, cuando un fluido viscoelástico circula por el interior de una conducción, la tensión tangencial debida al rozamiento con las paredes de la misma provoca la aparición de tensiones normales en dirección radial. Como consecuencia, a la salida de la conducción el fluido experimenta una expansión brusca de sus líneas de flujo, a diferencia de lo que sucede en el caso de fluidos viscosos puros.

El comportamiento viscoelástico también se manifiesta en la extrusión de pastas, cuando se producen modificaciones en la forma y tamaño, cuando finaliza la operación.

El análisis de los fluidos viscoelásticos se complica todavía más ya que la reacción elástica no se suele producir de forma instantánea, sino que se desarrolla paulatinamente a lo largo del tiempo. Asimismo, dicha componente elástica se va transformando en componente viscosa, es decir, la energía acumulada se degrada paulatinamente, disipándose en forma de calor. Esta variación con el tiempo de las propiedades reológicas de los fluidos viscoelásticos explica que en algunas ocasiones se les confunda con fluidos no newtonianos dependientes del tiempo.

Una de las consecuencias del retraso existente en la generación y posterior desaparición de la reacción elástica se manifiesta claramente al comienzo del flujo del fluido, observándose un aumento inicial de la tensión tangencial que soporta el fluido seguido de una disminución paulatina hasta alcanzar un valor de equilibrio. El valor máximo de la tensión tangencial puede llegar a ser entre un 30 y un 300% superior al de la tensión de equilibrio (τ_0).



Desarrollo de tensiones tangenciales durante el flujo de un fluido viscoelástico.

❖ VARIABLES QUE INFLUYEN EN LA CONSISTENCIA DE FLUIDOS

La ***temperatura*** es uno de los factores que mayor efecto tiene sobre las propiedades reológicas de los fluidos. Su influencia depende en primer lugar del estado físico. En los gases la viscosidad aumenta con la temperatura mientras que en los líquidos sucede lo contrario.

Para los líquidos ***newtonianos***, la relación $\mu - T$ se suele expresar mediante una ecuación tipo Arrhenius:

$\boldsymbol{\mu = \mu_0 e^{\left(\frac{E_a}{RT}\right)}}$	• **μ_0 factor preexponencial** • **E_a energía de activación** **Parámetros que proporcionan información sobre la sensibilidad de la viscosidad frente a variaciones de la temperatura.**

si se dispone de varios datos de viscosidad a diferentes temperaturas, dichos parámetros se pueden calcular mediante regresión lineal, una vez tomados logaritmos neperianos en la ecuación anterior:

$$\ln \mu = \ln \mu_0 + \frac{E_a}{RT}$$

En el caso de fluidos ***no newtonianos***, la existencia de varios parámetros reológicos dificulta el establecimiento del efecto de la temperatura. En los fluidos no newtonianos es frecuente relacionar la temperatura con la viscosidad aparente, medida a una determinada velocidad de deformación, mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{\mu_A = \mu_{A0}\, e^{\left(\frac{E_a}{RT}\right)}}$$

Cuando el *fluido está constituido por un disolvente con sólidos en suspensión*, la consistencia aumenta notablemente con la concentración de sólidos (C). En este caso, se han propuesto ecuaciones de tipo potencial que relacionan la viscosidad aparente con la concentración:

$\boldsymbol{\mu_A = \alpha C^{\beta}}$	**β: este parámetro, determinado experimentalmente, suele tener valores superiores a la unidad, es decir, $\beta > 1$**

En el caso de *sustancias de naturaleza polimérica* se ha observado la existencia de una relación de tipo potencial entre la viscosidad aparente y el peso molecular medio del polímero (M):

$$\mu_A = a \cdot M^b \quad \text{a y b parametros a determinar}$$

❖ TIPOS DE FLUJOS DE FLUIDOS

Flujos comprensibles y flujos incompresibles

Un flujo se clasifica como compresible o incompresible, dependiendo del nivel de variación de la densidad del fluido en ese flujo.

- ***Flujos comprensibles***: se dice que el flujo es comprensible *si la densidad varia con la presión*. El flujo de gases se puede considerar incompresible cuando la densidad y, por tanto, la presión se mantiene constantes a lo largo del flujo.
- ***Flujos incompresibles***: se dice que el flujo es incompresible *si la densidad permanece aproximadamente constante a lo largo de todo el flujo*. Los flujos de líquidos son siempre incompresibles, su densidad permanece prácticamente constante incluso cuando la presión cambia durante el flujo.

Los flujos de gases pueden ser compresibles o incompresibles ya que su densidad se ve inmediatamente afectada por variaciones de la presión o de la temperatura.

El límite entre ambos tipos de flujos de gases se puede establecer cuantitativamente mediante el número de Mach:

$\mathbf{Ma} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{c}}$	V: velocidad media del gas o velocidad del flujo c: velocidad del sonido a través del gas **V y c medidas a la misma presión y temperatura**

Si $Ma < 0{,}3$ es valido suponer que el flujo del gas es incompresible.

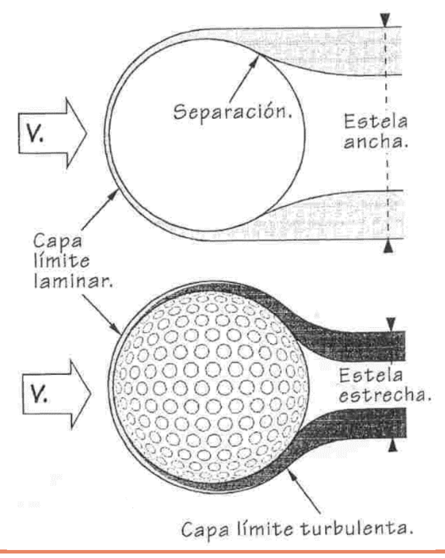
Flujo interno y flujo externo

Un flujo de un fluido se clasifica como interno o externo, dependiendo de si a ese fluido se le obliga a fluir en un canal confinado o sobre una superficie.

- ***Flujo interno***: el fluido se desplaza totalmente rodeado por la superficie sólida. Es el caso de circulación de fluidos por el interior de tuberías y conducciones.
- ***Flujo externo***: el fluido circula alrededor de un sólido sumergido en su seno. Un ejemplo característico es el flujo de gases o líquidos a través de lechos de partículas sólidas.

Por ejemplo, el flujo de agua en un tubo es flujo interno y el flujo de aire sobre una pelota o sobre un tubo expuesto durante un día de viento constante es flujo externo.

Los flujos internos están dominados por la influencia de la viscosidad en todo el campo de flujo. En los flujos externos, los efectos viscosos quedan limitados a la capa límite cercana a las superficies sólidas y a las regiones de la estela corriente abajo de los cuerpos.

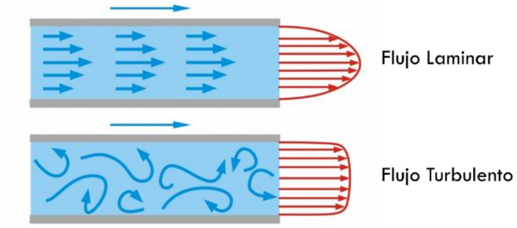


Estela en una esfera lisa vs una esfera rugosa

Flujo laminar y flujo turbulento

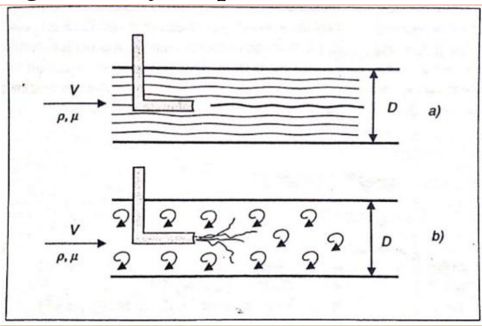
- ***Flujo laminar***: El movimiento intensamente ordenado de un fluido, caracterizado por capas no-alteradas de éste se conoce como laminar. La palabra laminar proviene del movimiento de partículas juntas adyacentes del fluido, en "láminas". El flujo de los fluidos intensamente viscosos, como los aceites a bajas velocidades, por lo general es laminar.
- ***Flujo turbulento***: El movimiento intensamente desordenado de un fluido, que es común se presente a velocidades altas y se caracteriza por fluctuaciones en la velocidad, se llama turbulento. El flujo de fluidos de baja viscosidad, como el aire, a velocidades altas es por lo común turbulento.

El régimen de flujo influye significativamente en la potencia requerida para el bombeo.



Experimento de Reynolds

En función de cuál sea el mecanismo a nivel microscópico por el que se desarrolla el desplazamiento del fluido, se pueden distinguir diferentes tipos de flujos o regímenes de circulación. Este hecho fue puesto de manifiesto por Reynolds. Al inyectar un colorante en el seno de una corriente líquida que circula por el interior de una conducción (se muestra en la siguiente figura), observó que la persistencia o no de un hilo de colorante a lo largo del flujo dependía de la velocidad media del fluido:



Experimento de Reynolds:
a) Régimen laminar, b) Régimen turbulento.

- Para valores bajos de $V: velocidad$ (figura a), el hilo de colorante conservaba su identidad a lo largo de la conducción y se desplazaba en línea recta, lo que indica que el líquido se mueve en forma de láminas o capas longitudinales sin que exista transporte ni mezcla en dirección transversal. Este tipo de flujo se denomina ***régimen laminar***.
- Al aumentar $V: velocidad$, se alcanzaba un valor crítico para el cual las capas longitudinales eran sustituidas por remolinos que terminaban por provocar la completa desaparición del hilo de colorante (figura b). Además del movimiento en dirección longitudinal, existe una importante mezcla transversal. Este tipo de flujo recibe el nombre de ***régimen turbulento***. En un punto determinado, se forman continuamente remolinos que, a continuación, se rompen para originar otros más pequeños. Como consecuencia, la presión, así como la magnitud y dirección de la velocidad del fluido en ese punto, fluctúan continuamente a lo largo del tiempo.

❖ NÚMERO DE REYNOLDS

Para Fluidos Newtonianos

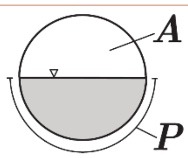
El paso de régimen laminar a turbulento no sólo depende de la velocidad del fluido, sino que hay que tener en cuenta otras variables como el diámetro de la conducción (D), la densidad (ρ) y la viscosidad (μ) del fluido. Todas ellas se pueden englobar en el número adimensional de ***Reynolds (Re)***:

Número de Reynolds: $$\boldsymbol{Re = \frac{V D_H \rho}{\mu}}$$	V: velocidad del fluido $\boldsymbol{D_H}$: diámetro hidráulico de la conducción $\boldsymbol{\rho}$: densidad $\boldsymbol{\mu}$: viscosidad del fluido

En tuberías el diámetro equivalente D_{eq} está definido por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{D_{eq} = \frac{4\ (\acute{a}rea\ de\ paso)}{Perimetro\ mojado} = \frac{4\,A}{P}}$$

El perímetro mojado es igual a la parte del perímetro del ducto que se encuentra en contacto con el fluido.



Para un tubo de sección circular y que se encuentra lleno de fluido el diámetro equivalente es igual al diámetro del tubo $\Rightarrow \boldsymbol{D_{eq} = D}$.

En el caso de flujo interno de fluidos newtonianos, los intervalos de Re que delimitan cada tipo de régimen de circulación son:

- $\boldsymbol{Re} < 2100 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Régimen\ Laminar}$
- $\boldsymbol{Re} > 8000 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Régimen\ Turbulento}$
- $\boldsymbol{2100} < \boldsymbol{Re} < 8000 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Régimen\ de\ Transición}$

En régimen de transición el mayor o menor grado de turbulencia depende de factores secundarios como pueden ser la rugosidad de la pared de la conducción o la existencia de perturbaciones bruscas del flujo en un momento determinado.

Para Fluidos No Newtonianos

Si el fluido es no newtoniano, el número de Reynolds se define de manera diferente. A continuación, se presenta el numero de Reynolds, para fluidos no newtonianos independientes del tiempo.

- ***Numero de Reynolds para fluidos Plástico de Bingham:***

Numero de Reynolds Para Plásticos de Bingham: $$\boldsymbol{Re = \frac{V D \rho}{\eta}}$$	**V: velocidad del fluido** **D: diámetro de la conducción** **ρ: densidad** **η: viscosidad plástica**

- ***Numero de Reynolds para fluidos Dilatantes, Pseudoplasticos y Plástico Real (modelo Herschel-Bulkley):***

Número de Reynolds generalizado para pseudoplásticos, dilatantes y plásticos reales: $$\boldsymbol{Re_g = \frac{V^{2-n}\,\rho\,D^n}{8^{n-1}\,k}\left(\frac{4\,n}{1+3n}\right)^n}$$	**Re_g: número adimensional de Reynolds generalizado** **n: índice de comportamiento** **V: velocidad media de un fluido** **D: diámetro de la conducción** **ρ: densidad del fluido** **k: índice de consistencia**

Valor Crítico del Número de Reynolds

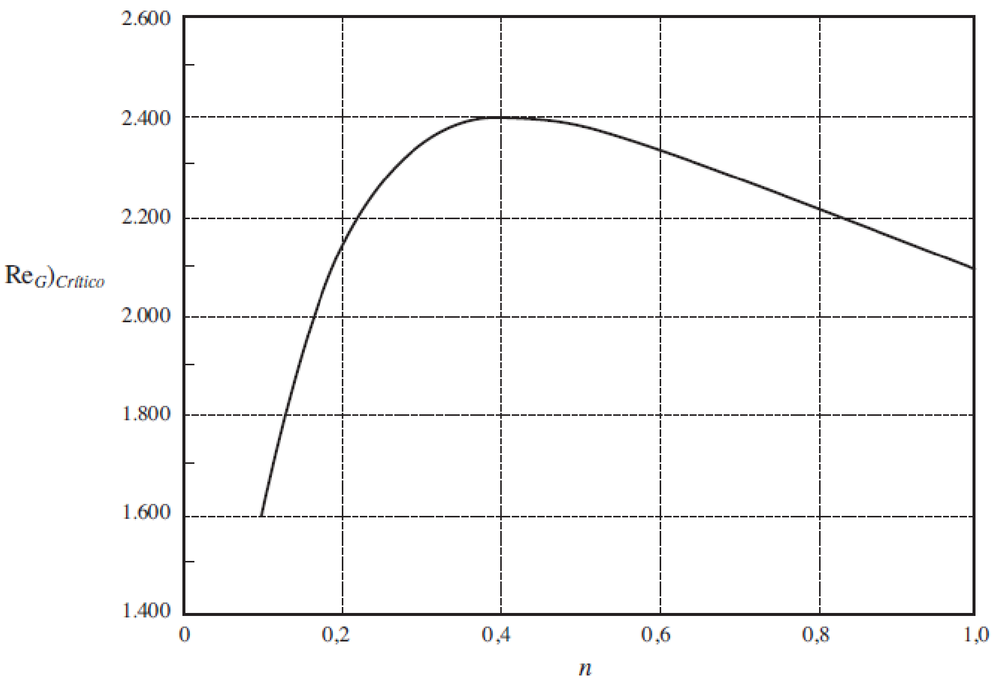
Para fluidos newtonianos se considera que un fluido circula en régimen laminar si el valor del número de Reynolds es inferior a 2.100. Sin embargo, si los fluidos son no newtonianos el criterio a seguir es distinto. Se define el ***valor crítico*** del número o módulo de Reynolds como el valor del mismo a partir del cual el fluido deja de circular en régimen laminar.

- ***Reynolds crítico para fluidos de la ley de potencia (pseudoplástico y dilatantes)***

Para fluidos que cumplen con la ley de potencia. el valor crítico del número de Reynolds está dado por:

Numero de Reynolds generalizado, critico: $$\boldsymbol{Re_{G)Critico} = \frac{6,464\,n}{(1+3\,n)^2\left(\frac{1}{2+n}\right)^{\frac{2+n}{1+n}}}}$$	**n: índice de comportamiento del fluido**

Una representación gráfica de esta ecuación se muestra en la siguiente figura. El valor crítico del número de Reynolds presenta un máximo de 2.400 para un valor del índice de flujo de 0,4. A partir de aquí su valor va disminuyendo hasta 2.100, que es el valor correspondiente a un fluido newtoniano (n = 1).



Variación del número de Reynolds crítico con el índice de flujo, para fluidos de la ley de potencia

- ***Reynolds crítico para fluidos Plástico de Bingham:***

Para plásticos de Bingham es necesario definir un parámetro $\boldsymbol{m}$ que es la relación entre el umbral de fluencia (τ_C) y el valor del esfuerzo cortante que el fluido ejerce sobre la pared (τ_0) de la conducción por la que está fluyendo:

$\boldsymbol{m = \frac{\tau_c}{\tau_0}}$	**m: relación entre el umbral de fluencia y el valor del esfuerzo cortante que el fluido ejerce sobre la pared** **τ_c: tensión tangencial critica o umbral de fluencia** **τ_0: tensión tangencial de rozamiento medida en la pared de la tubería**

El valor del número de Reynolds crítico se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

***Numero de Reynolds de Bingham, critico*:** $\boldsymbol{Re_{B)Critico} = \frac{He}{8\,m_c}\left(1 - \frac{4\,m_c}{3} + \frac{{m_c}^4}{r}\right)}$	**He: numero de Hemstron** **m_c: valor critico de m** **r: radio de la tubería en cualquier posición**

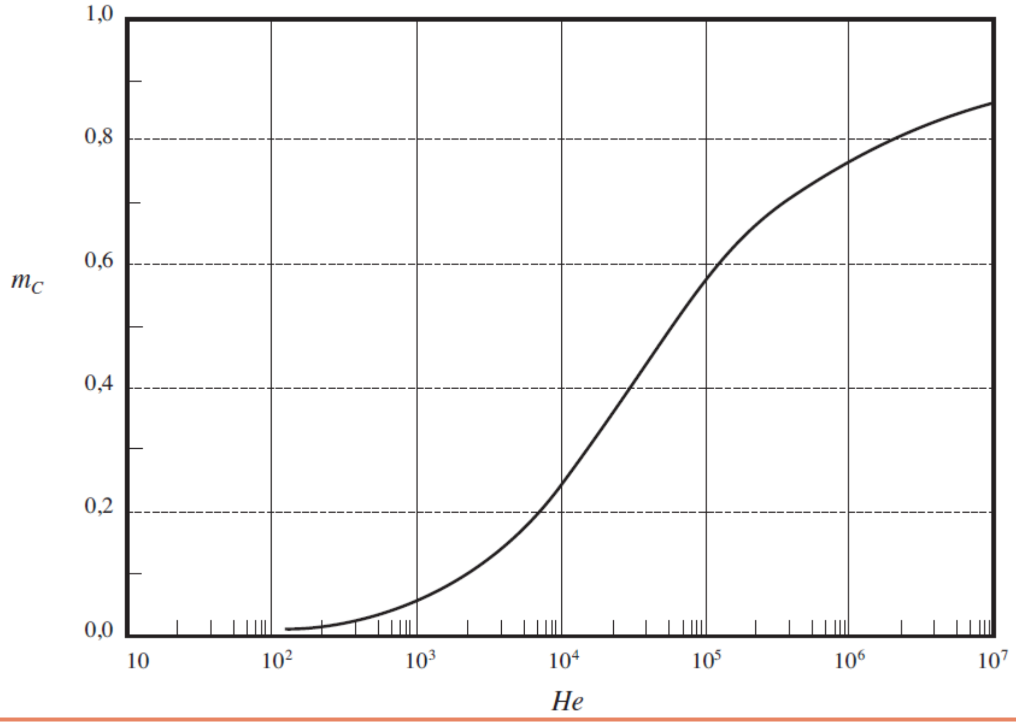
en la que $\boldsymbol{m_C}$ es un valor crítico de $\boldsymbol{m}$, que se obtiene de la siguiente relación:

$\boldsymbol{\frac{m_c}{(1-m_c)^3} = \frac{He}{16.800}}$ $\boxed{a}$	**He: numero de Hedstron** **m_c: valor critico de m**

siendo $\boldsymbol{He}$ el número de Hedstrom, definido por la expresión:

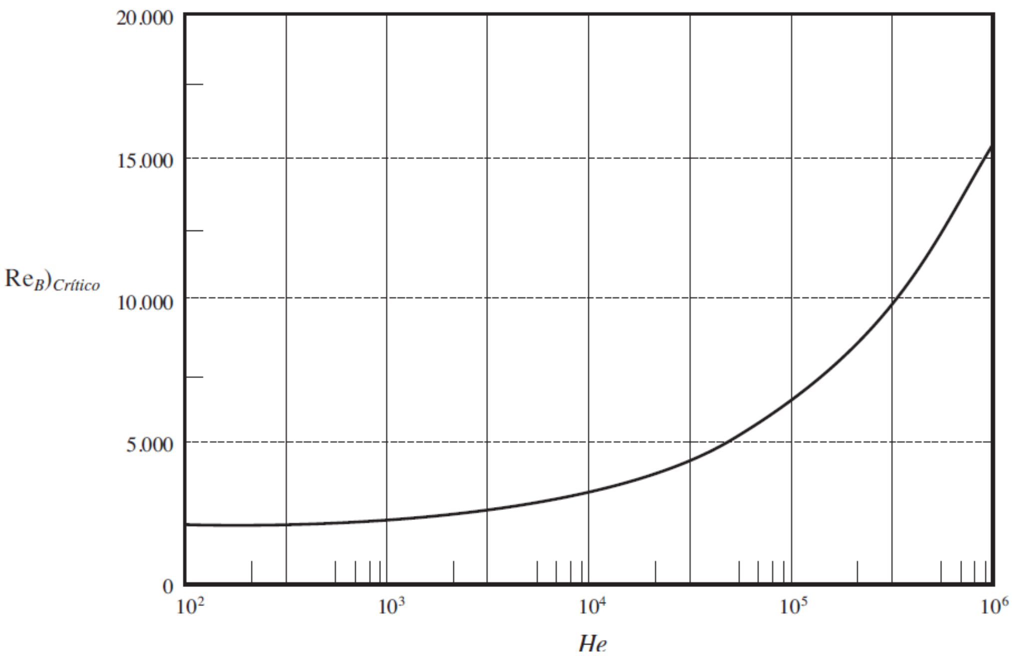
***Numero de Hedstron*:** $\boldsymbol{He = \frac{\rho D^2 \tau_c}{\eta^2}}$	**ρ: densidad** **D: diámetro de la conducción** **τ_c: tensión tangencial critica** **η: viscosidad plástica**

La variación del valor crítico ($\boldsymbol{m_c}$) con el número de Hedstrom correspondiente a la ecuación $\boxed{a}$, está expresada en forma gráfica en la siguiente figura.



Variación m_c con el número de Hedstrom, para plásticos de Bingham

Además, en la siguiente figura se representa la variación del número de Reynolds crítico en función del número de Hedstrom. Se puede observar que para valores altos del umbral de fluencia el valor correspondiente al número de Hedstrom es elevado (se puede observar en la figura que representa la variación de $\boldsymbol{m_c}$ con el número de Hedstrom), lo que implica que el número de Reynolds también lo sea ($\boldsymbol{Re_{B)Critico}}$). Es decir, es muy difícil que en estos casos el fluido pueda circular en régimen turbulento.

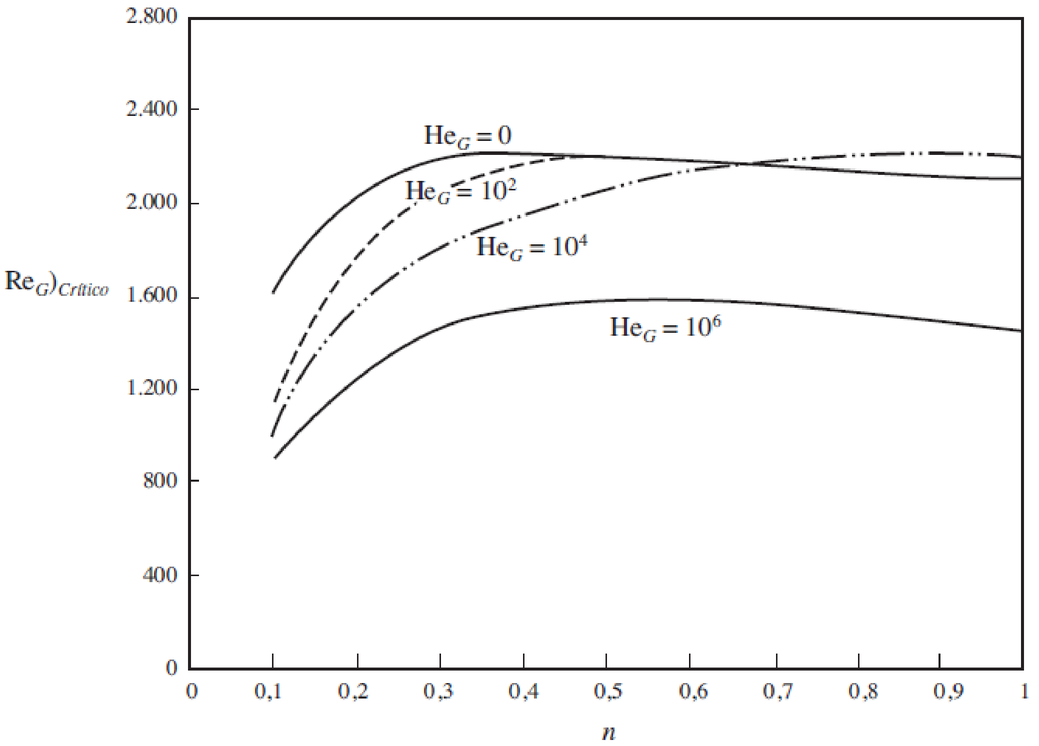


Variación del número de Reynolds crítico con el número de Hedstrom, para plásticos de Bingham

- ***Reynolds crítico para fluidos Herschel-Bulkley:***

Para fluidos del tipo Herschel-Bulkley la obtención del valor crítico del número de Reynolds generalizado puede obtenerse en función del número de Hedstrom y del índice de flujo, tal como se puede apreciar en la figura siguiente. Para el uso de esta gráfica es importante resaltar que debe calcularse el número de Hedstrom generalizado, definido por la expresión:

Número de Hedstrom generalizado: $$He_g = \frac{D^2\,\rho}{k}\left(\frac{\tau_0}{k}\right)^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}$$	**He_g: Hedstrom generalizado** **n: índice de comportamiento** **D: diámetro de la conducción** **ρ: densidad del fluido** **k: índice de consistencia** **τ_0: tensión tangencial de rozamiento medida en la pared de la tubería**



Número de Reynolds crítico en función del número de Hedstrom y del índice de flujo para fluidos Herschel-Bulkley.

❖ FLUJO POR EL INTERIOR DE CONDUCCIONES

Desde el punto de vista del diseño de las instalaciones, uno de los objetivos principales es la determinación de la energía que hay que comunicar al fluido para transportarle de un punto a otro con un determinado caudal. No obstante, en algunos sistemas la variable a estimar puede ser otra: caudal de fluido en circulación, diámetro de la tubería o valor de la presión existente en algún punto de la instalación. Las herramientas fundamentales que se utilizan en la resolución de este tipo de problemas son las ecuaciones de conservación de materia y energía y las leyes que rigen el rozamiento entre fluidos y sólidos.

Perfiles de velocidad

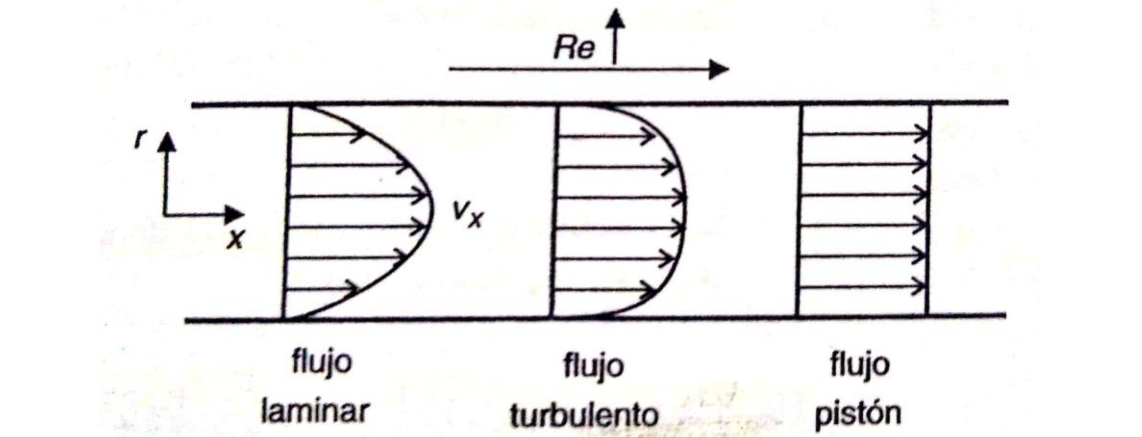
El termino velocidad indica la velocidad promedio del flujo, que se calcula a partir de la ecuación de continuidad:

$$V = \frac{Q_v}{A}$$	**V: velocidad media de un fluido** **Q_v: caudal volumétrico** **A: área de la sección transversal de la tubería**

Sin embargo, en algunos casos, se debe determinar la velocidad en un punto dentro de la corriente de flujo. Esto se debe a que la magnitud de velocidad no es uniforme a través de la sección del conducto, y la forma en que la velocidad varia depende del tipo de flujo: turbulento o laminar, además del tipo de fluido: newtoniano y no newtoniano.

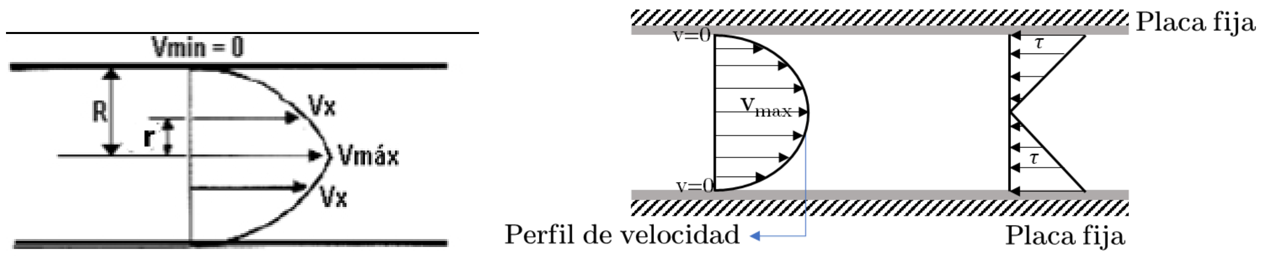
El rozamiento que experimenta el fluido con las paredes de la conducción o el que se produce entre diferentes porciones de fluido provoca la existencia de un perfil de velocidad en cada sección transversal. En tuberías cilíndricas, la velocidad de cada elemento de fluido (velocidad local) varía con la coordenada radial, siendo nula en los puntos de contacto con la superficie sólida y máxima en el centro de la conducción. La forma de este perfil de velocidad depende del régimen de circulación, de la geometría de la conducción y de las propiedades reológicas del fluido.

Perfil de velocidad para fluidos Newtonianos



Perfil de velocidad durante el flujo de un fluido newtoniano para el interior de una conducción

En ***régimen laminar***, el perfil es parabólico pudiendo describirse mediante una ecuación de segundo grado:



Perfil de velocidad en régimen laminar. Vmin=0 en la pared

$$v_x = (v_x)_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$ $$(v_x)_{max} = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)$$	• v_x: **velocidad a una distancia radial r del centro** • $(v_x)_{max}$: **velocidad máxima en el centro donde r =0** • R: **distancia radial hacia la superficie interior del área circular** • μ: **viscosidad** • $\frac{dP}{dx}$: **gradiente de presión ($(P_2 - P_1/L)$; P: presión, L: longitud)**

la velocidad axial v_x es positiva para cualquier r, y por lo tanto el gradiente de presión axial (dP/dx) debe ser negativo (es decir: la presión debe disminuir en la dirección del flujo debido a efectos viscosos).

En ***régimen turbulento***, el perfil es bastante más achatado como consecuencia de la mezcla transversal que contribuye a homogeneizar las propiedades del fluido en cada sección. aunque la mayor parte del fluido presenta un flujo turbulento, en las proximidades de la superficie sólida se forma una capa de fluido de pequeño espesor con flujo laminar, recibiendo el nombre de *subcapa laminar*. La mayor complejidad del perfil de velocidad en régimen turbulento hace necesario utilizar varias ecuaciones para poder describir por completo dicha curva. El conjunto de expresiones aplicables se conoce con el nombre de ecuación universal de distribución de velocidades:

Para la subcapa laminar: $$v^+ = y^+ \quad \rightarrow \quad \text{si } 0 < y^+ < 5$$	v^+: **velocidad local adimensional** y^+: **número de Reynolds modificado**

Para la capa amortiguadora o zona de transición: $$v^+ = 5 + 5\ln\frac{y^+}{5} \quad \rightarrow \quad \text{si } 5 \le y^+ \le 30$$ Para el núcleo turbulento: $$v^+ = 5{,}5 + 2{,}5\ln y^+ \quad \rightarrow \quad \text{si } y^+ > 30$$	

la velocidad adimensional y el numero de Reynolds modificado, están definido como:

$$v^+ = \frac{(v_x)_{max}}{v^*}$$ $$y^+ = \frac{v^*(R-r)\rho}{\mu}$$	**v^+: velocidad local adimensional** **y^+: número de Reynolds modificado** **v^*: velocidad de rozamiento** **$(v_x)_{max}$: velocidad máxima en el centro donde r =0** **ρ: densidad del fluido** **μ: viscosidad** **R: distancia radial hacia la superficie interior del área circular** **r: radio variable (puede variar desde r=0 hasta r =R)** **(R-r): distancia desde la pared, para una tubería circular**

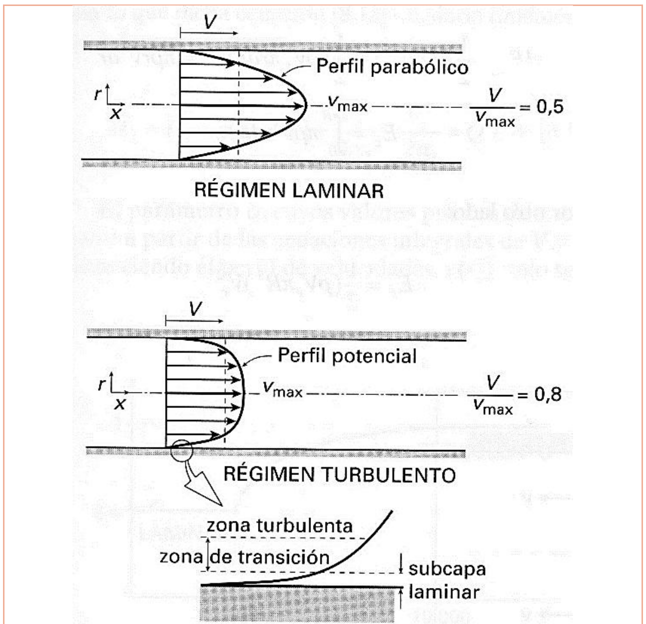
la velocidad de rozamiento (v^*) es calculable a partir de la tensión tangencial de rozamiento en la pared (τ_0), según la expresión:

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$	**v^*: velocidad de rozamiento** **ρ: densidad del fluido** **τ_0: tensión tangencial de rozamiento medida en la pared de la tubería**

En ambos tipos de flujos la velocidad media del fluido se puede obtener por integración del perfil de velocidad local en toda la sección transversal de la conducción (A):

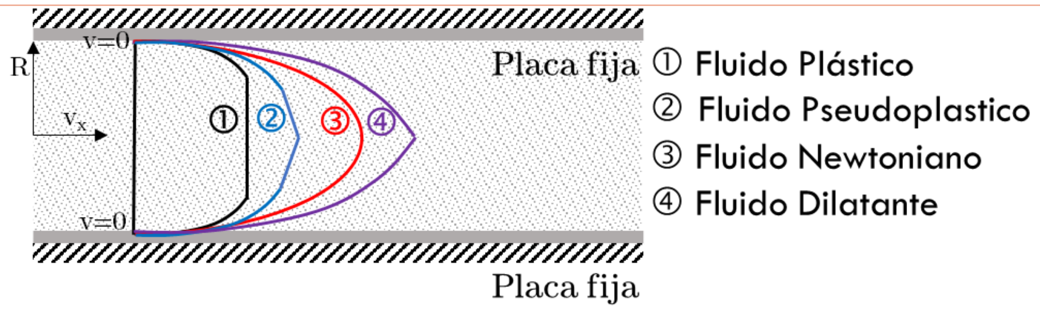
$$V_m = \frac{1}{A}\int_A v_x\, dA$$	**V_m: velocidad media de un fluido** **A: área de la sección transversal de la tubería**

Si se calcula la relación entre la velocidad media y la velocidad local máxima ($V_m/(v_x)_{max}$) los valores que se obtienen son 0,5 y 0,8 para flujos laminar y turbulento, respectivamente, lo que confirma que en el último caso el perfil de velocidad es bastante más plano. En el caso ideal de flujo pistón, la relación anterior sería la unidad de acuerdo con un perfil de velocidad completamente plano.



Perfil de velocidad laminar y turbulento

Perfil de velocidad para fluidos No Newtonianos



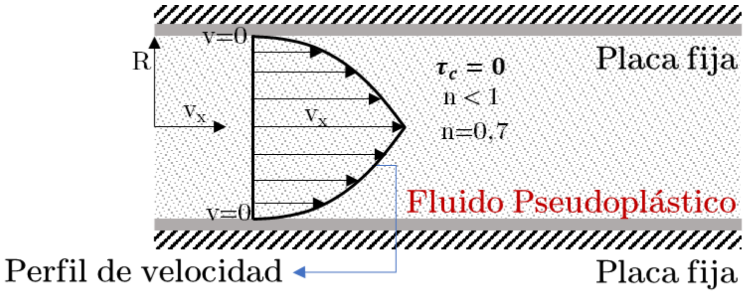
Perfil de velocidad para diferentes tipos de fluidos

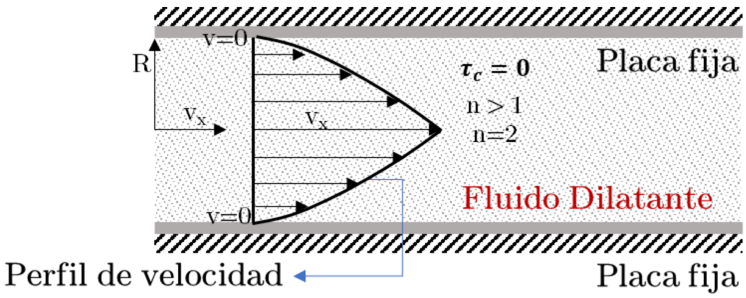
A continuación, se presentan las expresiones que describen el perfil de velocidad para diferentes tipos de fluidos no newtonianos en régimen laminar.

- ***Perfil de velocidad para fluidos pseudoplasticos y dilatantes:***

Fluidos pseudoplásticos y dilatantes (ley de la potencia):

$$\boldsymbol{v_x = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{\Delta P}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}}\left[R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}}\right]}$$



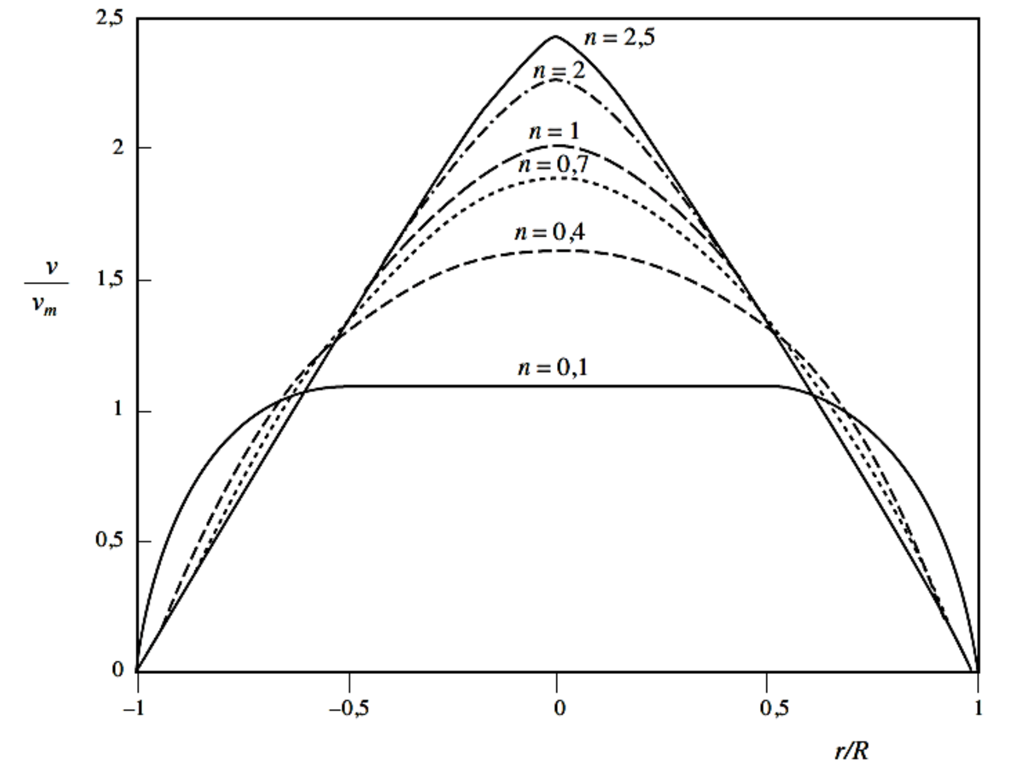


- **v_x: velocidad a una distancia radial r del centro o velocidad local de un fluido en la dirección x**
- ***R*: distancia radial hacia la superficie interior del área circular**
- ***n*: índice de comportamiento del fluido.** *Indica la desviación del comportamiento reológico del fluido con respecto a los fluidos newtonianos, es decir, mientras más se aleje el valor* ***n*** *de la unidad más pronunciadas serán sus características no newtonianas del fluido.*
- ***k*: índice de consistencia.** *Es una medida indirecta de la viscosidad, pero sus unidades dependen de* ***n****. A medida que* ***k*** *aumenta el fluido se hace más espeso o viscoso.*
- **ΔP: diferencia de presiones**
- ***L*: longitud**

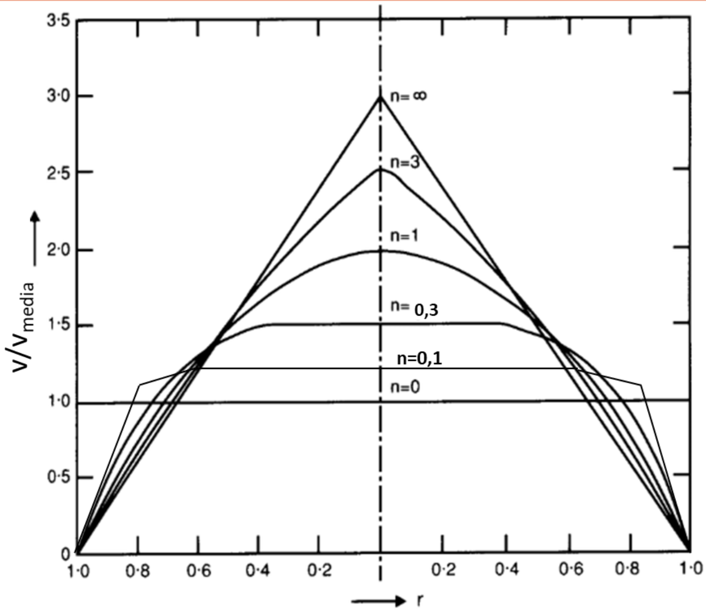
Para fluidos de la ley de potencia, la relación entre la velocidad puntual y media está dada por la ecuación:

$$\frac{v_x}{V_m} = \frac{3n+1}{n+1}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{n+\frac{1}{n}}\right]$$

En la figura siguiente se puede observar la variación del perfil de velocidades adimensional (v_x/V_m) en funcion del radio adimensional (r/R) para este tipo de fluido, perfil que depende del valor que adquiere el índice de flujo. Para $n = 1$ en el que el fluido es Newtoniano, el perfil resultante es parabólico tal como se mencionó anteriormente.



Perfil de velocidades para fluidos de la ley de potencia, en función del índice de flujo



Perfil de velocidad para fluidos que cumplen con la ley de potencia para diferentes valores del índice de comportamiento n

El valor de la velocidad máxima se presenta en el centro de la tubería, y puede ser calculado por:

$$\frac{(v_x)_{max}}{V_m} = \frac{3n+1}{n+1}$$

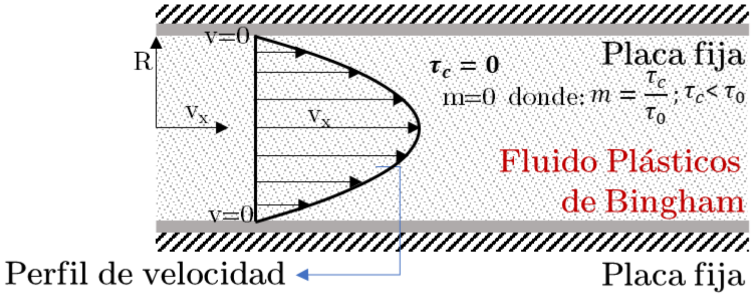
Como se puede apreciar la ecuación para el calculo de la velocidad máxima, es similar a la ecuación anterior a esta, donde se simplifica el termino que contiene al valor $\boldsymbol{r}$, ya que, al calcularse la velocidad máxima, el radio $\boldsymbol{r}$ es igual a cero.

- ***Perfil de velocidad para fluidos Plástico de Bingham:***

En este tipo de fluido se produce una vena central de velocidad máxima, cuyo perfil es recto. El valor del radio $\boldsymbol{r_0}$ para esta vena central es:

$r_0 = \dfrac{2\,\tau_c\,L}{\Delta P}$	**r_0: radio en el perfil recto** **τ_c : umbral de fluencia** **L: longitud** **ΔP: diferencia de presiones**

Para $r_0 \le r \le R$, el perfil de velocidades está dado por:

Fluidos plásticos de Bingham (modelo de Bingham): $v_x = \dfrac{1}{\eta}\left[\dfrac{\Delta P}{4L}(R^2 - r^2) - \tau_c(R - r)\right]$ 	• **v_x: velocidad a una distancia radial r del centro o velocidad local de un fluido en la dirección x** • **R: distancia radial hacia la superficie interior del área circular** • **η: viscosidad plástica** • **ΔP: diferencia de presiones** • **L: longitud** • **τ_c: tensión tangencial critica**

El valor de la velocidad adimensional es función del parámetro que relaciona los esfuerzos cortantes ($m = \tau_c/\tau_0$), por tanto, existen dos expresiones:

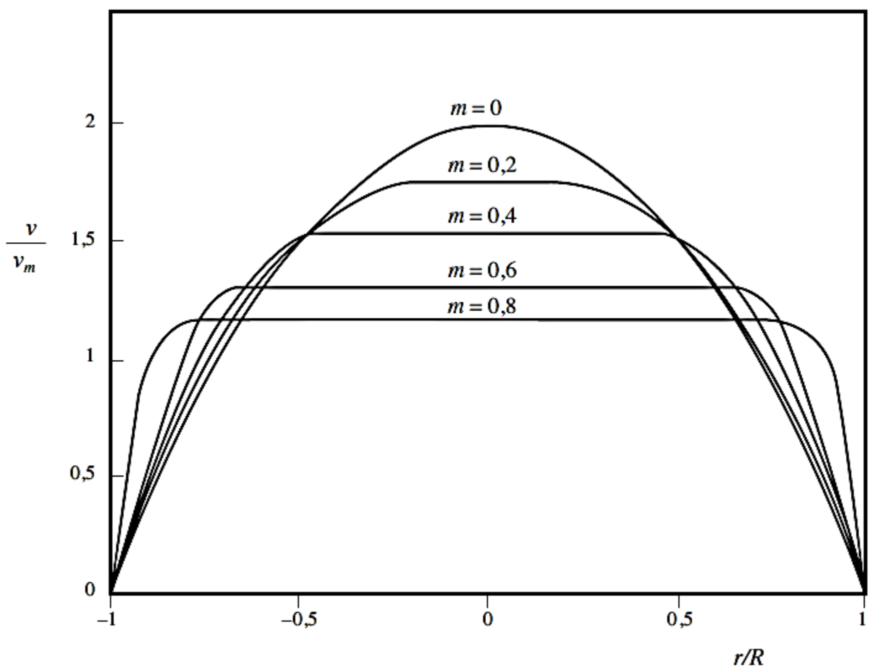
Para $\mathbf{1 \ge r/R \ge m}$:

$$\frac{v_x}{V_m} = \frac{2\left[1 - 2m + 2m\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}{1 + \frac{4m}{3} + \frac{m^4}{3}}$$

Para $\mathbf{r/R \le m}$:

$$\frac{v_x}{V_m} = \frac{2\,(1 - 2m)^2}{1 + \frac{4m}{3} + \frac{m^4}{3}}$$

En la figura siguiente se representa gráficamente el perfil adimensional de velocidades, en esta gráfica se puede observar que dicho perfil depende del valor de $\boldsymbol{m}$.



Perfil de velocidades para plásticos de Bingham, en función del parámetro m

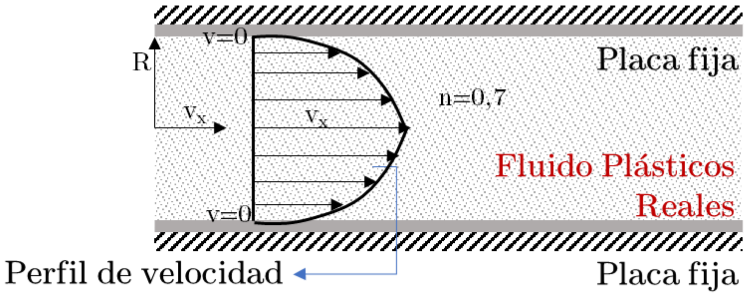
- ***Perfil de velocidad para fluidos Plástico Reales:***

Al igual que para los plásticos de Bingham, aparece una vena central de perfil plano, cuya velocidad es máxima. El radio correspondiente a esta vena, r_0, se obtiene con la ecuación descrita anteriormente para plásticos de Bingham.

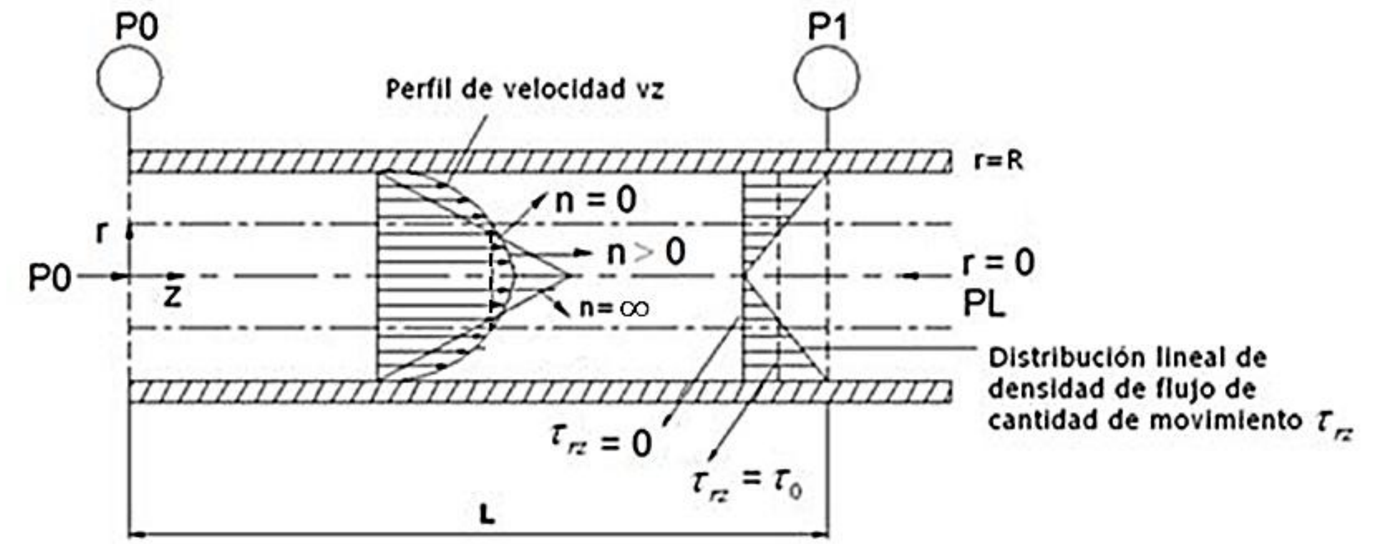
Para $\boldsymbol{r_0} \leq \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{R}$, el perfil de velocidad sera:

Fluidos plásticos reales (modelo de Herschel-Bulckley):

$$v_x = \frac{2L}{\Delta P \left(\frac{1}{n}+1\right) k^{\frac{1}{n}}} \left[(\tau_0 - \tau_c)^{1+\frac{1}{n}} - \left(\frac{r\Delta P}{2L} - \tau_c\right)^{1+\frac{1}{n}} \right]$$



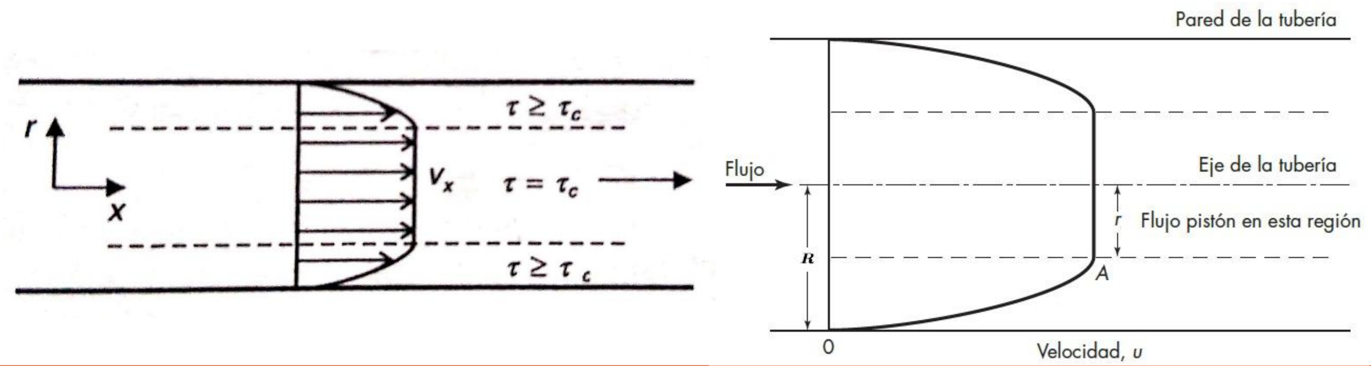
- **v_x: velocidad a una distancia radial r del centro o velocidad local de un fluido en la dirección x**
- **R: distancia radial hacia la superficie interior del área circular**
- **k: índice de consistencia**
- **ΔP: diferencia de presiones**
- **L: longitud**
- **τ_c: tensión tangencial critica**
- **τ_0: tensión tangencial de rozamiento medida en la pared de la tubería**



Flujo de un fluido Herschel-Bulkley en régimen laminar a través de un tubo circular.
Como es de esperar el perfil de velocidad es parabólico y dependiente del valor n>0 (índice de flujo), cuando n=0 existe una región de flujo de tapón que se ajusta muy bien a un plástico Bingham, mientras que cuando n=∞ se convierte en un triángulo isósceles.

- ***Alternativa de perfil de velocidad para fluidos Plástico:***

Para fluidos no newtonianos que se ajustan a los modelos de Bingham o de Herschel-Bulkley, las ecuaciones de la velocidad local de un fluido en dirección x (es decir, v_x para fluidos plásticos de Bingham y reales), proporcionan el perfil de velocidad local en la zona próxima a las paredes de la tubería, en la que se cumple que la tensión tangencial de rozamiento que soporta el fluido es superior a la de fluencia (τ_c). Dado que dicha tensión es inversamente proporcional a la coordenada radial, a una cierta distancia su valor puede caer por debajo del de fluencia por lo que, tal y como se representa en la siguiente figura, a partir de ese punto el perfil de velocidad de este tipo de fluidos es plano.



Perfil de velocidad durante el flujo de un fluido plástico por el interior de una conducción

❖ ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Para poder entender esta ecuación hay tres cosas fundamentales que debemos saber sobre física:

1. Conservación de la masa: la masa se debe mantener constante mientras se mueve a través de un campo de flujo.
2. Ecuación de continuidad: $\nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
3. La segunda ley de Newton: $F = ma$

En mecánica de fluidos, una ecuación de continuidad es una ecuación de conservación de la masa. La ecuación de continuidad expresa que la suma de las masas entrante y saliente por unidad de volumen en la unidad de tiempo es igual a la variación de la densidad por unidad de tiempo. Luego, para el movimiento no estacionario de un fluido incompresible ($\rho = cte$) ella podrá escribirse como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se puede deducir a partir de la segunda ley de Newton, aplicada al volumen de control considerado, dentro de la capa límite.

Entiéndase por volumen de control como un volumen fijo en el espacio, de forma y tamaño invariable con el tiempo a través de la cual fluye la materia.

$\sum F = m\, a$	**$\sum F$: suma de fuerzas que actúan sobre el volumen de control** **m: es la masa del volumen de control** **a: es la aceleración del volumen de control**

Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control dentro de la capa límite son de dos tipos:

1. *fuerzas de cuerpo* por unidad de volumen, proporcionales al volumen. Esta depende de la cantidad de materia del cuerpo y actúa en su centro de gravedad (peso).
2. *fuerzas de superficie* por unidad de volumen, proporcionales al área. Actúa sobre el contorno del volumen de control considerado (presión, tensión).

Las fuerzas másicas o de cuerpo, se consideran fuerzas exteriores, mientras que las fuerzas superficiales dependen del estado de deformación (estado de movimiento) del fluido.

El conjunto de fuerzas superficiales determina un estado de tensión (tensión normal y tensión cortante).

Se van a estudiar en primer lugar las fuerzas superficiales. Las fuerzas superficiales se deben a su vez a dos causas: la presión estática del fluido y los esfuerzos viscosos. Los esfuerzos viscosos son una consecuencia natural del movimiento de un fluido viscoso y desaparecen cuando la velocidad es nula, mientras que la presión estática siempre existe, aunque el fluido no esté en movimiento.

$\frac{F_S}{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V}$	**$\frac{F_S}{v}$: fuerza superficial por unidad de volumen** **$\vec{\nabla} P$: gradiente de presión** **μ: viscosidad** **∇^2: operador laplaciano**

	$\vec{V}$: **vector velocidad**

La fuerza de cuerpo por unidad de volumen, viene dada por la ecuación del peso ($P = mg$) por unidad de volumen, es decir $P = \rho g$ (conocidas como peso específico):

$\frac{F_c}{v} = \rho g$	$\frac{F_c}{v}$: **fuerza de cuerpo por unidad de volumen** ρ: **densidad** g: **gravedad**

Por lo tanto, la suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen de control por unidad de volumen es:

$\frac{\sum F}{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho g$	$\frac{\sum F}{v}$: **suma de fuerzas por unidad de volumen** $\vec{\nabla} P$: **gradiente de presión** μ: **viscosidad** ∇^2: **operador laplaciano** $\vec{V}$: **vector velocidad** **ρ: densidad** **g: gravedad**

Así se obtiene el primer término de la segunda ley de newton, por unidad de volumen:

$\frac{\sum F}{v} = \frac{ma}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum F}{v} = \rho a$	$\frac{\sum F}{v}$: **suma de fuerzas por unidad de volumen** m: **es la masa del volumen de control** a: **es la aceleración del volumen de control** **ρ: densidad**

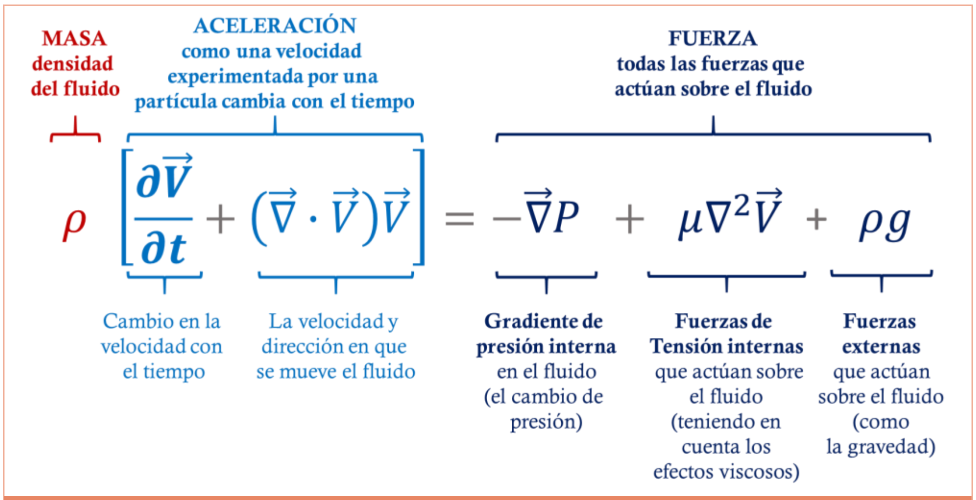
La aceleración es una variable que depende tanto de las coordenadas (x,y,z) como del tiempo (t). Puede escribirse de la siguiente forma:

$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{V}$	$\vec{a}$: **vector aceleración** $\partial \vec{V}$: **derivada parcial del vector velocidad** ∂t: **drivada parcial del tiempo** $\vec{\nabla}$: **gradiente** $\vec{V}$: **vector velocidad**

La aceleración también puede escribirse como la derivada total:

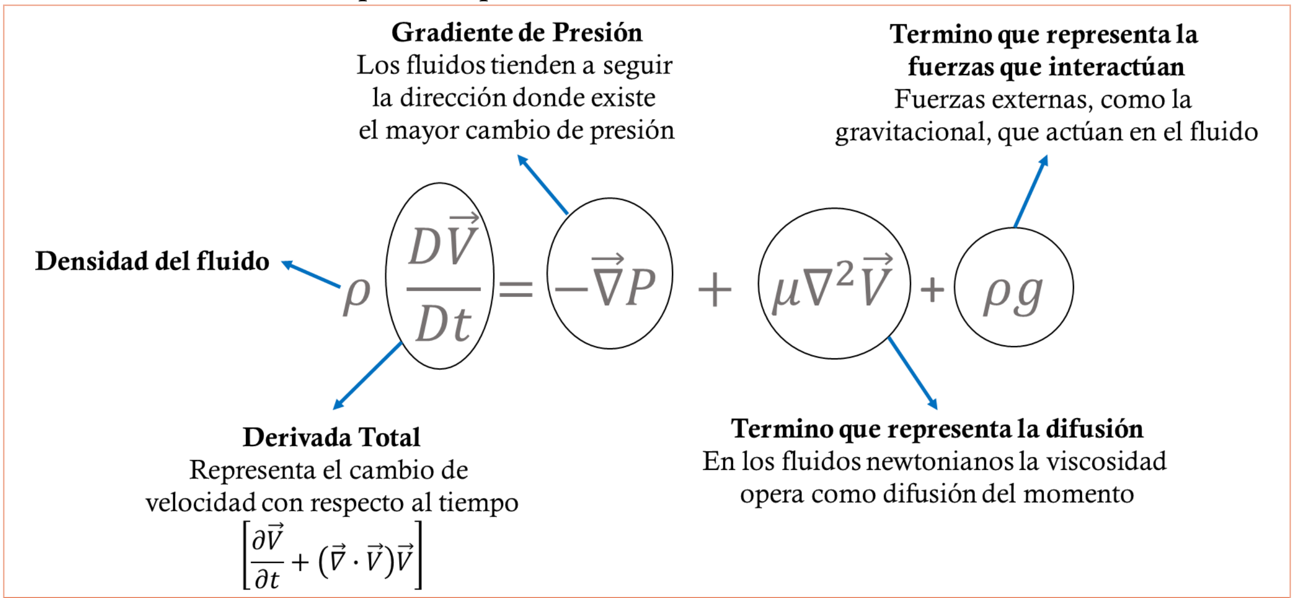
$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Por lo tanto, remplazando la aceleración y la suma de fuerzas en la segunda ley de newton por unidad de volumen, nos queda la ecuación de Navier-Stokes expresada de forma más compacta de un solo vector:



Ecuación de Navier-Stokes

Esta última ecuación también puede expresarse como:



Ecuación de Navier-Stokes

$$\underbrace{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\substack{\text{masa por unidad}\\ \text{de volumen,}\\ \text{multiplicada por}\\ \text{la acelración}}}=\underbrace{-\vec{\nabla}P}_{\substack{\text{fuerza de presión}\\ \text{sobre el volumen}\\ \text{de control por}\\ \text{unidad de}\\ \text{volumen}}}+\underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{\substack{\text{fuerza viscosa}\\ \text{sobre el volumen}\\ \text{de control por}\\ \text{unidad de}\\ \text{volumen}}}+\underbrace{\rho g}_{\substack{\text{fuerza}\\ \text{gravitacional}\\ \text{sobre el volumen}\\ \text{de control}\\ \text{por unidad de}\\ \text{volumen}}}$$

ρ: densidad
$\frac{D\vec{V}}{Dt}$: aceleración, o fuerza inercial
$\vec{\nabla}P$: gradiente de presión o divergencia de presión
$\mu\nabla^2\vec{V}$: fuerza viscosa
g: fuerza de gravedad

A la hora de expresar la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas, debemos tener presenta que el ***operador Laplaciano*** en coordenadas cartesianas se denota de la siguiente forma:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes expresada en coordenadas cartesianas, se expresa de la siguiente forma:

$$\rho\frac{D\vec{V}_x}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_y}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_z}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones de Navier-Stokes y son las expresiones diferenciales de la segunda ley de Newton del movimiento que corresponden a un fluido newtoniano, y flujo incompresible ($\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$).

Estas ecuaciones proporcionan un modo muy preciso de calcular cómo se mueven los fluidos. Ayudan en el diseño de aviones y automóviles, el flujo de aire alrededor de un perfil aerodinámico, etc.

Las suposiciones para las ecuaciones de Navier-Stokes son:

1. Flujo incompresible
2. Viscosidad constante
3. Flujo laminar

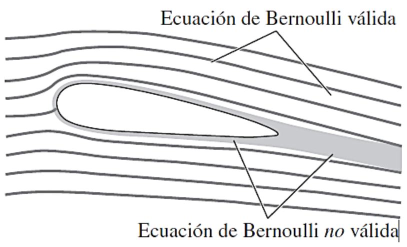
Si el flujo no es viscoso ($\mu=0$), la ecuación de Navier-Stokes se transforma en:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}P+\rho g$$

Esta última ecuación es la famosa ***ecuación de Euler***, ha sido muy utilizada para describir sistemas de flujo en los que los efectos viscosos son relativamente poco importantes.

❖ ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli es *una relación aproximada entre la presión, la velocidad y la elevación, y es válida en regiones de flujo estacionario e incompresible en donde las fuerzas netas de fricción son despreciables*.



La ecuación de Bernoulli es una ecuación aproximada que sólo es válida en *regiones no viscosas del flujo*, donde las fuerzas viscosas netas son despreciablemente pequeñas en comparación con las fuerzas de inercia, gravitacionales y de presión. Ese tipo de regiones se presentan por fuera de las *capas límite* y de las *estelas*.

Para flujo estacionario e incompresible, la ecuación de Bernoulli, se expresa de la siguiente manera:

$$\overbrace{\frac{P}{\rho}}^{\text{Energía de flujo}}+\underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{Energía cinética}}+\overbrace{gh}^{\text{Energía potencial}}=constante$$

P: presión
ρ: densidad del fluido
V: velocidad media de un fluido
h: altura respecto de un nivel de referencia
g: gravedad

La ecuación de Bernoulli afirma que la suma de la energía cinética, la potencial y la de flujo de una partícula de fluido es constante a lo largo de una línea de corriente en el flujo estacionario.

El valor de la constante puede evaluarse en cualquier punto de la línea de corriente en donde se conozcan la presión, densidad, velocidad y elevación. La ecuación de Bernoulli también puede escribirse entre dos puntos cualesquiera sobre la misma línea de corriente como:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{{V_1}^2}{2} + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{{V_2}^2}{2} + gh_2$$

Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli puede concebirse como una expresión del balance de energía mecánica y se puede enunciar del modo siguiente: ***La suma de la energía cinética, la potencial y la de flujo de una partícula de fluido es constante a lo largo de una línea de corriente en el transcurso del flujo estacionario, cuando el efecto de la compresibilidad es despreciable***.

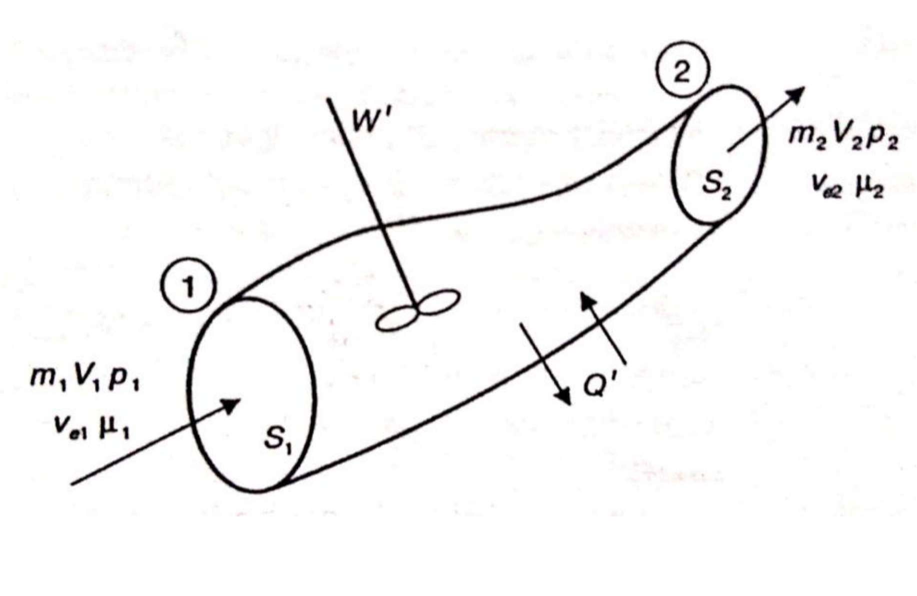
En esta parte no se considera la perdida de energía por rozamiento, ni el trabajo realizado por la máquina, mas adelante estos dos parámetros se incluyen dentro de la ecuación.

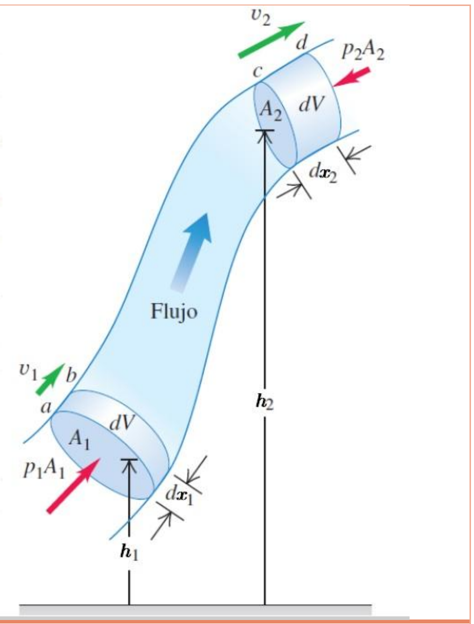
Las limitaciones de la ecuación de Bernoulli son:

1. Flujo no viscoso
2. Flujo constante
3. Flujo incompresible
4. La ecuación se aplica a lo largo de una línea de corriente.

❖ ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Considérese un fluido que circula en *régimen estacionario* (las propiedades del fluido no varían con el tiempo, estas pueden ser distintas en cada punto, pero no varía con el tiempo) por el interior de una conducción, cuya sección transversal puede variar a lo largo del flujo. El sistema que se analiza es el tramo comprendido entre las secciones 1 y 2 de la siguiente figura, admitiendo la posibilidad de que el fluido intercambie calor y/o trabajo con el exterior a lo largo del mismo. Las propiedades del fluido en cada sección se designan mediante los subíndices 1 y 2.





Esquema general del flujo interno de fluidos

Entre ambas secciones se pueden plantear las siguientes ecuaciones de conservación:

1. Conservación de materia total: En régimen estacionario el balance de materia total se reduce a que el caudal músico de fluido (m) se mantiene constante:

$m_1 = m_2$	**m: caudal masico (kg/s)**

o teniendo en cuenta la relación entre caudal másico y caudal volumétrico (Q_V) y entre éste y la velocidad media:

$Q_{V1}\,\rho_1 = Q_{V2}\,\rho_2$	**Q_V: caudal volumetrica** **ρ: densidad del fluido**

Ecuación de continuidad para flujo comprensible: $V_1\, A_1\, \rho_1 = V_2\, A_2\, \rho_2$	**V: velocidad media de un fluido** **A: área de la sección transversal de la conducción** **ρ: densidad del fluido**

Las expresiones anteriores se pueden simplificar en el caso de ***flujo incompresible*** (**ρ constante**):

$Q_{V1} = Q_{V2} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{V_1 A_1 = V_2 A_2}_{\text{Ecuacion de continuidad para flujo incompresible}}$	**Q_V: caudal volumetrica** **V: velocidad media de un fluido** **A: área de la sección transversal de la conducción**

o cuando el área de la sección transversal no varía:

$\rho_1\, V_1 = \rho_2\, V_2 \quad \Rightarrow \quad G_1 = G_2$	**V: velocidad media de un fluido** **ρ: densidad del fluido** **G: velocidad másica**

Finalmente, si tanto la densidad como el área de la sección son constantes, se cumple:

$V_1 = V_2$	**V: velocidad media de un fluido**

2. Conservación de energía total: La ecuación de conservación de energía total se basa en la aplicación del primer principio de la termodinámica a sistemas abiertos:

$$[\boldsymbol{Trabajo\ fuerzas\ externas}] + [\boldsymbol{calor}] = [\Delta \boldsymbol{Energía\ interna}] + [\Delta \boldsymbol{Energía\ cinética}]$$

Desarrollando los diferentes términos:

$$[(P_1 v_{e1} - P_2 v_{e2}) + g(h_1 - h_2) + W'] + [Q'] = [(e_2 - e_1)] + \left[\left(\frac{{V_2}^2}{2\alpha_2} - \frac{{V_1}^2}{2\alpha_1}\right)\right]$$

Siendo:

- **$(P_1 v_{e1} - P_2 v_{e2})$: trabajo realizado por las fuerzas de presión en las superficies 1 y 2, representando v_e, el volumen especifico, de valor inverso al de la densidad del fluido** (es igual a $^1/_\rho$).
- **$g(h_1 - h_2)$: variación de la energía potencial del fluido, siendo h la altura de cada sección respecto de un nivel de referencia, y g la gravedad.**
- **W': trabajo intercambiado por el fluido con una máquina.**
- **Q': calor intercambiado por el fluido con el exterior.**
- **$(e_2 - e_1)$: variación de energía interna.**
- **$\left(\frac{{V_2}^2}{2\alpha_2} - \frac{{V_1}^2}{2\alpha_1}\right)$: variación de la energía cinética del fluido. El parámetro α tiene un valor de 0,5 en régimen laminar y de 1 en régimen turbulento.**

La ecuación anterior está referida a 1 kg de fluido en movimiento, es decir, los diferentes términos tienen dimensiones de energía por unidad de masa. El calor y los trabajos intercambiados con el exterior se definen como positivos si los recibe el fluido y negativos en caso contrario.

Introduciendo el concepto de entalpia específica (i):

$i = e + P v_e$	i: entalpia especifica e: energía interna P: presión v_e: volumen especifico

la ecuación de conservación de energía total se expresa como:

$(i_2 - i_1) + g(h_2 - h_1) + \left(\frac{{V_2}^2}{2\alpha_2} - \frac{{V_1}^2}{2\alpha_1}\right) = Q' + W'$	**i: entalpia especifica** **g: gravedad**

	h: altura respecto de un nivel de referencia **V: velocidad media de un fluido** **$\alpha = 0,5$: régimen laminar** **$\alpha = 1$: régimen turbulento**

3. Conservación de energía interna y energía mecánica: La ecuación de conservación de energía total se puede desglosar en sendas ecuaciones de conservación de energía interna y energía mecánica teniendo en cuenta los términos relacionados con cada una de estas formas de energía. Para ello, el término correspondiente al trabajo realizado por las fuerzas de presión se expresa como:

$(P_1 v_{e1} - P_2 v_{e2}) = \int_1^2 d(P v_e)$ $(P_1 v_{e1} - P_2 v_{e2}) = \int_1^2 P\, dv_e + \int_1^2 v_e\, dP$	P: presión v_e: volumen especifico

También ha de tenerse en cuenta que en todos los sistemas reales en movimiento se produce una conversión de energía mecánica en energía interna debido al rozamiento. Si denominamos $\sum F$ a las pérdidas de energía por rozamiento por unidad de masa de fluido, la ecuación de conservación de energía interna queda como:

$\int_1^2 P\, dv_e + (e_2 - e_1) = Q' + \sum F$	P: presión v_e: volumen especifico e: energia interna Q': caudal de calor intercambiado con el exterior $\sum F$: perdidas de energía por rozamiento

mientras que la expresión correspondiente a la ecuación de conservación de energía mecánica es:

$\left(\frac{V_2^2}{2\alpha_2} - \frac{V_1^2}{2\alpha_1}\right) + g(h_2 - h_1) + \int_1^2 v_e\, dP + \sum F = W'$	P: presión v_e: volumen especifico (es igual a $1/\rho$) V: velocidad media de un fluido h: altura respecto de un nivel de referencia g: gravedad W': trabajo intercambiado con una maquina $\sum F$: perdidas de energía por rozamiento $\alpha = 0,5$: régimen laminar $\alpha = 1$: régimen turbulento

dividiendo toda la ecuación por la aceleración de la gravedad, los diferentes términos quedan expresados con dimensiones de longitud, recibiendo el nombre de *cargas*:

Balance de energía mecánica expresado en términos de carga: $\frac{1}{g}\left(\frac{V_2^2}{2\alpha_2} - \frac{V_1^2}{2\alpha_1}\right) + (h_2 - h_1) + \frac{1}{g}\int_1^2 v_e\, dP + \frac{\sum F}{g} = \frac{W'}{g}$	P: presión v_e: volumen especifico (es igual a $1/\rho$) V: velocidad media de un fluido h: altura respecto de un nivel de referencia g: gravedad W': trabajo intercambiado con una maquina $\sum F$: perdidas de energía por rozamiento $\alpha = 0,5$: régimen laminar $\alpha = 1$: régimen turbulento

En el caso de ***flujo incompresible***, al ser la densidad constante, la ecuación de conservación de energía mecánica se simplifica a la siguiente:

Ecuación de Bernoulli:	**P: presión**

$\left(\frac{V_2{}^2}{2g_c\alpha_2} - \frac{V_1{}^2}{2g_c\alpha_1}\right) + \frac{g}{g_c}(h_2 - h_1) + v_e(P_2 - P_1) + \sum F = W'$	**v_e: volumen especifico (es igual a $1/\rho$)** **V: velocidad media de un fluido** **h: altura respecto de un nivel de referencia** **g: gravedad** **g_c: constante de proporcionalidad** **W': trabajo intercambiado con una maquina** **$\sum F$: perdidas de energía por rozamiento** **$\alpha = 0,5$: régimen laminar** **$\alpha = 1$: régimen turbulento**

expresión conocida como ***ecuación de Bernoulli***. Es importante tener en cuenta que se debe agrega el *factor de proporcionalidad de la ley de Newton para la unidad de fuerza gravitacional* (g_c). Este parámetro tiene los siguientes valores, dependiendo de las unidades en la que se trabaje:

$$\underbrace{g_c = 1\frac{kg\,m}{N\,s^2}}_{\substack{Sistema\\Internacional}} \quad \underbrace{g_c = 32,2\frac{lbm\,ft}{lbf\,s^2}}_{\substack{Sistema\\Inglés}} \quad \underbrace{g_c = 9,8\frac{kgm\,m}{kgf\,s^2}}_{\substack{Sistema\\Tecnico}}$$

Para flujo ***comprensible***, en este caso la dificultad que conlleva la interacción del término relacionado con la variación de la presión hace necesario el subdividir la instalación en diferentes tramos de forma que se pueda admitir que en cada uno de ellos la transformación que experimenta el fluido se ajusta a modelos sencillos: isoterma, adiabática, politrópica, etc.

Si se considera un tramo recto de tubería en el que no se dispone de ninguna máquina y se admite que la variación de energía potencial es despreciable y el flujo es isotérmico, la ecuación de conservación de energía mecánica conduce a la siguiente expresión:

Para flujo compresible: $\rho = \rho(P,T) \Rightarrow \rho(P,T) = \frac{M\,P}{R\,T}$ $\frac{Mg_c}{2RT}\left(P_1{}^2 - P_2{}^2\right) = \frac{G^2}{\alpha}\ln\frac{P_1}{P_2} + 2fG^2\frac{L}{D}$	**M: peso molecular** **P: presión** **R: constante de los gases** **T: temperatura** **G: velocidad másica** (es igual $V * \rho$) **f: factor de rozamiento** **L: longitud** **D: diámetro de la conducción** **g_c: constante de proporcionalidad** **$\alpha = 0,5$: régimen laminar** **$\alpha = 1$: régimen turbulento**

Por aplicación de esta ecuación a los diferentes tramos rectos de la instalación es posible obtener el valor de la presión a la entrada y a la salida de la máquina impulsora. Suponiendo que durante la compresión del fluido en esta última se produce una transformación politrópica de exponente $\boldsymbol{k}$, *denominado exponente politrópico* ($P\,v_e{}^k = constante$), la energía que recibe el fluido se puede calcular como:

$W' = \int_1^2 v_e\,dP = \frac{k}{k-1}P_1 v_{e1}\left[\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]$	P: presión v_e: volumen especifico (es igual a $1/\rho$) k: exponente politrópico W': trabajo intercambiado con una maquina

❖ PERDIDAS DE ENERGÍA POR ROZAMIENTO

La energía mecánica que se disipa debido al rozamiento que experimenta el fluido durante su desplazamiento depende de numerosos factores: características geométricas de la conducción, propiedades físicas y tipo de comportamiento reológico del fluido, régimen de circulación, características superficiales de la pared de la tubería, presencia de diferentes tipos de accidentes, etc. A continuación, se describe cómo se puede realizar una estimación de dichas pérdidas en los casos más habituales de flujo interno.

A. Fluidos newtonianos: Las pérdidas de energía mecánica por rozamiento que experimenta un fluido newtoniano al circular en régimen laminar por un tramo recto de tubería se pueden calcular mediante la ecuación de Poiseuille. La disminución de presión asociada a la pérdida de energía por rozamiento se determina a partir de esta última dividiendo por la densidad. Teniendo en cuenta esta relación, la ecuación de Poiseuille se puede expresar para calcular directamente el termino $\sum F$:

Ecuación de Poiseuille, para régimen laminar: $$\sum F = \frac{\Delta P_{roz}}{\rho} = 32\frac{\mu V L}{\rho D^2}$$	**$\sum F$: perdidas de energía por rozamiento** **ΔP_{roz}: perdida de presión debido al rozamiento** **ρ: densidad del fluido** **μ: viscosidad** **V: velocidad media de un fluido** **L: longitud** **D: diámetro de la conducción**

las condiciones por la cuales se puede utilizar la ecuación anterior son:

1. El fluido: (a) es newtoniano.
   (b) se comporta como un continuo.
2. El flujo es: (a) laminar.
   (b) permanente.
   (c) totalmente desarrollado.
   (d) incompresible.

Para régimen de transición y turbulento, esta ecuación no es aplicable. En su lugar se utiliza una expresión empírica denominada ***ecuación de Fanning***, también valida en régimen laminar:

Ecuación de Fanning: $$\sum F = \frac{\Delta P_{roz}}{\rho} = 4 f_F \frac{V^2}{2 g_c}\frac{L}{D}$$ $$\Delta P_{roz} = 4 f_F\, \rho\, \frac{V^2}{2 g_c}\frac{L}{D}$$	**$\sum F$: perdidas de energía por rozamiento** **ΔP_{roz}: perdida de presión debido al rozamiento** **ρ: densidad del fluido** **f_F: factor de fricción de Fanning** **V: velocidad media de un fluido** **L: longitud** **D: diámetro de la conducción** **g_c: constante de proporcionalidad**

Otro factor de fricción de uso común es el factor de fricción de Darcy, f_D, definido por la ecuación:

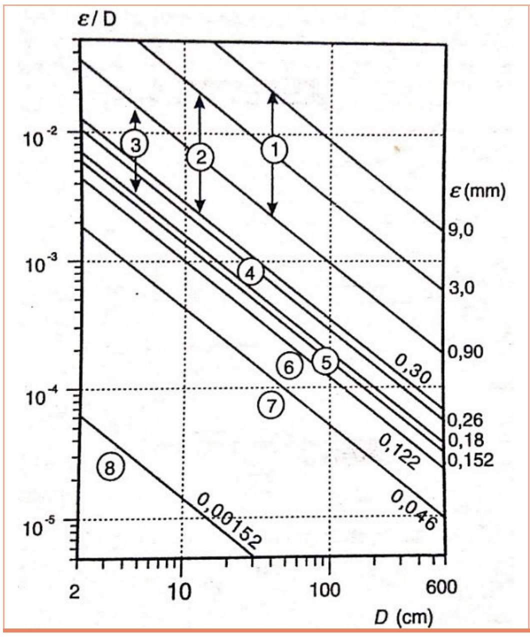
Ecuación de Darcy: $$\sum F = \frac{\Delta P_{roz}}{\rho} = f_D \frac{V^2}{2 g_c}\frac{L}{D}$$ $$\Delta P_{roz} = f_D\, \rho\, \frac{V^2}{2 g_c}\frac{L}{D}$$ ***Relación entre Fanning y Darcy:*** $$f_D = 4 f_F$$	**$\sum F$: perdidas de energía por rozamiento** **ΔP_{roz}: perdida de presión debido al rozamiento** **ρ: densidad del fluido** **f_D: factor de fricción de Darcy** **f_F: factor de fricción de Fanning** **V: velocidad media de un fluido** **L: longitud** **D: diámetro de la conducción** **g_c: constante de proporcionalidad**

Mediante análisis dimensional se deduce que el factor de rozamiento depende del valor del número de Reynolds y de la relación ε/D, denominada *rugosidad relativa*:

$$f = \Phi\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$	**f: factor de rozamiento** **Re: numero adimensional de Reynolds**

	ε: rugosidad absoluta en la tubería **D: diámetro de la conducción**

La rugosidad absoluta (ε) es una medida de la profundidad media que tienen las rugosidades e imperfecciones existentes en la superficie de la pared de la conducción. La rugosidad absoluta depende del material y método de fabricación de la tubería y posee dimensiones de longitud. Existe una escala normalizada de rugosidades obtenidas experimentalmente para diferentes materiales, que se suele presentar en forma de tablas o gráficas como la siguiente figura:



Escala normalizada de rugosidades para diferentes tuberías: tubos de acero remachados (1), tubos de hormigón (2), tubos de duelas de madera (3), tubos de fundición (4), tubos de hierro galvanizado (5), tubos de fundición revestidos de asfalto (6), tubos de acero o hierro forjado (7), tubos estirados (8).

Se han desarrollado y propuesto numerosas correlaciones de datos experimentales que permiten el cálculo del factor de rozamiento a partir de valores de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Entre los más utilizados se encuentra el gráfico de Moody, en el que puede observarse que en régimen laminar el factor de rozamiento no depende de la rugosidad, expresándose únicamente en función de Re de acuerdo con la siguiente ecuación:

Para flujo laminar: $$f_F = \frac{16}{Re}$$ $$f_D = \frac{64}{Re}$$	**f_F: factor de rozamiento de Fanning** **Re: numero adimensional de Reynolds** **f_D: factor de fricción de Darcy**

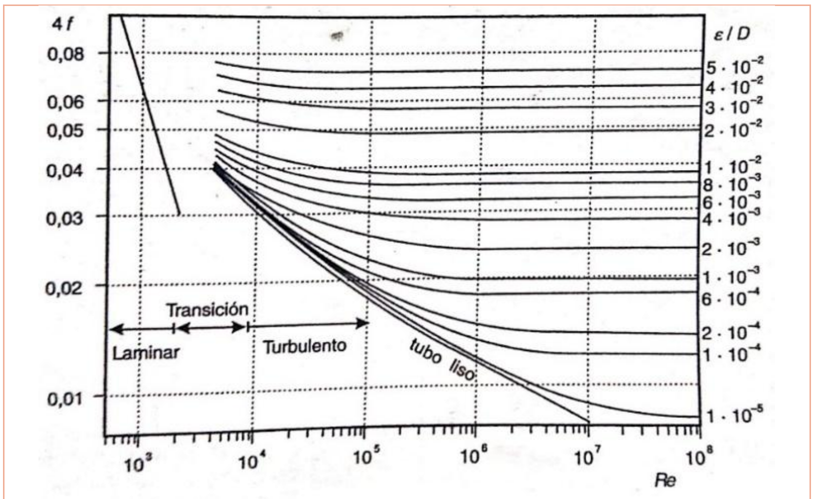


Gráfico de Moody para el cálculo del factor de rozamiento

Por el contrario, en régimen turbulento las curvas $4f - Re$ se hacen casi horizontales, poniendo de manifiesto que en esas condiciones que el factor de rozamiento varia fundamentalmente con la rugosidad relativa y muy poco con el número de Reynolds.

Entre las correlaciones analíticas existentes para la estimación de f, una de las mas importantes es la ecuación de Chen que proporciona valores coincidentes con el grafico de Moody:

Ecuación de Chen: $$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log\left\{\frac{1}{3,7065}\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) - \frac{5,0542}{Re}\log\left[\frac{1}{2,8257}\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}}\right]\right\}$$	**f: factor de rozamiento** **Re: numero adimensional de Reynolds** **ε: rugosidad absoluta en la tubería** **D: diámetro de la conducción**

Por otro lado, en determinados problemas resulta de gran utilidad el denominado grafico de Karman, en el que se representan los mismos datos que el grafico de Moody pero de diferente forma. Dado que el primero de ello la velocidad media del fluido no aparece en las abscisas $\left(2Re\sqrt{f}\right)$, esta representación permite resolver con facilidad problemas en los que la velocidad o el caudal de fluido son desconocidos.

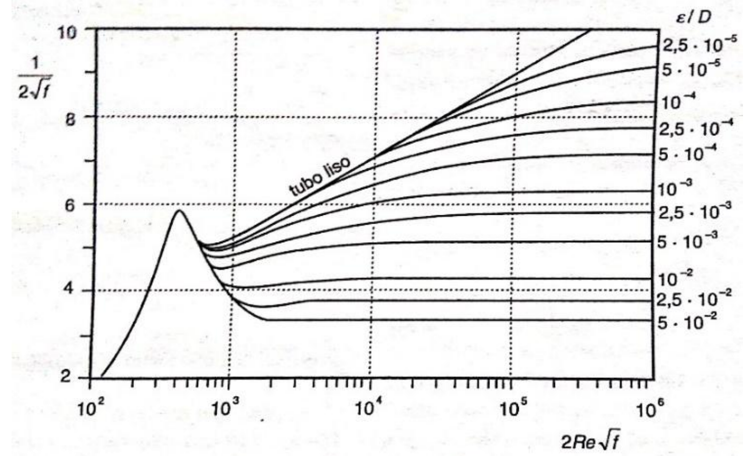


Gráfico de Karman, para régimen turbulento

***Ecuación de Karman*:** $$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{2\varepsilon}\right) + 1,74$$	**f: factor de rozamiento** **ε: rugosidad absoluta en la tubería** **D: diámetro de la conducción**

B. Fluidos no newtonianos: la mayor parte de los alimentos líquidos se comportan como fluidos no newtonianos, por lo que la determinación de las perdidas por rozamiento en este caso es de gran interés. Para ello, se sigue calculando el termino $\sum F$ mediante la ecuación de Fanning, pero cambian las correlaciones que permiten la estimación del factor de rozamiento.

Para los fluidos que cumplen la ley de la potencia (***pseudoplasticos y dilatantes***) se define un número de Reynolds generalizado de acuerdo con la siguiente expresión:

***Número de Reynolds generalizado para pseudoplásticos y dilatantes*:** $$Re_g = 2^{3-n}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \frac{V^{2-n}D^n\rho}{k}$$	**Re_g: numero adimensional de Reynolds generalizado** **n: índice de comportamiento** **V: velocidad media de un fluido** **D: diámetro de la conducción** **ρ: densidad del fluido** **k: índice de consistencia**

Una vez conocido Re_g, el factor de rozamiento se puede determinar mediante correlaciones empíricas o gráficos como el que se muestra en la figura siguiente, denominado de Dodge y Metzner y válido para tuberías lisas.

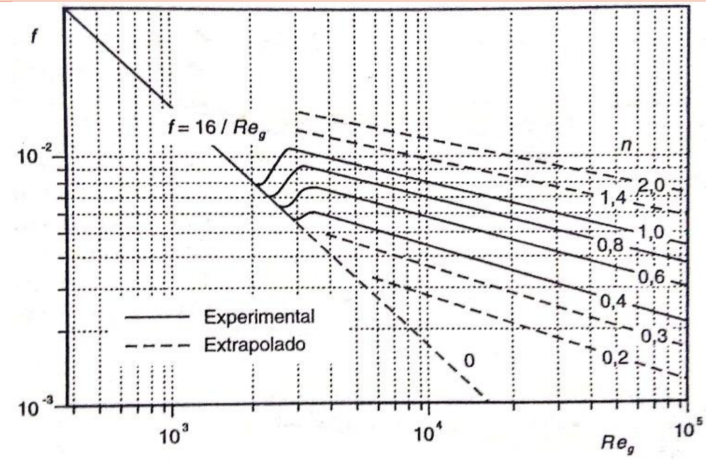


Gráfico de Dodge y Metzner para el cálculo del factor de rozamiento en fluidos pseudoplasticos y dilatantes.

En el caso de fluidos ***plásticos de Bingham***, se refiere el número de Reynolds a la viscosidad plástica y se define un nuevo número adimensional, numero de Hedstron (He), según las ecuaciones:

Numero de Reynolds: $$Re = \frac{VD\rho}{\eta}$$	**V: velocidad del fluido** **D: diámetro de la conducción** ρ**: densidad** η**: viscosidad plástica**

Numero de Hedstron: $$He = \frac{\rho D^2 \tau_c}{\eta^2}$$	ρ**: densidad** **D: diámetro de la conducción** τ_c**: tensión tangencial critica** η**: viscosidad plástica**

A partir de estos numero adimensionales es posible determinar el factor de rozamiento mediante el grafico de Thomas:

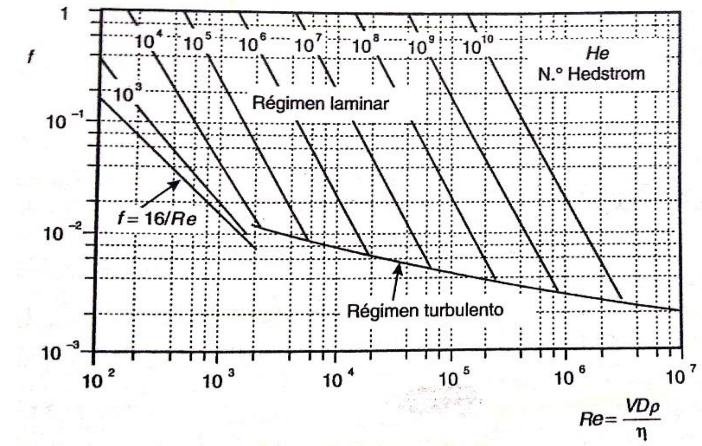


Gráfico de Thomas para el cálculo del factor de rozamiento en fluidos plásticos de Bingham

Tanto el grafico de Dodge y Metzner, como el de Thomas, se puede observar que para fluidos no newtonianos el paso de régimen laminar a régimen de transición no se produce siempre para el mismo valor del número de Reynolds, sino que dicho valor critico depende de los parámetros reológicos del fluido.

En cualquier caso, siempre es posible utilizar un método aproximado para el cálculo de f, basado en la estimación de una viscosidad aparente media del fluido en las condiciones de flujo y la aplicación de las correlaciones correspondientes a los fluidos newtonianos.

Para fluidos ***plásticos reales (modelo Herschel-Bulkley)***, el factor de fricción se calcula de la siguiente manera:

Para flujo laminar: $$f = \frac{16}{\Psi Re_g} \quad \boxed{a}$$	**f_F: factor de rozamiento de Fanning** **Re: numero adimensional de Reynolds** **Ψ: número adimensional**

$$\Psi = (3n+1)^n (1-m)^{1+n}\left[\frac{(1-m)^2}{3n+1} + \frac{2m(1-m)}{2n+1} + \frac{m^2}{n+1}\right]^n \quad \boxed{b}$$	**Ψ: número adimensional** **m: relación entre esfuerzo cortante** **n: índice de comportamiento**

en la que Ψ viene dada por la expresión:

El factor $\boldsymbol{m}$ o relación entre esfuerzos cortantes, al ser una función implícita de los números generalizados de Reynolds y Hedstrom puede calcularse por medio de la siguiente ecuación:

Número de Reynolds generalizado para plásticos reales: $$Re_g = 2\,He_g\left(\frac{n}{3n+1}\right)^2 \left(\frac{\Psi}{m}\right)^{\frac{2}{n}-1} \quad \boxed{c}$$	**Re_g: número adimensional de Reynolds generalizado** **He_g: Hedstrom generalizado** **n: índice de comportamiento** **Ψ: número adimensional** **m: relación entre esfuerzo cortante**

Para fluidos newtonianos y de la ley de la potencia (pseudoplástico y dilatantes), $\boldsymbol{m = 0}$ y $\boldsymbol{\Psi = 1}$, por lo que es posible calcular directamente el factor de fricción a partir de la ecuación $f_F = \frac{16}{Re}$ ó $f = \frac{16}{Re_g}$. Para fluidos de Bingham y de Herschel-Bulkley, si el valor de $\boldsymbol{m}$ no es conocido es necesario realizar la resolución de la ecuación $\boxed{c}$ mediante iteración o prueba y error, usando las ecuaciones $\boxed{b}$, $\boxed{a}$ y la del módulo de Reynolds generalizado ($Re_g = \frac{V^{2-n}\,\rho\,D^n}{8^{n-1}\,k}\left(\frac{4\,n}{1+3n}\right)^n$), para obtener el valor de $\boldsymbol{\Psi}$ y finalmente el valor de $\boldsymbol{f}$.

B. Perdidas menores: aquellas perdidas de energía mecánica que experimenta el fluido por rozamiento al atravesar diferentes accesorios y accidentes presentes en las redes de flujo, tales como válvulas, codos, estrechamientos, ensanchamientos, bifurcaciones, etc. El valor correspondiente ha de sumarse al que se produce durante la circulación en tramos rectos a fin de obtener las perdidas totales de energía mecánica.

Uno de los métodos más utilizados para estimar las pérdidas menores se basa en determinar la longitud equivalente de tramo recto (L_{eq}) que ocasiona la misma perdida de energía que el accidente considerado.

Introduciendo el concepto de longitud equivalente en la ecuación de Fanning es posible calcular mediante una sola expresión las pérdidas globales de energía debido al rozamiento:

Ecuación de Fanning: $$\sum F = \frac{\Delta P_{roz}}{\rho} = 2fV^2\,\frac{L + \sum L_{eq}}{D}$$	**$\sum F$: perdidas de energía por rozamiento** **ΔP_{roz}: perdida de presión debido al rozamiento** **ρ: densidad del fluido** **f: factor de rozamiento** **V: velocidad media de un fluido** **L: longitud** **$\sum L_{eq}$: longitud equivalente de tramo recto** **D: diámetro de la conducción**

Cálculo de la energía de impulsión

La estimación de la ***energía o potencia*** que hay que comunicar al fluido mediante una máquina para conseguir su desplazamiento de un punto a otro de la instalación se suele realizar basándose en la *ecuación de conservación de energía mecánica*. La forma de integrar el término relacionado con la variación de la presión, que aparece en dicha ecuación, depende de si el flujo es incompresible o compresible.

A. Flujo incomprensible: al ser constante la densidad del fluido, la ecuación de conservación de energía mecánica se transforma en la de Bernoulli, la cual permite calcular directamente el término de energía de impulsión (W'). A partir de este valor, la potencia que debe recibir el fluido se obtiene multiplicando la energía de impulsión por el caudal másico:

$N_T = W'm$	**N_T: potencia teórica** **W': trabajo intercambiado con una maquina** **m: caudal masico**

La expresión anterior proporciona la potencia teórica, es decir la que tiene que recibir el fluido en circulación. Sin embargo, la potencia que realmente se consume es mayor debido a las diferentes pérdidas que se producen en el interior de la máquina de impulsión: disipación de energía en el motor eléctrico que acciona la bomba o el compresor, rozamiento entre las diferentes piezas y partes en movimiento, etc. La potencia teórica (N_T) y la real (N_R) se relacionan a través del rendimiento total de la máquina impulsora, expresado en tanto por ciento:

$\eta_{total} = \dfrac{N_T}{N_R} \times 100$	**η_{total}: rendimiento total de una maquina impulsora** **N_T: potencia teórica** **N_R: potencia real**

B. Flujo comprensible: suponiendo que durante la compresión del fluido en esta última se produce una transformación politrópica de exponente k, *denominado exponente politrópico* ($P\, v_e{}^k = constante$), la energía que recibe el fluido se puede calcular como:

$W' = \int_1^2 v_e\, dP = \dfrac{k}{k-1} P_1 v_{e1} \left[\left(\dfrac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$	P: presión v_e: volumen especifico (es igual a $1/\rho$) k: exponente politrópico W': trabajo intercambiado con una maquina

Entonces la potencia teórica y la real se determina análogamente al caso de flujo comprensible:

$N_T = W'm$	**N_T: potencia teórica** **W': trabajo intercambiado con una maquina** **m: caudal masico**
$\eta_{total} = \dfrac{N_T}{N_R} \times 100$	η_{total}: rendimiento total de una maquina impulsora N_T: potencia teórica N_R: potencia real

❖ LEY DE POISEUILLE

Obtenida por el análisis de fluidos newtonianos si se considera un elemento cilíndrico de fluido de radio R en movimiento, su expresión es:

$Q_V = V\, A_C = \dfrac{\Delta P\, R^4\, \pi}{8\, \mu\, L} = \dfrac{\Delta P\, D^4\, \pi}{128\, \mu\, L}$	*Q_V: caudal volumetrico* *V: velocidad media de un fluido* *A_C: área de un circulo* *ΔP: perdida de presión* *ρ: densidad del fluido* *μ: viscosidad* *L: longitud*

	$\boldsymbol{R}$: *radio* $\boldsymbol{D}$: ***diámetro de la conducción***

Esta ecuación se conoce como Ley de Poiseuille; este flujo se llama flujo Hagen-Poiseuille, que *para un flujo volumétrico especificado, la caída de presión y, por lo tanto, la potencia de bombeo necesaria, es proporcional a la longitud de la tubería y a la viscosidad del fluido, pero es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio (o diámetro) de la tubería*.

❖ DIÁMETRO EQUIVALENTE

Las ecuaciones de pérdidas de energía por rozamiento (Fanning y Darcy) se basan en un conducto circular de flujo. Estas ecuaciones pueden usarse para calcular la pérdida de carga en un conducto cerrado de cualquier configuración si se utiliza un "***diámetro equivalente***" para un conducto no circular de flujo. El diámetro equivalente se calcula de acuerdo con la fórmula:

$$\boldsymbol{D_{eq} = 4 * \underbrace{\frac{secci\acute{o}n\ transversal\ del\ \acute{a}rea\ de\ flujo}{per\acute{i}metro\ transversal}}_{Radio\ Hidraulico}}$$

La razón de la sección transversal del área al perímetro mojado se llama radio hidráulico. El D_{eq} corresponde a $\boldsymbol{D}$ en un conducto circular de flujo.

BIBLIOGRAFIA

→ *Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa- Welty, Wiks, Wilson*
→ *Ingeniería de la Industria Alimentaría- Aguado Alonso*
→ *Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias- Geankoplis*
→ *Fenómenos de Transporte- Bird Lightfood y Stewar*
→ *Mecánica de los fluido- Fundamentos y aplicaciones – Cengel*
→ *Ingenieria Quimica – Coulson y Richardson*
→ *Operaciones Unitarias en Ingeniería Química- McCabe, Smith, Harriott*
→ *Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos – Albert Ibarz*