

A. Representación de números en sistemas acotados.

Los sistemas numéricos posicionales acotados suelen identificarse con la notación:

$$(b,k,f)_{xx} \left\{ \begin{array}{l} b = \text{base del sistema} \\ k = \text{cantidad de posiciones enteras} \\ f = \text{cantidad de posiciones fraccionarias (cuando el sistema es entero, } f=0 \text{ y no se indica)} \\ \text{XX} = \text{tipo de sistema} \left\{ \begin{array}{l} \text{SS} = \text{sin signo} \\ \text{CS} = \text{con signo} \\ \text{NC} = \text{notación complemento} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La representación de un número en un sistema acotado, se refiere a expresar el número original con las características propias del sistema, en forma equivalente o aproximada. El cambio de sistema implica, en general, cambiar los parámetros indicados (uno, algunos o todos) dependiendo del tipo de transformación que se aplique al número.

REPRESENTACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS CON SIGNO

En los sistemas con signo, en primer lugar se representa el valor absoluto del número original, completando con 0's a la izquierda hasta rellenar $k-1$ posiciones, y con 0's a la derecha hasta completar las f posiciones (siempre y cuando esto sea posible). Luego, en la posición k (extrema izquierda) el signo se representa con un bit, este bit será 0 si el signo es positivo o nulo, o será 1 si el número es negativo.

Nº ORIGEN	SISTEMA	REPRESENTACIÓN
$N = +5,7_{10}$	$(10,4,2)_{CS}$	$N = 0005,70_{10}$
$N = -5,7_{10}$	$(10,4,2)_{CS}$	$N = 1005,70_{10}$
$N = -101,10_2$	$(2,3,3)_{CS}$	Desborde
$N = -101,10_2$	$(2,4,3)_{CS}$	$N = 1101,100_2$

REPRESENTACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS CON NOTACIÓN COMPLEMENTO

La representación en sistemas con notación complemento es bastante particular. Si el número original es positivo, se representa igual que en los sistemas con signo; si el número es negativo, se requiere realizar un proceso llamado **complementación** para lograr su representación. En este último caso, la imagen de los números negativos cambia.

Nº ORIGEN	SISTEMA	REPRESENTACIÓN
$N = +5,7_{10}$	$(10,4,2)_{NC}$	$N = 0005,70_{10}$
$N = -5,7_{10}$	$(10,4,2)_{NC}$	$N = 1994,30_{10}$
$N = -101,10_2$	$(2,3,3)_{CS}$	Desborde
$N = -101,10_2$	$(2,4,3)_{NC}$	$N = 1010,100_2$

A. Con respecto al proceso de complementación, tener en cuenta que se aplica en dos ocasiones:

- cuando se quiere representar un número negativo con signo explícito en sistema NC
- cuando se quiere cambiar de signo un número que ya está representado en NC

B. Cambio a base 8 del número $N = +2149,781_{10}$ aplicando aritmética en base origen y aritmética en base destino.

Con aritmética en base origen

Se considera que el número a cambiar de base no tiene signo. Para aplicar este método a números fraccionarios, se descompone al número en una parte entera y otra fraccionaria.

$$N = N_e + N_f = 2149_{10} + 0,781_{10}$$

Para la parte entera, en primer lugar se expresa la base destino ($p=10_8$) en sistema origen

$$p = 10_8 \rightarrow \text{a decimal} \rightarrow p_b = 8_{10}$$

Luego, se realiza la división entera entre el número y la base p_b . El proceso de división continúa sucesivamente con los cocientes resultantes hasta que el último cociente sea menor que el divisor.

2149	(8)	268	(8)	33	(8)	4
	← 5		← 4		← 1	

Finalmente, en la base destino, el número se forma con el último cociente como cifra más significativa y los restos obtenidos, en orden inverso, como cifras de significación decreciente.

$$N_e = 2149_{10} = 4145_8$$

Para la conversión de la parte fraccionaria se multiplica el número fraccionario por la base destino expresada en sistema origen (p_b) Del resultado se extrae la parte entera (que puede ser cero) y se sigue operando el residuo.

$$N_f * p_b = D_{i8} + \text{residuo}$$

$$0,781 \times 8 = 6,248 = 6 + 0,248 \rightarrow 6 \leftarrow \text{primera cifra fraccionaria}$$

$$0,248 \times 8 = 1,984 = 1 + 0,984 \rightarrow 1 \leftarrow \text{segunda cifra fraccionaria}$$

$$0,984 \times 8 = 7,872 = 7 + 0,872 \rightarrow 7 \leftarrow \text{tercera cifra fraccionaria}$$

$$0,872 \times 8 = 6,976 = 6 + 0,976 \rightarrow 6 \leftarrow \text{cuarta cifra fraccionaria}$$

↖ residuo de error de conversión expresado en sistema origen

El proceso finaliza cuando se han obtenido la cantidad suficiente de cifras fraccionarias en el sistema destino, o cuando el residuo se hace cero (conversión exacta), o cuando el error de conversión ha alcanzado un valor conveniente.

El número fraccionario destino se forma con las cifras enteras extraídas en cada línea de producto, siendo la primera cifra obtenida la que corresponde a la primera posición fraccionaria. En el ejemplo:

$$N_f \approx 0,6176_8$$

El error en este caso queda expresado por el producto del último residuo y la base p_b elevada, con signo negativo, a la cantidad de cifras fraccionarias obtenidas y está representado en el sistema origen.

$$\text{Error absoluto} = (0,976 \times 8^{-4})_{10} = 0,00023828125_{10}$$

$$\text{Error relativo} = \text{Error absoluto} / N_{f10} = 0,00023828125 / 0,781 = (3,0509 \times 10^{-4})_{10}$$

$$\text{Error relativo porcentual} = \text{Error relativo} \times 100 = 0,03051_{10} \%$$

El número completo resulta de componer las conversiones para la parte entera y la parte fraccionaria

$$N = 214 \ 9,781_{10} = 4145,6176_8$$

Por otra parte, es importante destacar que existen dos criterios de complementación: el **complemento a la base** y el **complemento a la base menos uno**. La diferencia entre ambos métodos es obviamente una unidad, y la aplicación de uno u otro método dependerá del tipo de operación que se quiera realizar. En general, la complementación a la base menos uno es más usual en los sistemas binarios enteros. El procedimiento general para complementar cualquier número (en notación complemento), de cualquier base, se puede realizar aplicando las fórmulas:

- (1) $\bar{N} = -1 - N + 1$ complemento a la base
- (2) $\bar{N} = -1 - N$ complemento a la base menos uno

En el caso particular de los sistemas binarios, considerando la naturaleza especial de los números formados por sólo dos símbolos, el proceso de complementación puede simplificarse aplicando cualquiera de los siguientes criterios:

- (3) La complementación a la base de un número binario expresado en notación complemento se obtiene manteniendo el mismo estado de los bits, a partir de la derecha hacia la izquierda, hasta encontrar el primer bit **1** (inclusive) e invirtiendo luego los bits restantes.
- (4) La complementación a la base de un número binario expresado en notación complemento se obtiene invirtiendo todos los bits del número y sumando **1** al resultado.
- (5) La complementación a la base menos uno de un número binario expresado en notación complemento se obtiene invirtiendo todos los bits del número.

En este ejemplo, que ilustra el complemento a la base, se aplicarán los métodos indicados en los puntos (1) y (3).

$$\begin{array}{rcll}
 (1) & -1 & \rightarrow & 1\ 1\ 1\ 1\ 1,1\ 1\ 1_2 \\
 & -N & \rightarrow & 0\ 1\ 0\ 0\ 1,1\ 0\ 1_2 \\
 & = & \rightarrow & 1\ 0\ 1\ 1\ 0,0\ 1\ 0_2 \\
 & +1 & \rightarrow & 1\ 0\ 1\ 1\ 0,0\ 1\ 1_2 & \rightarrow \bar{N} = \overline{01001,101}_2 = 10110,011_2 \\
 \\
 (3) & & & 0\ 1\ 0\ 0\ 1,1\ 0\ 1_2 & \rightarrow \bar{N} = \overline{01001,101}_2 = 10110,011_2
 \end{array}$$

Puede observarse que ambos métodos son completamente equivalentes, sin embargo, no debe olvidarse que el método (3) es sólo aplicable a **NÚMEROS BINARIOS en notación complemento**. Como detalle adicional nótese la especial configuración del valor [-1]. Al respecto, se puede expresar que en forma generalizada este valor, en cualquier base y notación complemento, adopta la forma

$$-1 = \underbrace{1(b-1)}_{k \text{ posiciones}} \underbrace{(b-1)\dots, (b-1)\dots (b-1)}_{f \text{ posiciones}} \quad \text{en } (b,k,f)_{NC}$$

E. Estándar IEEE 754

El estándar IEEE 754 para aritmética en coma flotante es el más extendido para la ejecución de operaciones en punto flotante. Este estándar especifica cuatro formatos de representación para valores en punto flotante: precisión simple (32 bits), precisión doble (64 bits), precisión simple extendida (≥ 43 bits) y precisión doble extendida (≥ 79 bits, usualmente implementada con 80 bits)

Precisión simple 32-bits

Un número en punto flotante de precisión simple se almacena en una palabra de 32 bits, con la siguiente estructura:

S	Exponente								Mantisa																						
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	8 bits								23 bits																						

Donde S es el bit de signo (0=Positivo; 1= Negativo)

Precisión doble 64-bits

Un número en punto flotante de precisión doble se almacena en una palabra de 64 bits, con la siguiente estructura:

S	Exponente																							Mantisa																																			
----------	------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Represente los números, dados con signo explícito, en los sistemas destino que se indican. Aplique el método de cambio de base apropiado en cada caso y utilice el criterio de aproximación que arroje el error más pequeño de representación.

Valor	Sistema Destino	Representación
a) $+10010111,1001101_2$	$(8,4,1)_{CS}$	
b) $-CED7,2101_{16}$	$(10,6,2)_{CS}$	
c) $-17777,053_8$	$(16,6,3)_{NC}$	
d) $+23,99_{10}$	$(2,6,4)_{NC}$	
e) $-10000,066_8$	$(10,5,2)_{NC}$	

4. La siguiente tabla presenta valores en sistemas con signo o notación complemento y números con signo explícito. Sabiendo esto, complete la tabla con las representaciones faltantes. Considere que los valores de k y f serán suficientes para la representación sin desborde.

	A Sistema $(b,k,f)_{CS}$	B Sistema $(b,k,f)_{NC}$	C N° con signo explícito
a)	$100101011,010_2$		
b)			$-16765,2137_8$
c)		$1999998,399_{10}$	
d)		$099FE,C9E_{16}$	

5. Represente el siguiente número, dado con signo explícito, en los sistemas CS y NC con bases 2, 8 y 16, considerando el mínimo valor de k posible, y un error de precisión < 5%

			$(2, k, f)$	$(8, k, f)$	$(16, k, f)$
Valor	$-76,74_{10}$	CS			
		NC			

6. Considerando la precisión especificada correspondiente al estándar IEEE 754, calcule los sesgos correspondientes, y luego determine el valor en exceso de los siguientes exponentes:

Exponente	Precisión Simple		Precisión Doble	
	Sesgo:		Sesgo:	
	Decimal	Binario Natural	Decimal	Binario Natural
		10000111		
				01111110110
			1030	
-11				

7. Dados los siguientes números en sistemas de notación complemento, indique el sistema $(b,k,f)_{NC}$ en el que están representados, determine el valor original (con signo explícito) y cambie el signo del número (representado en NC).

Número en Notación Complemento	Sistema $(b, k, f)_{NC}$	Valor con Signo Explícito	Cambio de signo
a) $011001010,101_2$			
b) $1773776,25_8$			
c) $09999,911_{10}$			
d) $1FFF63,A48_{16}$			

8. Represente los siguientes valores en el estándar IEEE 754, de acuerdo a la precisión indicada²:

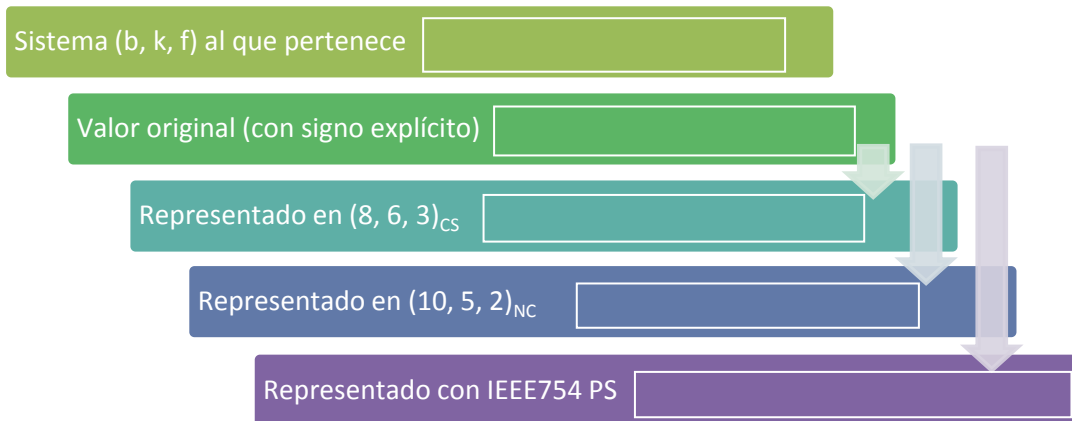
Número	Precisión	Representación IEEE754
a) $+1111100010,111_2$	Simple	
b) $-1773123237,44_8$	Doble	
d) $+98756,532_{10}$	Doble	
e) $-5A6,B3_{16}$	Simple	

9. Obtenga el valor decimal de los siguientes números representados en el estándar IEEE 754:

Número	Valor decimal
a) 11000100100111010000010100011110	
b) 0100000100110100100010011011101000001111010111000010100011110110	
c) 01000000110010100111011011001000	
d) 2EBEBEBA ₁₆	

* Nota: En el ítem d) se codificó en hexadecimal el valor representado en el estándar.

10. Dado el valor 1FF23,C9, indique a qué sistema (b,k,f)_{NC} pertenece y luego obtenga las diferentes representaciones que se solicitan:



PROBLEMAS ADICIONALES

11. Dado el número $-10,856_{10}$, represéntelo en las bases 2, 8 y 16, aplicando aritmética en base origen. Además calcule el error absoluto y relativo porcentual para cada dígito de la parte fraccionaria del número destino.

$-10,856_{10}$	Base 2		$-10,856_{10}$	Base 8		$-10,856_{10}$	Base 16	
	Error relativo	Error porcentual		Error relativo	Error porcentual		Error relativo	Error porcentual

12. El ISBN es un identificador único para libros. Este sistema asigna a cada libro una cadena alfanumérica única internacional que sirve para identificar sus datos básicos: título, editorial, tirada, extensión, materia, país, traductor, lengua original, y otros. Dado el siguiente ISBN (codificado en distintos sistemas) descubra a qué libro corresponde y en qué país se publicó.

ISBN	ISBN ₁₀	LIBRO	PAIS
3D2 ₁₆ -1733 ₈ - 11001001001 ₂ -06 ₁₀ -10 ₂			

² Precisión simple: 1 bit para el signo, 8 bits para el exponente y 23 para la mantisa
 Precisión doble: 1 bit para el signo, 11 bits para el exponente y 52 para la mantisa

13. Una agente secreto de la brigada de inteligencia interceptó una señal codificada con el estándar IEEE754. Esta señal contiene la clave para desactivar una inminente explosión en una sesión del honorable congreso. La agente sabe que la parte entera del valor transmitido (un número decimal de 4 dígitos, múltiplo de 4) es la clave. Sin embargo, el fragmento de la señal que corresponde al exponente está dañado lo que dificulta la decodificación. ¿Podrás ayudar a la agente a descubrir la clave y desactivar la bomba? ¿Cuál es el valor del exponente perdido?



Señal Interceptada
0XXXXXXXX10001110011011100111000

Clave de Desactivación: ????

14. Un número de 3 dígitos abre el candado. Para descubrir dicho código, representa en decimal cada número dado, codificado en distintos sistemas acotados, toma el valor absoluto de dicho número y luego sigue las pistas:

Número codificado	Sistema de representación	Decimal	Pistas	Código			
010101010	$(2,11)_{CS}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				Un número es correcto y está en la posición correcta.	
1146	$(8,4)_{SS}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				Un número es correcto, pero está en una posición incorrecta.	
434E0000	IEEE754 PS (expresado en hexadecimal)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				Dos números son correctos, pero están en posiciones incorrectas.	
1D1E	$(16,4)_{NC}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				Ningún número es correcto.	
31212	$(4,5)_{SS}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>				Un número es correcto, pero está en una posición incorrecta.	

15. Los aficionados a los números (matemática, física, astronomía, etc.) realizaron un ranking de los 10 números más famosos del mundo. A continuación se presentan los 10 números. Investigue los valores y complete el siguiente cuadro:

Número	Valor	Representar en	Representación
Nº de Avogadro (N_A)		IEEE754 PD	
Nº de Euler (e)		$(8,2,f)_{NC}$ *	
Constante cosmológica de Hubble (H_0)		$(10,3,1)_{CS}$	

Número	Valor	Representar en	Representación
Constante de Planck (h)		IEEE754 PS	
Unidad imaginaria (i)		-	
Proporción áurea (ϕ)		(16,2,10) _{CS}	
Constante de gravitación universal de Newton (G)		IEEE754 PS	
Constante de Boltzmann (k_B)		IEEE754 PS	
Pi (π)		(2,3,f) _{CS} **	
Velocidad de la luz (c)		(16,6,5) _{NC}	

* Calcule posiciones fraccionarias hasta encontrar un 0 (cero)

** Con error de aproximación menor al 30%

Referencias

- 📖 Martínez, Sergio L. Principios Digitales y Circuitos Lógicos. 2da Edición. Editorial de la Universidad Nacional de Jujuy EDIUNJU. 2010
- 📖 Wakerly, John F. Diseño digital. Principios y prácticas. 3ª edición. Ed. Prentice–Hall. 2001
- 📖 Flórez Fernández, Héctor Arturo. Diseño lógico: fundamentos de electrónica digital. Bogotá. Ediciones de la U. 2010.
- 📖 Tokheim, RogerL. Fundamentos de los Microprocesadores. Madrid. McGraw-Hill. 1992