



Contenido

James Monroe Gere (1925-2008) ix

Créditos de fotografías x

Prefacio xi

Símbolos xv

Alfabeto griego xviii

1 Tensión, compresión y cortante 2

- 1.1 Introducción a la mecánica de materiales 5
 - 1.2 Esfuerzo normal y deformación unitaria normal 7
 - 1.3 Propiedades mecánicas de los materiales 15
 - 1.4 Elasticidad, plasticidad y termofluencia 24
 - 1.5 Elasticidad lineal, ley de Hooke y relación de Poisson 27
 - 1.6 Esfuerzo cortante y deformación unitaria cortante 32
 - 1.7 Esfuerzos y cargas permisibles 43
 - 1.8 Diseño por cargas axiales y cortante directo 49
- Resumen y repaso del capítulo 55
- Problemas del capítulo 1 57*

2 Elementos cargados axialmente 88

- 2.1 Introducción 91
- 2.2 Cambios de longitud de elementos cargados axialmente 91
- 2.3 Cambios de longitud en condiciones no uniformes 100
- 2.4 Estructuras estáticamente indeterminadas 107
- 2.5 Efectos térmicos, desajustes y deformaciones previas 116
- 2.6 Esfuerzos sobre secciones inclinadas 128
- 2.7 Energía de deformación 140
- *2.8 Carga de impacto 153
- *2.9 Carga repetida y fatiga 162
- *2.10 Concentraciones de esfuerzos 164
- *2.11 Comportamiento no lineal 170

*Especializado y/o temas avanzados.

*2.12	Análisis elastoplástico	175
	Resumen y repaso del capítulo	181
	<i>Problemas del capítulo 2</i>	182

3 Torsión 220

3.1	Introducción	222
3.2	Deformaciones torsionantes de una barra circular	223
3.3	Barras circulares de materiales linealmente elásticos	226
3.4	Torsión no uniforme	238
3.5	Esfuerzos y deformaciones unitarias en cortante puro	245
3.6	Relación entre los módulos de elasticidad E y G	252
3.7	Transmisión de potencia por ejes circulares	254
3.8	Elementos de torsión estáticamente indeterminados	259
3.9	Energía de deformación en torsión y cortante puro	263
3.10	Tubos de pared delgada	270
*3.11	Concentraciones de esfuerzos en torsión	279
	Resumen y repaso del capítulo	282
	<i>Problemas del capítulo 3</i>	283

4 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes 304

4.1	Introducción	306
4.2	Tipos de vigas, cargas y reacciones	306
4.3	Fuerzas cortantes y momentos flexionantes	313
4.4	Relaciones entre cargas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes	320
4.5	Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante	325
	Resumen y repaso del capítulo	337
	<i>Problemas del capítulo 4</i>	338

5 Esfuerzos en vigas (temas básicos) 350

5.1	Introducción	353
5.2	Flexión pura y flexión no uniforme	353
5.3	Curvatura de una viga	354
5.4	Deformaciones unitarias longitudinales en vigas	356
5.5	Esfuerzos normales en vigas (materiales linealmente elásticos)	361
5.6	Diseño de vigas para esfuerzos de flexión	374
5.7	Vigas no prismáticas	383
5.8	Esfuerzos cortantes en vigas con sección transversal rectangular	387

*Especializado y/o temas avanzados.

5.9	Esfuerzos cortantes en vigas con sección transversal circular	397
5.10	Esfuerzos cortantes en las almas de vigas con patines	400
**5.11	Trabes armadas y flujo cortante	408
**5.12	Vigas con cargas axiales	412
**5.13	Concentraciones de esfuerzos en flexión	418
	Resumen y repaso del capítulo	421
	<i>Problemas del capítulo 5</i>	424

6 Esfuerzos en vigas (temas avanzados) 454

6.1	Introducción	457
6.2	Vigas compuestas	457
6.3	Método de la sección transformada	466
6.4	Vigas doblemente simétricas con cargas inclinadas	472
6.5	Flexión de vigas asimétricas	479
6.6	Concepto de centro de cortante	487
6.7	Esfuerzos cortantes en vigas con secciones transversales abiertas de pared delgada	489
6.8	Esfuerzos cortantes en vigas de patín ancho	492
6.9	Centros de cortante en secciones abiertas de pared delgada	496
**6.10	Flexión elastoplástica	504
	Resumen y repaso del capítulo	514
	<i>Problemas del capítulo 6</i>	516

7 Análisis de esfuerzo y deformación unitaria 536

7.1	Introducción	539
7.2	Esfuerzo plano	540
7.3	Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos	548
7.4	Círculo de Mohr para esfuerzo plano	558
7.5	Ley de Hooke para esfuerzo plano	575
7.6	Esfuerzo triaxial	580
7.7	Deformación unitaria plana	584
	Resumen y repaso del capítulo	600
	<i>Problemas del capítulo 7</i>	602

8 Aplicaciones del esfuerzo plano (recipientes a presión, vigas y cargas combinadas) 618

8.1	Introducción	621
8.2	Recipientes esféricos a presión	621
8.3	Recipientes cilíndricos a presión	627

- 8.4 Esfuerzos máximos en vigas 635
- 8.5 Cargas combinadas 645
- Resumen y repaso del capítulo 661
- Problemas del capítulo 8* 663

9 Deflexiones de vigas 676

- 9.1 Introducción 679
- 9.2 Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión 679
- 9.3 Deflexiones por integración de la ecuación del momento flexionante 685
- 9.4 Deflexiones por integración de las ecuaciones de la fuerza cortante y de la carga 696
- 9.5 Método de superposición 702
- 9.6 Método de área-momento 711
- 9.7 Vigas no prismáticas 720
- 9.8 Energía de deformación por flexión 725
- **9.9 Teorema de Castigliano 731
- **9.10 Deflexiones producidas por impacto 744
- **9.11 Efectos de la temperatura 746
- Resumen y repaso del capítulo 749
- Problemas del capítulo 9* 751

10 Vigas estáticamente indeterminadas 770

- 10.1 Introducción 773
- 10.2 Tipos de vigas estáticamente indeterminadas 773
- 10.3 Análisis de la curva de deflexión con las ecuaciones diferenciales 777
- 10.4 Método de superposición 784
- **10.5 Efectos de la temperatura 797
- **10.6 Desplazamientos longitudinales en los extremos de una viga 801
- Resumen y repaso del capítulo 805
- Problemas del capítulo 10* 806

11 Columnas 816

- 11.1 Introducción 819
- 11.2 Pandeo y estabilidad 819
- 11.3 Columnas con extremos articulados 823
- 11.4 Columnas con otras condiciones de soporte 834

11.5	Columnas con cargas axiales excéntricas	845
11.6	Fórmula de la secante para columnas	850
11.7	Comportamiento elástico e inelástico de columnas	856
11.8	Pandeo inelástico	858
11.9	Fórmulas para diseño de columnas	863
	Resumen y repaso del capítulo	882
	<i>Problemas del capítulo 11</i>	883
<hr/>		
12	Repaso de centroides y momentos de inercia	900
<hr/>		
12.1	Introducción	902
12.2	Centroides de áreas planas	902
12.3	Centroides de áreas compuestas	905
12.4	Momentos de inercia de áreas planas	909
12.5	Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia	912
12.6	Momentos polares de inercia	916
12.7	Productos de inercia	918
12.8	Rotación de ejes	921
12.9	Ejes principales y momentos de inercia principales	923
	<i>Problemas del capítulo 12</i>	927
<hr/>		
	Referencias y notas históricas	935
	Apéndice A Sistemas de unidades y factores de conversión	943
A.1	Sistemas de unidades	943
A.2	Unidades SI	944
A.3	Unidades inglesas habituales	950
A.4	Unidades de temperatura	952
A.5	Conversión entre unidades	953
	Apéndice B Resolución de problemas	956
B.1	Tipos de problemas	956
B.2	Pasos en la resolución de problemas	957
B.3	Homogeneidad dimensional	958
B.4	Cifras significativas	959
B.5	Redondeo de números	961
	Apéndice C Fórmulas matemáticas	962
	Apéndice D Propiedades de áreas planas	966

Apéndice E	Propiedades de los perfiles estructurales de acero	972
Apéndice F	Propiedades de la madera estructural	983
Apéndice G	Deflexiones y pendientes de vigas	984
Apéndice H	Propiedades de los materiales	990
	Respuestas a los problemas	995
	Índice onomástico	1016
	Índice	1017



Prefacio

La **mecánica de materiales** es un tema básico de ingeniería que debe comprender quien tenga interés en la resistencia y el desempeño físico de las estructuras, sean hechas por el hombre o naturales. **La materia incluye conceptos fundamentales como esfuerzos y deformaciones unitarias, deformaciones y desplazamientos, elasticidad e inelasticidad, energía de deformación y capacidad de carga. En estos conceptos se basa el diseño y análisis de una gran variedad de sistemas mecánicos y estructurales.**

En el nivel universitario la mecánica de materiales por lo general se enseña durante los primeros años. La materia es un requisito para la mayoría de los alumnos de ingeniería mecánica, estructural, civil, biomédica, aeronáutica y aeroespacial. Además, muchos estudiantes de campos tan diversos como ciencia de materiales, ingeniería industrial, arquitectura e ingeniería agrícola también encuentran útil estudiar este tema.

Acerca de este libro

Los temas principales que se estudian en este libro son el análisis y diseño de elementos estructurales sometidos a tensión, compresión, torsión y flexión, incluidos los conceptos fundamentales mencionados en el primer párrafo. Otros temas de interés general son las transformaciones de esfuerzo y deformación unitaria, cargas combinadas, concentraciones de esfuerzo, deflexiones de vigas y estabilidad de columnas.

Entre los temas especializados se incluyen los siguientes: efectos térmicos, cargas dinámicas, elementos no prismáticos, vigas de dos materiales, centros de cortante, recipientes a presión y vigas estáticamente indeterminadas. Para mayor alcance y referencia ocasional, también se incluyen temas elementales como fuerzas cortantes, momentos flexionantes, centroides y momentos de inercia. Como ayuda para el lector estudiante, cada capítulo inicia con los *Aspectos generales del capítulo* y termina con un *Resumen y repaso del capítulo* en donde se destacan los puntos clave presentados en el capítulo para un repaso rápido (en preparación para exámenes sobre el material). Cada capítulo también empieza con una fotografía de un componente o de una estructura que ilustra los conceptos clave que se estudiarán en ese capítulo.

El libro incluye mucho más material del que se puede enseñar en un solo curso, de modo que los maestros tienen la oportunidad de seleccionar los temas que quieran exponer. Como una guía, algunos de los temas más especializados se identifican con una estrella en la tabla de contenido.

Se ha hecho un esfuerzo considerable para revisar y corregir las pruebas del texto para eliminar errores, pero si encontrara alguno, sin importar

lo trivial que sea, por favor notifíqueme por correo electrónico (bgoodno@ce.gatech.edu), para que podamos corregir cualquier error en la siguiente reimpresión.

Ejemplos

En todo el libro se presentan ejemplos para ilustrar los conceptos teóricos y mostrar cómo se pueden emplear en situaciones prácticas. En algunos casos se han agregado fotografías que muestran las estructuras o componentes reales en ingeniería para reforzar el vínculo entre teoría y aplicación. Los ejemplos varían en extensión de una o cuatro páginas, dependiendo de la complejidad del material que se ilustra. Cuando el énfasis recae sobre los conceptos, los ejemplos se resuelven en términos simbólicos para ilustrar mejor las ideas y cuando el énfasis se centra en la resolución de problemas, los ejemplos son de carácter numérico. En ejemplos seleccionados en todo el libro se ha agregado una representación gráfica de los resultados (por ejemplo, esfuerzos en vigas) para destacar la comprensión del estudiante de los resultados del problema.

Problemas

En todos los cursos de mecánica, la resolución de problemas es una parte importante del proceso de aprendizaje. Este libro ofrece más de 1000 problemas de tarea y de análisis en el aula. En esta séptima edición casi 40 por ciento de ellos son nuevos o han sido revisados de manera significativa. Los problemas se encuentran al final del cada capítulo de manera que se puedan encontrar con facilidad y no interrumpen la presentación del tema principal. Además, los problemas muy difíciles o extensos se indican con una o más estrellas (dependiendo del grado de dificultad) en el número del problema, alertando así a los estudiantes del tiempo necesario para su resolución. En general los problemas se presentan en orden de dificultad. Las respuestas para todos los problemas se encuentran cerca del final del libro.

Unidades

En los ejemplos y problemas se utilizan tanto el sistema internacional de unidades (SI) como el sistema inglés de uso acostumbrado en Estados Unidos. En el apéndice A se explican los dos sistemas y se da una tabla de factores de conversión. Para los problemas que comprenden resoluciones numéricas, los problemas impares están en unidades inglesas y los pares en unidades SI. Esta convención facilita saber de antemano qué sistema de unidades se usa en cualquier problema particular. Además, en el apéndice E se han agregado tablas que contienen propiedades de perfiles estructurales de acero tanto en unidades inglesas como en SI, de manera que la resolución de análisis de vigas y de los ejemplos de diseño y los problemas al final de cada capítulo se pueda llevar a cabo en unidades inglesas o SI.

Referencias y notas históricas

Inmediatamente después del último capítulo del libro se encuentran las referencias y notas históricas que consisten en fuentes originales para el tema

en cuestión más información biográfica breve acerca de los científicos, ingenieros y matemáticos precursores, fundadores del campo de la mecánica de materiales. Un índice onomástico facilita consultar cualquiera de estos personajes históricos.

Apéndices

El material de referencia aparece en los apéndices al final del libro. Gran parte del material se da en tablas: propiedades de áreas planas, propiedades de perfiles estructurales de acero, propiedades de la madera estructural, deflexiones y pendientes de vigas y propiedades de materiales (apéndices D a H, respectivamente).

En cambio, los apéndices A y B son descriptivos; el primero da una descripción detallada de los sistemas de unidades SI e inglés y el segundo presenta la metodología para resolver problemas en mecánica. En el último se abordan temas como consistencia dimensional y cifras significativas. Por último, el apéndice C, de referencia rápida, proporciona una lista de las fórmulas matemáticas de uso común.

S.P. Timoshenko (1878-1972) y J.M. Gere (1925-2008)

Muchos lectores de este libro reconocerán el nombre de Stephen P. Timoshenko que probablemente sea el más famoso en el campo de la mecánica aplicada. Timoshenko es reconocido en general como el precursor más extraordinario del mundo en mecánica aplicada. Contribuyó con muchas ideas y conceptos nuevos y se hizo famoso tanto por su erudición como por su enseñanza. A través de sus numerosos libros ejerció un efecto profundo en la enseñanza de la mecánica no sólo en este país sino en cualquier parte donde se estudie la mecánica. Timoshenko fue maestro y mentor de James Gere y estimuló la primera edición de este libro de la autoría de James M. Gere, publicada en 1972; la segunda edición y cada subsiguiente de este libro fueron escritas por James Gere durante el transcurso de su larga y distinguida carrera como autor, educador e investigador en la Stanford University. James Gere empezó sus estudios de doctorado en la Stanford University en 1952, de donde se jubiló como profesor en 1988 después de haber escrito éste y otros ocho libros bien conocidos sobre mecánica e ingeniería estructural y sísmica. Permaneció activo en la Stanford University como Profesor Emérito hasta su deceso en enero de 2008.

Al final del libro en la primera referencia se presenta una biografía breve de Timoshenko y en la edición de agosto de 2007 de la revista *STRUCTURE* aparece un artículo intitulado “*Stephen P. Timoshenko: Father of Engineering Mechanics in the U.S.*” de Richard G. Weingardt, P.E. Este artículo proporciona una perspectiva histórica excelente sobre éste y muchos otros libros sobre ingeniería mecánica escritos por estos autores.

Agradecimientos

Es imposible agradecer a todos los que contribuyeron de alguna manera en este libro, pero tengo una gran deuda con mis profesores de la Stanford University, en especial con mi mentor, amigo y autor principal, James M. Gere.

También estoy en deuda con los muchos maestros de mecánica y los revisores del libro que ayudaron a conformarlos en sus varias ediciones al paso de los años. Con cada nueva edición, sus consejos y sugerencias han resultado en mejoras significativas tanto en el contenido como en la pedagogía.

También quiero agradecer a mis colegas de ingeniería estructural y mecánica del Georgia Institute of Technology: James Craig, Reggie Des-Roches, Mulalo Doyoyo, Bruce Ellingwood, Leroy Emkin, Rami Haj-Ali, Larry Jacobs, Larry Kahn, Kim Kurtis, Roberto Leon, Yang Wang, Don White, Kenneth (Mac) Will, Arash Yavari y Abdul Zureick. Un agradecimiento especial para Jim Craig, Rami Haj-Ali, Larry Jacobs, Larry Kahn, Roberto Leon, Don White, Mac Will y Abdul Zureick, quienes me dieron valiosos consejos sobre varios aspectos de las revisiones y adiciones que condujeron a la séptima edición. Es un privilegio trabajar con todos estos educadores y poder aprender de ellos en las interacciones y discusiones casi diarias acerca de la ingeniería estructural y mecánica en el contexto de la investigación y educación superior.

Dos de mis asistentes de investigación, el señor Kanoknart Leelardcharoen y la señora Jee-Eun Hur, aportaron una ayuda invaluable al evaluar y resolver muchos de los problemas nuevos y revisados. Su atención al detalle fue una contribución importante para esta edición.

Los aspectos de edición y producción del libro siempre estuvieron en manos habilidosas y experimentadas, gracias al personal talentoso y erudito de Cengage Learning (antes Thompson Learning). Su objetivo fue el mismo que el mío, producir la séptima edición mejor posible de este libro, sin comprometer ningún aspecto de éste.

La gente con la que he tenido contacto personal en Cengage Learning son Christopher Carson, Director, del Global Engineering Program Cengage Learning, quien, junto con Jim Gere, ayudaron a involucrarme y luego me guiaron en el proyecto; Hilda Gowans, Senior Developmental Editor en el área de Ingeniería de Cengage Learning, quien siempre estuvo disponible para darme información y ánimo; Nicola Winstanley quien administró todos los aspectos de la nueva selección de fotografías; Andrew Adams, quien elaboró las cubiertas; Peter Papayanakis, que diseñó el interior del libro y Lauren Betsos, Global Marketing Services Coordinator, que desarrolló material promocional de apoyo para el libro. Quiero de manera personal reconocer el trabajo de Rose Kerman de RPK Editorial Services, que editó el manuscrito y compuso las páginas. A cada uno de estos individuos les expreso mi más sincero agradecimiento no sólo por un trabajo bien realizado, sino también por la manera amistosa y considerada de hacerlo.

Estoy muy agradecido por la paciencia y el aliento proporcionados por mi familia, en especial mi esposa, Lana, durante todo este proyecto.

Por último, me siento muy honrado y complacido de estar involucrado en este proyecto, por la invitación de mi mentor y amigo desde hace 30 años, Jim Gere, que amplía este libro hacia la marca de los 40 años. Yo también estoy comprometido con la excelencia continua de este libro y agradeceré todo tipo de comentarios y sugerencias. Por favor siéntase en libertad de expresarme sus comentarios críticos en *bgoodno@ce.gatech.edu*.

BARRY J. GOODNO
Atlanta, Georgia

Símbolos



A	área
A_f, A_w	área de un patín; área del alma
a, b, c	dimensiones, distancias
C	centroide, fuerza de compresión, constante de integración
c	distancia del eje neutro a la superficie exterior de una viga
D	diámetro
d	diámetro, dimensión, distancia
E	módulo de elasticidad
E_r, E_t	módulo de elasticidad reducido; módulo de elasticidad tangente
e	excentricidad, dimensión, distancia, cambio de volumen unitario (dilatación)
F	fuerza
f	flujo cortante, factor de forma para flexión plástica, flexibilidad, frecuencia (Hz)
f_T	flexibilidad torsional de una barra
G	módulo de elasticidad en cortante
g	aceleración de la gravedad
H	altura, distancia, fuerza o reacción horizontal, caballo de potencia
h	altura, dimensiones
I	momento de inercia (o segundo momento) de un área plana
I_x, I_y, I_z	momentos de inercia con respecto a los ejes x , y y z
I_{x1}, I_{y1}	momentos de inercia con respecto a los ejes x_1 y y_1 (ejes girados)
I_{xy}	producto de inercia con respecto a los ejes xy
I_{x1y1}	producto de inercia con respecto a los ejes x_1, y_1 (ejes girados)
I_p	momento polar de inercia
I_1, I_2	momentos principales de inercia
J	constante de torsión
K	factor de concentración de esfuerzo, módulo de elasticidad volumétrico, factor de longitud efectiva para una columna
k	constante de resorte, rigidez, símbolo para $\sqrt{P/EI}$

k_T	rigidez a la torsión de una barra
L	longitud, distancia
L_E	longitud efectiva de una columna
\ln, \log	logaritmo natural (base e); logaritmo común (base 10)
M	momento flexionante, par, masa
M_p, M_Y	momento plástico para una viga; momento de fluencia para una viga
m	momento por unidad de longitud, masa por unidad de longitud
N	fuerza axial
n	factor de seguridad, entero, revoluciones por minuto (rpm)
O	origen de coordenadas
O'	centro de curvatura
P	fuerza, carga concentrada, potencia
P_{perm}	carga permisible (o carga de trabajo)
P_{cr}	carga crítica para una columna
P_p	carga plástica para una estructura
P_r, P_t	carga de módulo reducido para una columna; carga de módulo tangente para una columna
P_Y	carga de fluencia para una estructura
p	presión (fuerza por unidad de área)
Q	fuerza, carga concentrada, momento estático de un área plana
q	intensidad de carga distribuida (fuerza por unidad de distancia)
R	reacción, radio
r	radio, radio de giro ($r = \sqrt{I/A}$)
S	módulo de sección de la sección transversal de una viga, centro de cortante
s	distancia, distancia a lo largo de una curva
T	fuerza de tensión, par de torsión, temperatura
T_p, T_Y	par de torsión plástico; par de torsión de fluencia
t	espesor, tiempo, intensidad de par de torsión (par de torsión por unidad de distancia)
t_p, t_w	espesor del patín; espesor del alma
U	energía de deformación
u	densidad de energía de deformación (energía de deformación por unidad de volumen)
u_r, u_t	módulo de resistencia; módulo de tenacidad
V	fuerza cortante, volumen, fuerza vertical o reacción
v	deflexión de una viga, velocidad
$v', v'', \text{etc.}$	$dv/dx, d^2v/dx^2, \text{etc.}$
W	fuerza, peso, trabajo
w	carga por unidad de área (fuerza por unidad de área)
x, y, z	ejes rectangulares (origen en el punto O)
x_c, y_c, z_c	ejes rectangulares (origen en el centroide C)

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	coordenadas del centroide
Z	módulo plástico de la sección transversal de una viga
α	ángulo, coeficiente de dilatación térmica, razón adimensional
β	ángulo, razón adimensional, constante de resorte, rigidez
β_R	rigidez a la rotación de un resorte
γ	deformación unitaria por esfuerzo cortante, densidad de peso (peso por unidad de volumen)
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	deformaciones unitarias por esfuerzos cortantes en los planos xy , yz y zx
$\gamma_{x_1y_1}$	deformación unitaria por esfuerzo cortante con respecto a los ejes x_1y_1 (ejes girados)
γ_θ	deformación por esfuerzo cortante para ejes inclinados
δ	deflexión de una viga, desplazamiento, alargamiento de una barra o un resorte
ΔT	diferencial de temperatura
δ_p, δ_Y	desplazamiento plástico, desplazamiento de fluencia
ϵ	deformación unitaria normal
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	deformaciones unitarias normales en las direcciones x , y y z
$\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}$	deformaciones unitarias normales en las direcciones x_1 y y_1 (ejes girados)
ϵ_θ	deformación unitaria normal para ejes inclinados
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	deformaciones unitarias normales principales
ϵ'	deformación unitaria lateral en esfuerzo uniaxial
ϵ_T	deformación unitaria térmica
ϵ_Y	deformación unitaria de fluencia
θ	ángulo, ángulo de rotación del eje de una viga, razón de torsión de una barra en torsión (ángulo de torsión por unidad de longitud)
θ_p	ángulo con respecto a un plano principal o a un eje principal
θ_s	ángulo con respecto a un plano de esfuerzo cortante máximo
κ	curvatura ($\kappa = 1/\rho$)
λ	distancia, acortamiento por curvatura
ν	relación de Poisson
ρ	radio, radio de curvatura ($\rho = 1/\kappa$), distancia radial en coordenadas polares, densidad de masa (masa por unidad de volumen)
σ	esfuerzo normal
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	esfuerzos normales sobre planos perpendiculares a los ejes x , y y z
$\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}$	esfuerzos normales sobre los planos perpendiculares a los ejes x_1y_1 (ejes girados)
σ_θ	esfuerzo normal sobre un plano inclinado
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	esfuerzos normales principales
σ_{perm}	esfuerzo permisible (o esfuerzo de trabajo)
σ_{cr}	esfuerzo crítico para una columna ($\sigma_{cr} = P_{cr}/A$)
σ_{pl}	esfuerzo en el límite de proporcionalidad
σ_r	esfuerzo residual
σ_T	esfuerzo térmico
σ_U, σ_Y	esfuerzo último; esfuerzo de fluencia

τ	esfuerzo cortante
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares a los ejes x, y y z actuando paralelos a los ejes y, z y x
$\tau_{x_1y_1}$	esfuerzo cortante sobre un plano perpendicular al eje x_1 y actuando paralelo al eje y_1 (ejes girados)
τ_θ	esfuerzo cortante sobre un plano inclinado
τ_{perm}	esfuerzo permisible (o esfuerzo de trabajo) en cortante
τ_U, τ_Y	esfuerzo último en cortante; esfuerzo de fluencia en cortante
ϕ	ángulo, ángulo de torsión de una barra en torsión
ψ	ángulo, ángulo de rotación
ω	velocidad angular, frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$)

*Una estrella junto a un número de sección indica que se trata de un tema especializado o avanzado. Una o más estrellas anexas a un número de problema indican un nivel creciente de dificultad en su resolución.

Alfabeto griego

A	α	Alfa	N	ν	Ni
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gama	O	o	Ómicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Épsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Fi
K	κ	Kappa	X	χ	Ji
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mi	Ω	ω	Omega

Mecánica de materiales



Esta torre de telecomunicaciones es un conjunto de muchos elementos que trabajan principalmente en tensión y compresión.

Tensión, compresión y cortante

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presenta una introducción a la mecánica de materiales, que analiza los *esfuerzos*, las *deformaciones unitarias* y los *desplazamientos* en barras de diferentes materiales sometidas a cargas axiales aplicadas en los centroides de sus secciones transversales. Aprenderemos acerca del *esfuerzo normal* (σ) y la *deformación unitaria normal* (ϵ) en materiales empleados en aplicaciones estructurales, luego identificaremos las propiedades clave de diversos materiales, como el módulo de elasticidad (E), la fluencia (σ_y) y los esfuerzos de rotura (σ_u), a partir de gráficas del esfuerzo (σ) en función de la deformación unitaria (ϵ). También graficaremos el esfuerzo cortante (τ) en función de la deformación unitaria por esfuerzo cortante (γ) e identificaremos el coeficiente de elasticidad en cortante (G). Si estos materiales sólo se desempeñan en el modo elástico, el esfuerzo y la deformación unitaria están relacionadas por la ley de Hooke para esfuerzo normal y deformación unitaria normal ($\sigma = E \cdot \epsilon$) y también para el esfuerzo cortante y la deformación unitaria en cortante ($\tau = G \cdot \gamma$). Veremos que los cambios en las dimensiones laterales y en el volumen dependen de la relación de Poisson (ν). De hecho, las propiedades de los materiales E , G y ν , están directamente relacionadas entre sí y no son propiedades independientes del material.

El ensambaje de barras para formar estructuras (como armaduras) nos lleva a considerar los esfuerzos cortante promedio (τ) y de aplastamiento (σ_b) en sus conexiones, así como los esfuerzos normales que actúan sobre el área neta de la sección transversal (si está en tensión) o sobre toda el área de la sección transversal (si está en compresión). Si restringimos los esfuerzos máximos en cualquier punto a valores *permisibles* mediante el uso de factores de seguridad, podemos identificar los niveles permisibles de las cargas axiales para sistemas simples, como cables y barras. Los *factores de seguridad* relacionan la resistencia real con la requerida de los elementos estructurales, y consideran una variedad de incertidumbres, como variaciones en las propiedades del material y la probabilidad de una sobrecarga accidental. Por último, consideraremos el *diseño*: que es el proceso iterativo mediante el cual se determina el tamaño apropiado de los elementos estructurales para cumplir con una variedad de *requisitos* tanto de *resistencia* como de *rigidez* para una estructura particular sometida a una variedad de cargas diferentes.

El capítulo 1 está organizado como sigue:

- 1.1** Introducción a la mecánica de materiales 5
 - 1.2** Esfuerzo normal y deformación unitaria normal 7
 - 1.3** Propiedades mecánicas de los materiales 15
 - 1.4** Elasticidad, plasticidad y termofluencia 24
 - 1.5** Elasticidad lineal, ley de Hooke y relación de Poisson 27
 - 1.6** Esfuerzo cortante y deformación unitaria cortante 32
 - 1.7** Esfuerzos y cargas permisibles 43
 - 1.8** Diseño por cargas axiales y cortante directo 49
- Resumen y repaso del capítulo 55
- Problemas* 57

1.1 INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE MATERIALES

La **mecánica de materiales** es una rama de la mecánica aplicada que trata del comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a diversas cargas. Otros nombres para este campo de estudio son *resistencia de materiales* y *mecánica de los cuerpos deformables*. Los cuerpos sólidos considerados en este libro incluyen barras sometidas a cargas axiales, ejes en torsión, vigas en flexión y columnas en compresión.

El objetivo principal de la mecánica de materiales es determinar los esfuerzos, las deformaciones unitarias y los desplazamientos en estructuras y sus componentes debidas a las cargas que actúan sobre ellas. Si podemos determinar estas cantidades para todos los valores de las cargas incluyendo las que causan la falla, tendremos una representación completa del comportamiento mecánico de esas estructuras.

Comprender el comportamiento mecánico es esencial para el diseño seguro de todos los tipos de estructuras, ya sean aeroplanos y antenas, edificios y puentes, máquinas y motores o barcos y naves espaciales. Esta es la razón por la cual la mecánica de materiales es una disciplina básica en muchos campos de la ingeniería. La estática y la dinámica también son esenciales, pero estos temas tratan principalmente con las fuerzas y los movimientos asociados con partículas y cuerpos rígidos. En la mecánica de materiales vamos un paso más allá al analizar los esfuerzos y las deformaciones unitarias dentro de cuerpos reales; es decir, cuerpos de dimensiones finitas que se deforman con cargas. Para determinar los esfuerzos y las deformaciones unitarias, empleamos las propiedades físicas de los materiales, así como numerosas leyes y conceptos teóricos.

Los análisis teóricos y los resultados experimentales desempeñan papeles igualmente importantes en la mecánica de materiales. Empleamos teorías para deducir fórmulas y ecuaciones para predecir el comportamiento mecánico, pero no se pueden usar esas expresiones en un diseño práctico, a menos que se conozcan las propiedades físicas de los materiales. Esas propiedades se conocen sólo después de que se han efectuado experimentos cuidadosos en el laboratorio. Además, no todos los problemas prácticos facilitan al análisis teórico y en esos casos las pruebas físicas son una necesidad.

El desarrollo histórico de la mecánica de materiales es una mezcla fascinante tanto de teoría como de experimentación, la teoría ha señalado el camino para obtener resultados útiles en algunos casos y la experimentación lo ha hecho en otros. Algunos personajes famosos como Leonardo da Vinci (1452-1519) y Galileo Galilei (1564-1642) realizaron experimentos para determinar la resistencia de alambres, barras y vigas, si bien no desarrollaron teorías adecuadas (con respecto a las normas actuales) para explicar los resultados de sus pruebas. En contraste, el famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783) desarrolló la teoría matemática de las columnas y en 1744 calculó la carga crítica de una columna, mucho antes que existiera alguna evidencia experimental que demostrara la importancia de sus resultados. Sin ensayos apropiados para apoyar sus teorías, los resultados de Euler permanecieron sin usarse durante más de cien años, aunque en la actualidad constituyen la base del diseño y análisis de la mayoría de las columnas.*

*La historia de la mecánica de materiales, iniciando con Leonardo da Vinci y Galileo Galilei, se encuentra en las referencias 1-1, 1-2 y 1-3.

Problemas

Al estudiar la mecánica de materiales descubrirá que el tema está dividido de manera natural en dos partes: primero, en comprender el desarrollo de los conceptos y segundo, aplicar estos conceptos a situaciones prácticas. Lo primero se logra estudiando las deducciones, explicaciones y ejemplos que aparecen en cada capítulo, y lo segundo se logra resolviendo los problemas al final de cada capítulo. Algunos de los problemas son de carácter numérico y otros son simbólicos (o algebraicos).

Una ventaja de los *problemas numéricos* es que las magnitudes de todas las cantidades son evidentes en cada etapa de los cálculos, lo que permite observar si los valores son razonables o no. La ventaja principal de los *problemas simbólicos* es que conducen a fórmulas de propósito general. Una fórmula presenta las variables que afectan los resultados finales; por ejemplo, en la solución es posible cancelar una cantidad, un hecho que no sería evidente en una solución numérica. Además, una solución algebraica muestra la manera en que cada variable afecta los resultados, como cuando una variable aparece en el numerador y otra en el denominador. Además, una solución simbólica permite comprobar las dimensiones en cada etapa del trabajo.

Por último, la razón más importante para resolver problemas de manera algebraica es obtener una fórmula general que se pueda emplear para muchos problemas diferentes. En contraste, una solución numérica sólo se aplica a un conjunto de circunstancias. Como los ingenieros deben ser expertos en las dos clases de soluciones, usted encontrará una mezcla de problemas numéricos y simbólicos en todo el libro.

Los problemas numéricos requieren trabajar con unidades específicas de medida. De acuerdo con la práctica actual de la ingeniería moderna, en este libro se utiliza tanto el Sistema Internacional de unidades (SI) como el sistema inglés (acostumbrado en Estados Unidos). En el apéndice A se encuentra una descripción de los dos sistemas, donde también se encuentran muchas tablas útiles, incluida una de factores de conversión.

Todos los problemas se localizan al final de los capítulos con sus números respectivos y los números subsiguientes identifican las secciones a que pertenecen. En el caso de los problemas que requieren soluciones numéricas, los problemas impares están planteados en unidades inglesas y los pares en unidades SI.

En el apéndice B se describen con detalle las técnicas para resolver problemas, además de una lista de procedimientos ingenieriles sólidos. El apéndice B incluye secciones sobre homogeneidad dimensional y cifras significativas. Estos temas son especialmente importantes, debido a que cada ecuación debe ser homogénea dimensionalmente y cada resultado numérico debe expresarse con el número adecuado de dígitos significativos. En este libro los resultados numéricos finales, en general, se presentan con tres dígitos significativos, cuando un número inicia con los dígitos 2 al 9, y con cuatro dígitos significativos cuando un número principia con el dígito 1. Con frecuencia los valores intermedios se registran con dígitos adicionales para evitar perder precisión debido al redondeo de números.

1.2 ESFUERZO NORMAL Y DEFORMACIÓN UNITARIA NORMAL

Los conceptos fundamentales en mecánica de materiales son el **esfuerzo** y la **deformación unitaria**. Estos conceptos se pueden ilustrar en su forma más elemental considerando una barra prismática sometida a fuerzas axiales. Una **barra prismática** es un elemento estructural recto que tiene la misma sección transversal en toda su longitud y una **fuerza axial** es una carga dirigida a lo largo del eje del elemento, lo que resulta en esfuerzos de tensión o de compresión en la barra. En la figura 1.1 se muestran ejemplos donde la barra de arrastre es un elemento prismático en tensión y el puntal del tren de aterrizaje es un elemento en compresión. Otros ejemplos son los elementos de la armadura de un puente, las bielas en motores de automóviles, los rayos de las ruedas de bicicletas, las columnas en edificios y los puntales de las alas de aviones pequeños.

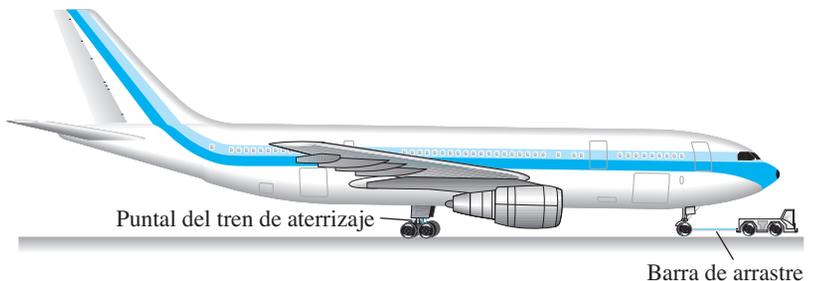
Para fines explicativos, consideremos la barra de arrastre de la figura 1.1 y aislemos un segmento de ella como un cuerpo libre (figura 1.2a). Al dibujar este diagrama de cuerpo libre no tomamos en cuenta el peso de la barra misma y suponemos que las únicas fuerzas activas son las fuerzas axiales P en los extremos. Luego, consideramos dos vistas de la barra; la primera muestra la misma barra *antes* de la aplicación de las cargas (figura 1.2b) y la segunda la muestra *después* de aplicar las cargas (figura 1.2c). Observe que la longitud original de la barra se denota con la letra L y el incremento en longitud debido a las cargas se denota con la letra griega δ (delta).

Las fuerzas internas en la barra quedan expuestas si hacemos un corte imaginario por la barra en la sección mn (figura 1.2c). Como esta sección se toma perpendicularmente al eje longitudinal de la barra, se denomina **sección transversal**.

Ahora aislamos la parte de la barra a la izquierda de la sección transversal mn como un cuerpo libre (figura 1.2d). En el extremo derecho de este cuerpo libre (sección mn) mostramos la acción de la parte eliminada de la barra (es decir, la parte a la derecha de la sección mn) sobre la parte restante. Esta acción consiste en *esfuerzos* distribuidos en forma continua que actúan sobre toda la sección transversal y la fuerza axial P que actúa en la sección transversal es la *resultante* de estos esfuerzos. (La fuerza resultante se muestra con una línea discontinua en la figura 1.2d.)

El **esfuerzo** tiene unidades de fuerza por unidad de área y se denota por la letra griega σ (sigma). En general, los esfuerzos σ que actúan sobre una superficie plana pueden ser uniformes en toda el área o bien variar en intensidad de un punto a otro. Supongamos que los esfuerzos que actúan sobre

FIGURA 1.1 Elementos estructurales sometidos a cargas axiales. (La barra de arrastre está en tensión y el puntal del tren de aterrizaje está en compresión.)



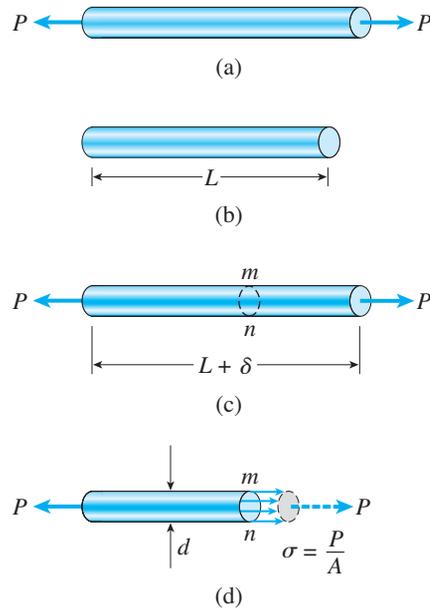


FIGURA 1.2 Barra prismática en tensión: (a) diagrama de cuerpo libre de un segmento de la barra, (b) segmento de la barra antes de la aplicación de las cargas, (c) segmento de la barra después de la aplicación de las cargas y (d) esfuerzos normales en la barra.

la sección transversal mn (figura 1.2d) están distribuidos uniformemente sobre el área. Entonces la resultante de estos esfuerzos debe ser igual a la magnitud del esfuerzo por el área de la sección transversal A de la barra, es decir, $P = \sigma A$. Por tanto, obtenemos la expresión siguiente para la magnitud de los esfuerzos:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

Esta ecuación expresa la intensidad de un esfuerzo uniforme en una barra prismática con sección transversal arbitraria cargada axialmente.

Cuando la barra es estirada por las fuerzas P , los esfuerzos son **esfuerzos de tensión**; si se invierte la dirección de las fuerzas, la barra se comprime y tenemos **esfuerzos de compresión**. Puesto que los esfuerzos actúan en una dirección perpendicular a la superficie cortada, se denominan **esfuerzos normales**. Y, por tanto, los esfuerzos normales pueden ser de tensión o de compresión. Más adelante, en la sección 1.6, analizaremos otro tipo de esfuerzo, denominado *esfuerzo cortante*, que actúa paralelo a la superficie.

Cuando se requiere una **convención de signos** para los esfuerzos normales, se acostumbra definir a los esfuerzos de tensión como positivos y a los esfuerzos de compresión como negativos.

Puesto que el esfuerzo normal σ se obtiene dividiendo la fuerza axial entre el área de la sección transversal, tiene **unidades** de fuerza por unidad de área. Cuando se emplean unidades inglesas, el esfuerzo suele expresarse en libras por pulgada cuadrada (psi) o kips por pulgada cuadrada (ksi).^{*} Por ejemplo, suponga que la barra de la figura 1.2 tiene un diámetro d de 2.0 in

^{*}Un kip, o kilolibra, es igual a 1000 lb.

y que la carga P tiene una magnitud de 6 kips. Entonces el esfuerzo en la barra es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{6 \text{ k}}{\pi(2.0 \text{ in})^2/4} = 1.91 \text{ ksi (o 1910 psi)}$$

En este ejemplo el esfuerzo es de tensión o positivo.

Cuando se utilizan unidades SI, la fuerza se expresa en newtons (N) y el área en metros cuadrados (m^2). En consecuencia, el esfuerzo tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), es decir, pascales (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad de esfuerzo tan pequeña que es necesario trabajar con múltiplos grandes, usualmente con el megapascal (MPa).

Para demostrar que un pascal es en efecto pequeño, sólo tenemos que observar que se requieren casi 7000 pascales para igualar un psi.* Como un ejemplo, el esfuerzo en la barra descrita en el ejemplo anterior (1.91 ksi) se convierte en 13.2 MPa, que es igual a 13.2×10^6 pascales. Aunque no se recomienda emplearlo en el SI, algunas veces el esfuerzo se expresa en newtons por milímetro cuadrado (N/mm^2), que es una unidad igual al megapascal (MPa).

Limitaciones

La ecuación $\sigma = P/A$ sólo es válida si el esfuerzo está uniformemente distribuido sobre la sección transversal de la barra. Esta condición se cumple si la fuerza axial P actúa en el centroide del área de la sección transversal, como se demuestra más adelante en esta sección. Cuando la carga P no actúa en el centroide, se tendrá una flexión de la barra y se requiere de un análisis más complicado (consulte las secciones 5.12 y 11.5). Sin embargo, en este libro (así como en la práctica común) se entiende que las fuerzas axiales se aplican en los centroides de las secciones transversales a menos que se indique otra cosa.

La condición de esfuerzo uniforme representada en la figura 1.2d se tiene en toda la longitud de la barra, excepto cerca de los extremos. La distribución del esfuerzo en el extremo de la barra depende de cómo se transmite la carga P a la barra. Si sucede que la carga está uniformemente distribuida sobre el extremo, entonces el patrón de esfuerzos será el mismo en otras partes. Sin embargo, es más probable que la carga se transmita mediante un pasador o un perno, produciendo esfuerzos muy localizados denominados **concentraciones de esfuerzos**.

Una posibilidad se ilustra mediante la barra de ojo de la figura 1.3. En este caso las cargas P se transmiten a la barra mediante pasadores que pasan por los agujeros (u ojos) en los extremos de la barra. Por tanto, las fuerzas mostradas en la figura en realidad son las resultantes de las presiones de apoyo entre los pasadores y la barra de ojo, y la distribución de esfuerzo alrededor de los agujeros es muy compleja. No obstante, conforme nos alejamos de los extremos hacia el centro de la barra, la distribución del esfuerzo gradualmente tiende a la distribución uniforme representada en la figura 1.2d.

Como regla práctica, se puede emplear la fórmula $\sigma = P/A$, con buena precisión en cualquier punto dentro de una barra prismática que esté alejado

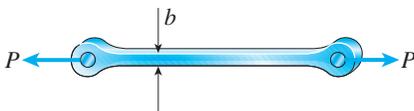


FIGURA 1.3 Barra de ojo hecha de acero sometida a cargas de tensión P .

*Los factores de conversión entre las unidades inglesas y las unidades SI, se encuentran en la tabla A.5 del apéndice A.

de la concentración de esfuerzos al menos una distancia igual a la dimensión lateral mayor de la barra. En otras palabras, la distribución del esfuerzo en la barra de ojo de la figura 1.3 es uniforme a distancias b o mayores desde los extremos agrandados, donde b es el ancho de la barra, y la distribución del esfuerzo en la barra prismática de la figura 1.2 es uniforme a distancias d o mayores desde los extremos, donde d es el diámetro de la barra (figura 1.2d). En la sección 2.10 se analizan con más detalle las concentraciones de esfuerzos producidas por cargas axiales.

Por supuesto, aun cuando el esfuerzo *no* esté distribuido uniformemente, la ecuación $\sigma = P/A$ es de utilidad debido a que proporciona el esfuerzo normal *promedio* sobre la sección transversal.

Deformación unitaria normal

Como ya vimos, una barra recta cambiará su longitud al cargarla axialmente, haciéndose más larga en tensión y más corta en compresión. Por ejemplo, considere de nuevo la barra prismática de la figura 1.2. El alargamiento δ de esta barra (figura 1.2c) es el resultado acumulativo del alargamiento de todos los elementos del material en todo el volumen de la barra. Supongamos que el material es el mismo en toda la barra. Entonces, si consideramos la mitad de la barra (longitud $L/2$), tendrá un alargamiento igual a $\delta/2$ y si consideramos un cuarto de la barra, tendrá un alargamiento igual a $\delta/4$.

En general, el alargamiento de un segmento es igual a su longitud dividida entre la longitud total L y multiplicada por el alargamiento δ . Por tanto, una longitud unitaria de la barra tendrá un alargamiento igual a $1/L$ por δ . Esta cantidad se denomina *alargamiento por unidad de longitud*, o **deformación unitaria** y se denota con la letra griega ϵ (épsilon). Podemos observar que la deformación unitaria está dada por la ecuación

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1.2)$$

Si la barra está en tensión, la deformación unitaria se denomina **deformación unitaria por tensión**, que representa un alargamiento o estiramiento del material. Si la barra está en compresión, la deformación unitaria es una **deformación unitaria por compresión** y la barra se acorta. En general, la deformación unitaria por tensión se considera positiva y la deformación unitaria por compresión como negativa. La deformación unitaria ϵ se denomina **deformación unitaria normal** debido a que está asociada con los esfuerzos normales.

Como la deformación unitaria normal es la razón de dos longitudes, es una **cantidad adimensional**, es decir, no tiene unidades. Por tanto, la deformación unitaria se expresa simplemente como un número, independiente de cualquier sistema de unidades. Los valores numéricos de la deformación unitaria suelen ser muy pequeños, debido a que las barras hechas de material estructural sólo experimentan cambios pequeños de longitud cuando se someten a cargas.

Como ejemplo, considere una barra de acero con longitud L igual a 2.0 m. Al ser sometida a una carga de tensión muy pesada, podría alargarse 1.4 mm, lo que significa que la deformación unitaria es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.4 \text{ mm}}{2.0 \text{ m}} = 0.0007 = 700 \times 10^{-6}$$

En la práctica, las unidades originales de δ y L algunas veces se dan en la deformación unitaria misma y entonces ésta se registra en formas como mm/m, $\mu\text{m/m}$ e in/in. Por ejemplo, la deformación unitaria ϵ en el ejemplo anterior podría expresarse como $700 \mu\text{m/m}$ o 700×10^{-6} in/in. Además, en ocasiones la deformación unitaria se expresa como un porcentaje, en especial cuando es grande. (En el ejemplo anterior, la deformación es 0.07 por ciento).

Esfuerzo uniaxial y deformación unitaria uniaxial

Las definiciones de esfuerzo normal y deformación unitaria normal se basan en consideraciones puramente estáticas y geométricas, lo que significa que las ecuaciones (1.1) y (1.2) se pueden emplear para cargas de cualquier magnitud y para cualquier material. El requisito principal es que la deformación de la barra sea uniforme en todo su volumen, lo que a su vez requiere que la barra sea prismática, que las cargas pasen por los centroides de las secciones transversales y que el material sea **homogéneo** (es decir, que sea el mismo en todas las partes de la barra). El estado de esfuerzo y de deformación unitaria resultantes se denomina **esfuerzo uniaxial y deformación unitaria uniaxial**.

Más adelante en la sección 2.6 se darán explicaciones adicionales del esfuerzo uniaxial, incluyendo esfuerzos en otras direcciones además de la dirección longitudinal de la barra. En el capítulo 7 también analizaremos estados de esfuerzos más complicados, como el esfuerzo biaxial y el esfuerzo plano.

Línea de acción de las fuerzas axiales para una distribución uniforme del esfuerzo

En todo el análisis anterior del esfuerzo y de la deformación unitaria en una barra prismática supusimos que el esfuerzo normal σ estaba distribuido uniformemente sobre su sección transversal. Ahora demostraremos que esta condición se cumple si la línea de acción de las fuerzas axiales pasa por el centroide del área de la sección transversal.

Considere una barra prismática con sección transversal arbitraria sometida a fuerzas axiales P que producen esfuerzos σ distribuidos uniformemente (figura 1.4a). Sea p_1 el punto en la sección transversal donde la línea de acción de las fuerzas interseca la sección transversal (figura 1.4b). Si trazamos un conjunto de ejes xy en el plano de la sección transversal y denotamos las coordenadas del punto p_1 con \bar{x} y \bar{y} . Para determinar esas coordenadas, observamos que los momentos M_x y M_y de la fuerza P con respecto a los ejes x y y , respectivamente, deben ser iguales a los momentos correspondientes de los esfuerzos distribuidos uniformemente.

Los momentos de la fuerza P son

$$M_x = P\bar{y} \quad M_y = -P\bar{x} \quad (\text{a,b})$$

en donde un momento se considera positivo cuando su vector (empleando la regla de la mano derecha) actúa en la dirección positiva del eje correspondiente.*

*Para visualizar la regla de la mano derecha, imagine que toma un eje de coordenadas con la mano derecha, de tal manera que los dedos estén alrededor del eje y el dedo pulgar apunta en la dirección positiva del eje. Entonces un momento es positivo si actúa con respecto al eje en la misma dirección de los dedos.

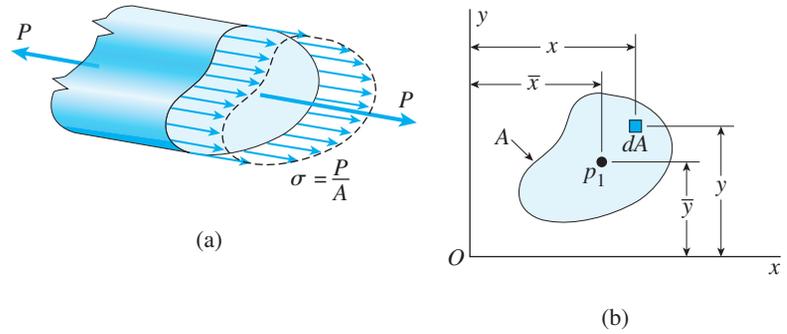


FIGURA 1.4 Distribución uniforme de esfuerzos en una barra prismática: (a) fuerzas axiales P y (b) sección transversal de la barra.

Los momentos de los esfuerzos distribuidos se obtienen integrando sobre el área de la sección transversal A . La fuerza diferencial que actúa sobre un elemento del área dA (figura 1-4b) es igual a σdA . Los momentos de esta fuerza elemental con respecto a los ejes x y y son $\sigma y dA$ y $-\sigma x dA$, respectivamente, en donde x y y denotan las coordenadas del elemento dA . Los momentos totales se obtienen integrando sobre el área de la sección transversal:

$$M_x = \int \sigma y dA \quad M_y = - \int \sigma x dA \quad (c,d)$$

Estas expresiones dan los momentos producidos por los esfuerzos σ .

Luego, igualamos los momentos M_x y M_y obtenidos para la fuerza P (ecuaciones a y b) con los momentos obtenidos a partir de los esfuerzos distribuidos (ecuaciones c y d):

$$P\bar{y} = \int \sigma y dA \quad P\bar{x} = \int \sigma x dA$$

Como los esfuerzos σ están distribuidos uniformemente, sabemos que son constantes sobre el área A de la sección transversal y se pueden poner fuera de los signos de integración. Además, sabemos que σ es igual a P/A . Por tanto, obtenemos las fórmulas siguientes para las coordenadas del punto p_1 :

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad (1.3a,b)$$

Estas ecuaciones son iguales a las que definen las coordenadas del centroide de un área (consulte las ecuaciones 12.3a y b en el capítulo 12). Por tanto, ahora hemos llegado a una conclusión importante: *a fin de tener una tensión o compresión uniforme en una barra prismática, la fuerza axial debe actuar en el centroide del área de la sección transversal*. Como explicamos antes, siempre suponemos que estas condiciones se cumplen a menos que se especifique de otra manera.

Los ejemplos siguientes ilustran el cálculo de esfuerzos y deformaciones unitarias en barras prismáticas. En el primer ejemplo ignoramos el peso de la barra y en el segundo lo incluimos. (Cuando se resuelven problemas del libro de texto es usual omitir el peso de la estructura a menos que se pida incluirlo).

Ejemplo 1.1

Un poste corto, construido con un tubo circular hueco de aluminio, soporta una carga de compresión de 26 kips (figura 1.5). Los diámetros interior y exterior del tubo son $d_1 = 4.0$ in y $d_2 = 4.5$ in, respectivamente, y su longitud es 16 in. El acortamiento del poste debido a la carga es de 0.012 in.

Determine el esfuerzo de compresión y la deformación unitaria en el poste. (No tenga en cuenta el peso del poste y suponga que éste no se pandea con la carga.)

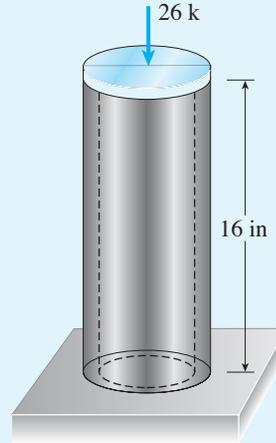


FIGURA 1.5 Ejemplo 1.1. Poste hueco de aluminio en compresión.

Solución

Suponiendo que la carga de compresión actúa en el centro del tubo hueco, podemos emplear la ecuación $\sigma = P/A$ (ecuación 1.1) para calcular el esfuerzo normal. La fuerza P es igual a 26 k (o 26,000 lb) y el área A de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} [(4.5 \text{ in})^2 - (4.0 \text{ in})^2] = 3.338 \text{ in}^2$$

Por tanto, el esfuerzo de compresión en el poste es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{26,000 \text{ lb}}{3.338 \text{ in}^2} = 7790 \text{ psi} \quad \leftarrow$$

La deformación unitaria de compresión (de la ecuación 1.2) es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.012 \text{ in}}{16 \text{ in}} = 750 \times 10^{-6} \quad \leftarrow$$

De esta manera hemos calculado el esfuerzo y la deformación unitaria en el poste.

Nota: como se explicó antes, la deformación unitaria es una cantidad adimensional y, por tanto, no se requiere indicar unidades para ella. Sin embargo, por claridad, a menudo se le dan unidades. En este ejemplo, ϵ se podría escribir como 750×10^{-6} in/in o $750 \mu\text{in/in}$.

Ejemplo 1.2

Una barra circular de acero con longitud L y diámetro d cuelga en el tiro de una mina y en su extremo inferior sostiene un balde con mineral con peso W (figura 1.6).

(a) Obtenga una fórmula para el esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en la barra, tomando en cuenta el peso de ésta.

(b) Calcule el esfuerzo máximo si $L = 40$ m, $d = 8$ mm y $W = 1.5$ kN.

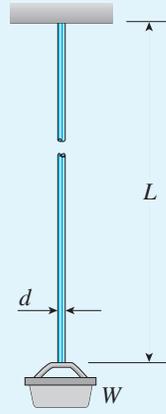


FIGURA 1.6 Ejemplo 1.2. Barra de acero soportando un peso W .

Solución

(a) La fuerza axial máxima $F_{\text{máx}}$ en la barra se tiene en el extremo superior y es igual al peso W del balde con mineral más el peso W_0 propio de la barra. Este último es igual al peso específico γ del acero por el volumen V de la barra; o sea

$$W_0 = \gamma V = \gamma AL \quad (1.4)$$

en donde A es el área de la sección transversal de la barra. Por tanto, la fórmula para el esfuerzo máximo (de la ecuación 1.1) es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{F_{\text{máx}}}{A} = \frac{W + \gamma AL}{A} = \frac{W}{A} + \gamma L \quad (1.5) \quad \leftarrow$$

(b) Para calcular el esfuerzo máximo, sustituimos los valores numéricos en la ecuación anterior. El área de la sección anterior A es igual a $\pi d^2/4$, donde $d = 8$ mm y el peso específico γ del acero es 77.0 kN/m³ (de la tabla H-1 del apéndice H). Por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{1.5 \text{ kN}}{\pi(8 \text{ mm})^2/4} + (77.0 \text{ kN/m}^3)(40 \text{ m}) \\ &= 29.8 \text{ MPa} + 3.1 \text{ MPa} = 32.9 \text{ MPa} \quad \leftarrow \end{aligned}$$

En este ejemplo, el peso de la barra contribuye de manera considerable al esfuerzo máximo y no debe ignorarse.

1.3 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

El diseño de máquinas y estructuras para que funcionen apropiadamente requiere que comprendamos el **comportamiento mecánico** de los materiales empleados. En general, la única forma para determinar cómo se comportan los materiales cuando se someten a cargas es realizar experimentos en el **laboratorio**. El procedimiento usual es colocar muestras pequeñas del material en máquinas de ensayo, aplicar las cargas y luego medir las deformaciones resultantes (como cambios de longitud y diámetro). La mayor parte de los laboratorios de pruebas de materiales están equipados con máquinas capaces de cargar las muestras de diversas maneras, incluyendo cargas estáticas y dinámicas en tensión y compresión.

En la figura 1.7 se muestra una **máquina para ensayos de tensión** común. La muestra de ensayo se coloca entre las dos mordazas grandes de la máquina y luego se carga a tensión. Dispositivos de medición registran las deformaciones unitarias y los sistemas de control automático y de procesamiento de datos (a la izquierda en la fotografía) tabulan y grafican los resultados.

En la figura 1.8 se muestra una vista más detallada de una **muestra para ensayo de tensión**. Los extremos de la muestra circular se amplían en la región donde se colocan en las mordazas para que no ocurra la falla cerca de éstas. Una falla en los extremos no producirá la información deseada acerca del material, debido a que la distribución del esfuerzo cerca de las mordazas no es uniforme, como se explicó en la sección 1.2. En una muestra apropiadamente diseñada, la falla sucederá en su parte prismática donde la distribución del esfuerzo es uniforme y la barra está sometida sólo a tensión pura. Esta situación se muestra en la figura 1.8, donde la muestra de acero se fracturó ante la carga. El dispositivo a la derecha, que está conectado me-



FIGURA 1.7 Máquina para ensayos de tensión con sistema automático de procesamiento de datos. (Cortesía de MTS Systems Corporation.)

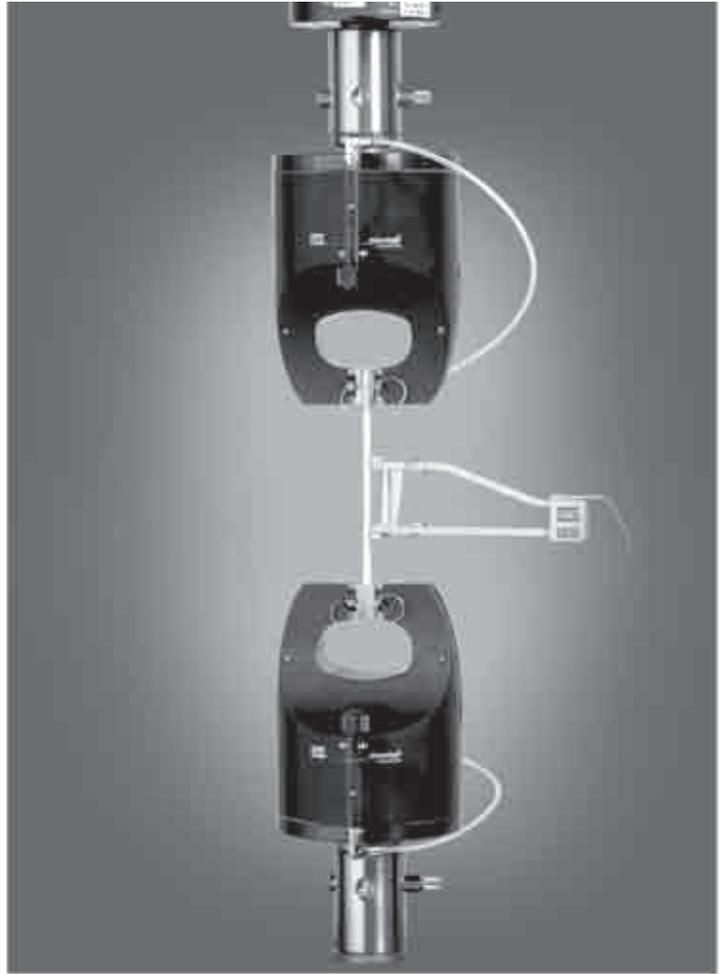


FIGURA 1.8 Muestra común para ensayo de tensión con extensómetro conectado; la muestra se fracturó en tensión. (Cortesía de MTS Systems Corporation.)

diante dos brazos a la muestra, es un **extensómetro** que mide el alargamiento durante la aplicación de la carga.

A fin de que se puedan comparar los resultados de los ensayos, se deben estandarizar las dimensiones de las muestras para ensayo y los métodos de aplicación de las cargas. Una de las principales organizaciones normativas en Estados Unidos es la American Society for Testing and Materials (ASTM), una sociedad técnica que publica especificaciones y normas para materiales y pruebas. Otras organizaciones normativas son la American Standards and Association (ASA) y el National Institute of Standards and Technology (NIST). En otros países existen organizaciones similares.

La muestra para tensión estándar de la ASTM tiene un diámetro de 0.505 in y una **longitud calibrada** de 2.0 in entre las marcas de calibración, que son los puntos donde los brazos del extensómetro están conectados a la muestra (consulte la figura 1.8). Conforme se jala la muestra, se mide y se registra la carga axial, ya sea de forma automática o bien tomando una lectura de una carátula. El alargamiento sobre la longitud calibrada se mide de

manera simultánea, mediante dispositivos mecánicos del tipo que se muestra en la figura 1.8 o con deformímetros por resistencia eléctrica.

En un **ensayo estático**, la carga se aplica lentamente y la *velocidad exacta de carga* no es de interés debido a que no afecta el comportamiento de la muestra. Sin embargo, en un **ensayo dinámico** la carga se aplica rápidamente y en algunas ocasiones de una manera cíclica. Como la naturaleza de una carga dinámica afecta las propiedades de los materiales, también se debe medir la velocidad de carga.

Los **ensayos de compresión** de metales suelen realizarse en muestras pequeñas con forma de cubos o cilindros circulares. Por ejemplo, los cubos pueden tener 2.0 in por lado y los cilindros diámetros de 1 in, y longitudes de 1 a 12 in y se pueden medir la carga aplicada por la máquina y el acortamiento de la muestra. El acortamiento se debe medir sobre una longitud calibrada que sea menor que la longitud total de la muestra a fin de eliminar efectos de borde.

El concreto se ensaya a la compresión en proyectos importantes de construcción para asegurar que se haya obtenido la resistencia requerida. Un tipo de muestra para ensayo de concreto tiene 6 in de diámetro, 12 in de longitud y una edad de 28 días (la edad del concreto es importante debido a que adquiere más resistencia a medida que se cura). Muestras similares pero un tanto menores se emplean cuando se realizan ensayos de compresión en roca (figura 1-9).

Diagramas de esfuerzo-deformación unitaria

Los resultados de los ensayos, en general, dependen de las dimensiones de la muestra que se ensaya. Como es poco probable que diseñemos una estructura que tenga partes con el mismo tamaño que las muestras para ensayo, necesitamos expresar los resultados en una forma que se pueda aplicar a elementos de cualquier tamaño. Una forma simple de lograr este objetivo es convertir los resultados de los ensayos en esfuerzos y deformaciones unitarias.

El esfuerzo axial σ en una muestra para ensayo se calcula dividiendo la carga axial P entre el área de la sección transversal A (ecuación 1.1). Cuando se utiliza el área inicial de la muestra en los cálculos, el esfuerzo se denomina **esfuerzo nominal** (otros nombres son *esfuerzo convencional* y *esfuerzo ingenieril*). Un valor más exacto del esfuerzo axial, denominado **esfuerzo real**, se puede calcular empleando el área real de la barra en la sección transversal donde ocurre la falla. Como el área real en un ensayo de tensión siempre es menor que el área inicial (como se ilustra en la figura 1.8), el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal.

La deformación unitaria axial promedio ϵ en la muestra para ensayo se determina dividiendo el alargamiento medido δ en medio de las marcas de calibración, entre la longitud calibrada L (consulte la figura 1.8 y la ecuación 1.2). Si la longitud calibrada inicial se emplea en el cálculo (por ejemplo, 2.0 in), entonces se obtiene la **deformación unitaria normal**. Como la distancia entre las marcas de calibración aumenta conforme se aplica la carga de tensión, podemos calcular la **deformación unitaria verdadera** (o *deformación unitaria natural*) para cualquier valor de la carga empleando la distancia real entre las marcas de calibración. En tensión, la deformación

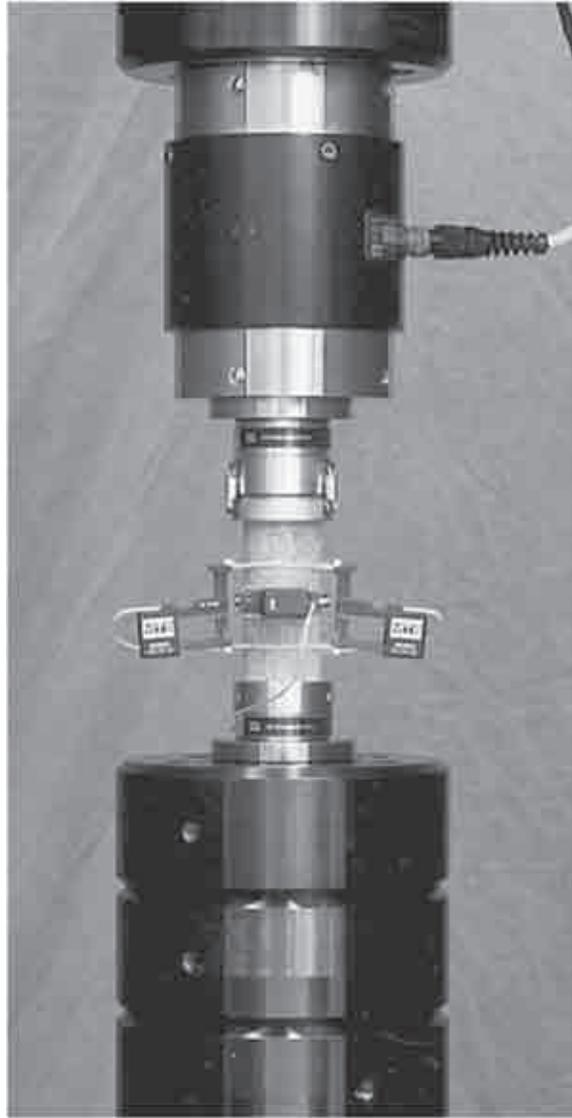


FIGURA 1.8 Muestra de roca ensayada en compresión para obtener la resistencia a la compresión, el módulo elástico y la relación de Poisson. (Cortesía de MTS Systems Corporation).

unitaria real siempre es menor que la deformación unitaria nominal. Sin embargo, para la mayor parte de los fines ingenieriles, el esfuerzo nominal y la deformación unitaria nominal son adecuadas, como se explica más adelante en esta sección.

Después de realizar un ensayo de tensión o compresión y de determinar el esfuerzo y la deformación unitaria para varias magnitudes de la carga, podemos trazar un diagrama del esfuerzo en función de la deformación unitaria. Ese **diagrama esfuerzo-deformación unitaria** es una característica del material particular que se ensaya y contiene información importante sobre sus propiedades mecánicas y el tipo de comportamiento.*

*Los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria fueron creados por Jacob Bernoulli (1654-1705) y J. V. Poncelet (1788-1867); consulte la referencia 1.4.

El primer material que analizaremos es el **acero estructural** conocido también como *acero dulce* o *acero al bajo carbono*. Es uno de los metales que se emplean y se encuentra en edificios, puentes, grúas, barcos, torres, vehículos y en muchos otros tipos de construcciones. Un diagrama de esfuerzo-deformación unitaria para un acero estructural común en tensión se muestra en la figura 1.10. Las deformaciones unitarias están trazadas en el eje horizontal y los esfuerzos en eje vertical. (A fin de mostrar todas las características importantes de este material, el eje de la deformación unitaria en la figura 1.10 no está dibujado a escala.)

El diagrama inicia con una línea recta desde el origen O hasta el punto A , que indica que la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria en esta región inicial no sólo es *lineal* sino también *proporcional*.* Más allá del punto A , ya no existe la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria; de aquí que al esfuerzo en A se le nombre **límite de proporcionalidad**. Para aceros al bajo carbono, este límite está en el intervalo de 30 a 50 ksi (210 a 350 MPa), pero los aceros de alta resistencia (con contenido mayor de carbono más otras aleaciones) pueden tener límites de proporcionalidad mayores que 80 ksi (550 MPa). La pendiente de la línea recta de O a A se denomina **módulo de elasticidad**. Debido a que la pendiente tiene unidades de esfuerzo dividido entre la deformación unitaria, el módulo de elasticidad tiene las mismas unidades que el esfuerzo. (Los módulos de elasticidad se analizan en la sección 1.5).

Con un incremento en el esfuerzo más allá del límite de proporcionalidad, la deformación unitaria comienza a aumentar más rápidamente con cada incremento del esfuerzo. En consecuencia, la curva esfuerzo-deformación unitaria tiene una pendiente cada vez menor, hasta que en el punto B la curva se vuelve horizontal (consulte la figura 1.10). A partir de este punto ocurre un alargamiento considerable de la muestra para ensayo sin un aumento notable en la fuerza de tensión (del punto B al C). Este fenómeno se conoce como **fluencia** del material y el punto B se denomina **punto de**

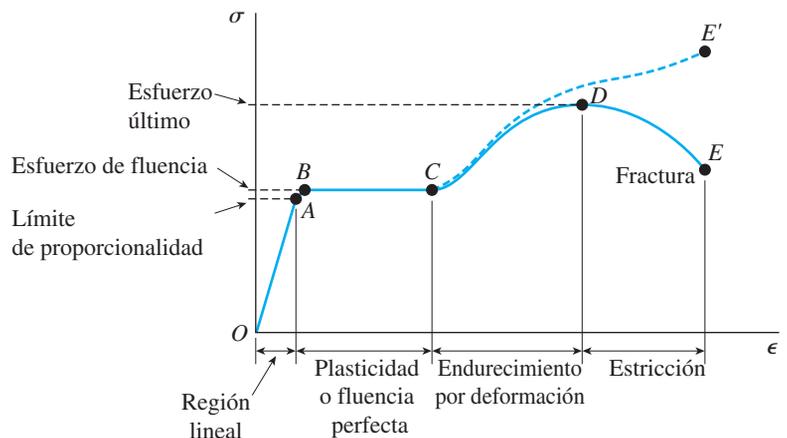


FIGURA 1.10 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un acero estructural común en tensión (no a escala).

*Se dice que dos variables son *proporcionales* si su relación permanece constante. Por tanto, una relación proporcional se puede representar mediante una recta que pasa por el origen. Sin embargo, una relación proporcional no es lo mismo que una relación *lineal*. Si bien una relación proporcional es lineal, la proposición inversa no es necesariamente cierta, debido a que una relación representada por una recta que *no* pasa por el origen es lineal pero no proporcional. La expresión empleada con frecuencia “directamente proporcional” es sinónimo de “proporcional” (referencia 1.5).

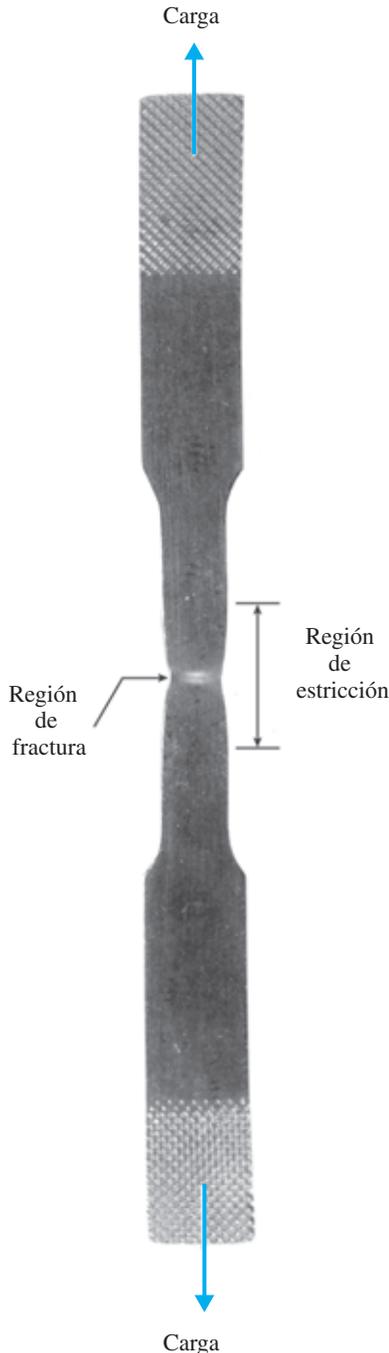


FIGURA 1.11 Estricción de una barra de acero dulce en tensión.

fluencia. El esfuerzo correspondiente se conoce como **esfuerzo de fluencia** del acero.

En la región de *B* a *C* (figura 1-10) el material se vuelve **perfectamente plástico**, lo cual significa que se deforma sin un aumento en la carga aplicada. El alargamiento de una muestra de acero dulce en la región perfectamente plástica usualmente es de 10 a 15 veces el alargamiento que ocurre en la región lineal (entre el inicio de la carga y el límite de proporcionalidad). La presencia de deformaciones unitarias muy grandes en la región plástica (y más allá de ésta) es la razón para no trazar este diagrama a escala.

Después de experimentar las grandes deformaciones unitarias que ocurren durante la fluencia en la región *BC*, el acero comienza a **endurecerse por deformación**. Durante el endurecimiento por deformación el material experimenta cambios en su estructura cristalina, resultando en una resistencia mayor del material ante una deformación adicional. La elongación de la muestra de ensayo en esta región requiere un aumento en la carga de tensión y, por tanto, el diagrama esfuerzo-deformación unitaria tiene una pendiente positiva de *C* a *D*. Al final, la carga llega a su valor máximo y el esfuerzo correspondiente (en el punto *D*) se denomina **esfuerzo último**. Un alargamiento adicional de la barra en realidad se acompaña de una reducción en la carga y la fractura finalmente ocurre en un punto como el *E* de la figura 1.10.

El esfuerzo de fluencia y el esfuerzo último de un material también se denominan **resistencia de fluencia** y **resistencia última**, respectivamente. **Resistencia** es un término general que se refiere a la capacidad de una estructura para resistir cargas. Por ejemplo, la resistencia de fluencia de una viga es la magnitud de la carga requerida para ocasionar fluencia en la viga y la resistencia última de una armadura es la carga máxima que puede soportar, es decir, la carga de falla. Sin embargo, al realizar un ensayo de tensión de un material particular, definimos la capacidad de soporte de carga por los esfuerzos en la muestra en vez de las cargas totales que actúan en la muestra. Como resultado, la resistencia de un material usualmente se estipula como un esfuerzo.

Cuando se estira una muestra de ensayo, sufre una **contracción lateral**, como ya se mencionó. La disminución resultante en el área de la sección transversal es demasiado pequeña para tener un efecto notable sobre los valores calculados de los esfuerzos aproximadamente en el punto *C* en la figura 1.10, pero más allá de ese punto la reducción del área comienza a alterar la forma de la curva. En la proximidad del esfuerzo último, la reducción del área de la barra es aparente y se presenta una **estricción** pronunciada de la barra (consulte las figuras 1.8 y 1.11).

Si se emplea el área real de la sección transversal en la parte angosta de la estricción para calcular el esfuerzo, se obtiene la **curva verdadera esfuerzo-deformación unitaria** (la línea discontinua *CE'* en la figura 1.10). La carga total que la barra puede soportar disminuye en efecto después que se alcanza el esfuerzo último (como lo muestra la curva *DE*), pero esta reducción se debe a la disminución del área de la barra y no a una pérdida de resistencia del propio material. En realidad, el material soporta un aumento en el esfuerzo verdadero hasta la falla (punto *E'*). Como se espera que la mayoría de las estructuras trabajen a esfuerzos menores que el límite de proporcionalidad, la **curva convencional esfuerzo-deformación unitaria** *OABCDE*, que se basa en el área original de la sección transversal de la muestra y es fácil de determinar, proporciona información adecuada para emplearla en el diseño de ingeniería.

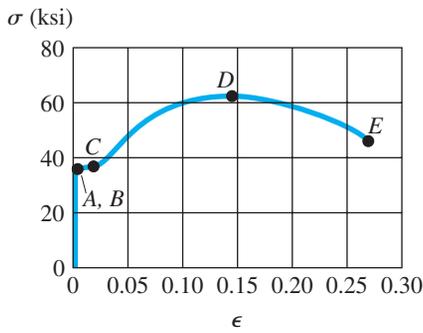


FIGURA 1.12 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un acero estructural típico en tensión (dibujado a escala).

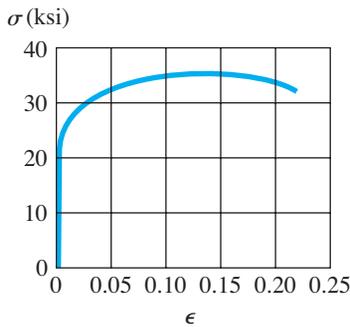


FIGURA 1.13 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria típico para una aleación de aluminio.

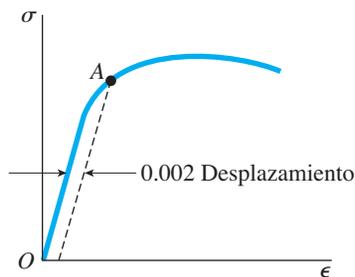


FIGURA 1.14 Esfuerzo de fluencia arbitrario determinado mediante el método de desplazamiento.

El diagrama de la figura 1.10 muestra las características generales de la curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero dulce, pero sus proporciones no son realistas debido a, como ya se mencionó, que la deformación unitaria que ocurre de B a C puede ser más de diez veces mayor que la deformación unitaria que ocurre de O a A . Además, las deformaciones unitarias de C a E son muchas veces mayores que las de B a C . Las relaciones correctas se representan en la figura 1.12, donde se muestra un diagrama esfuerzo-deformación unitaria para acero dulce dibujado a escala. En esta figura, las deformaciones unitarias desde el punto cero hasta el punto A son tan pequeñas comparadas con las deformaciones unitarias del punto A al punto E que no se pueden ver y parece que la parte inicial del diagrama es una línea vertical.

La presencia de un punto de fluencia bien definido, seguido por deformaciones unitarias plásticas grandes, es una característica importante del acero estructural que algunas veces se emplea en el diseño práctico (consulte, por ejemplo, los análisis del comportamiento elastoplástico en las secciones 2.12 y 6.10). Los metales como el acero estructural que sufren deformaciones unitarias *permanentes* antes de la falla se clasifican como **dúctiles**. Por ejemplo, la ductilidad es la propiedad que permite que una barra de acero se doble para formar un arco circular o se trefile para formar un alambre sin romperse. Una característica importante de los materiales dúctiles es que presentan una distorsión visible si las cargas son demasiado grandes, proporcionando así una oportunidad para tomar una acción correctiva antes de que ocurra la fractura. También, los materiales que presentan comportamiento dúctil son capaces de absorber grandes cantidades de energía de deformación antes de la fractura.

El acero estructural es una aleación de hierro que contiene aproximadamente 0.2 por ciento de carbono y, por tanto, se clasifica como acero al bajo carbono. Al aumentar el contenido de carbono, el acero se vuelve menos dúctil pero más resistente (mayor esfuerzo de fluencia y mayor esfuerzo último). Las propiedades físicas del acero también se ven afectadas por un tratamiento térmico, por la presencia de otros metales y por los procesos de manufactura como el laminado. Otros materiales que se comportan de una manera dúctil (en ciertas condiciones) son aluminio, cobre, magnesio, plomo, molibdeno, níquel, latón, bronce, metal monel, nailon y teflón.

Las **aleaciones de aluminio** si bien pueden tener una ductilidad considerable, no tienen un punto de fluencia bien definido, como se muestra en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.13, pero tienen una región lineal inicial con un límite de proporcionalidad reconocible. Las aleaciones producidas para fines estructurales tienen límites de proporcionalidad en el rango de 10 a 60 ksi (70 a 410 MPa) y esfuerzos últimos en el rango de 20 a 80 ksi (140 a 550 MPa).

Cuando un material, como el aluminio, no tiene un punto de fluencia bien determinado y, sin embargo, sufre grandes deformaciones unitarias después de rebasar el límite de proporcionalidad, se puede determinar un esfuerzo de fluencia *arbitrario* mediante el **método de desplazamiento**. Se traza una línea recta en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria paralela a la parte inicial lineal de la curva (figura 1.14), pero desplazada en cierta deformación unitaria estándar, como 0.002 (o 0.2 por ciento). La intersección de la línea desplazada y la curva esfuerzo-deformación unitaria (punto A en la figura) define el esfuerzo de fluencia. Como este esfuerzo se determina mediante una regla arbitraria y no es una propiedad física inherente del material, se debe distinguir de un esfuerzo verdadero de fluencia y referirse a él como **esfuerzo de fluencia desplazado**. Para un material como

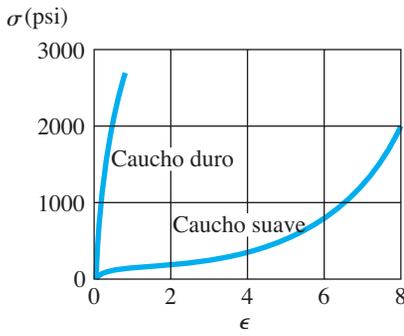


FIGURA 1.15 Curvas esfuerzo-deformación unitaria para dos clases de caucho en tensión.

al aluminio, el esfuerzo de fluencia desplazado está ligeramente arriba del límite de proporcionalidad. En el caso del acero estructural, con su abrupta transición de la región lineal a la región de alargamiento plástico, el esfuerzo desplazado es en esencia el mismo tanto en el esfuerzo de fluencia como en el límite de proporcionalidad.

El caucho mantiene una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria hasta llegar a deformaciones unitarias relativamente grandes (en comparación con los metales). La deformación unitaria en el límite de proporcionalidad puede ser tan alta como 0.1 o 0.2 (10 o 20 por ciento). Más allá del límite de proporcionalidad, el comportamiento depende del tipo de caucho (figura 1.15). Algunas clases de caucho suave se estirarán enormemente sin fallar, alcanzando longitudes de varias veces sus longitudes originales. El material termina presentando cada vez mayor resistencia a la carga y la curva esfuerzo-deformación unitaria se curva marcadamente hacia arriba. Este comportamiento característico se puede percibir estirando una banda de caucho con las manos. (Observe que aunque el caucho presenta deformaciones unitarias muy grandes, no es un material dúctil debido a que las deformaciones no son permanentes. Es, por supuesto, un material elástico; consulte la sección 1.4.)

La ductilidad de un material en tensión se puede caracterizar por su alargamiento y por la reducción de su área en la sección transversal donde ocurre la fractura. El **porcentaje de alargamiento** se define como sigue:

$$\text{Porcentaje de alargamiento} = \frac{L_1 - L_0}{L_0} (100) \quad (1.6)$$

en donde L_0 es la longitud calibrada original y L_1 es la distancia entre las marcas de calibración en la fractura. Ya que el alargamiento no es uniforme en toda la longitud de la muestra, sino que se concentra en la región de estricción, el porcentaje de alargamiento depende de la longitud calibrada. Por tanto, al dar el porcentaje de alargamiento, siempre se debe proporcionar la longitud calibrada. Para una longitud calibrada de 2 in, el acero puede tener un alargamiento en el rango de 3 a 40%, dependiendo de su composición; en el caso del acero estructural, son comunes valores de 20 o 30 por ciento. El alargamiento de las aleaciones de aluminio varía de 1 a 45 por ciento, dependiendo de su composición y su tratamiento.

El **porcentaje de reducción de área** mide la cantidad de estricción que ocurre y se define como sigue:

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = \frac{A_0 - A_1}{A_0} (100) \quad (1.7)$$

en donde A_0 es el área transversal original y A_1 es el área final en la sección de fractura. Para aceros dúctiles, la reducción es casi de 50 por ciento.

Los materiales que fallan en tensión a valores relativamente bajos de deformación unitaria se clasifican como **frágiles**. Algunos ejemplos son concreto, piedra, hierro colado, vidrio, cerámica y una variedad de aleaciones metálicas. Los materiales frágiles fallan con poco alargamiento después que se sobrepasa el límite de proporcionalidad (el esfuerzo en el punto A en la figura 1.16). Además, la reducción del área es insignificante y por tanto el esfuerzo nominal de fractura (punto B) es el mismo que el esfuerzo último verdadero. Los aceros al alto carbono tienen esfuerzos de fluencia muy elevados —más de 100 ksi (700 MPa) en algunos casos— pero se comportan

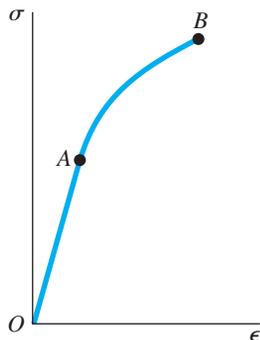


FIGURA 1.16 Diagrama típico de esfuerzo-deformación unitaria para un material frágil, que muestra el límite de proporcionalidad (punto A) y el punto de fractura (punto B).

de una manera frágil y la fractura ocurre con un alargamiento de tan sólo un porcentaje bajo.

El **vidrio** ordinario es un material frágil casi ideal, debido a que casi no presenta ductilidad. La curva esfuerzo-deformación unitaria del vidrio en tensión es en esencia una línea recta y la falla sucede antes de que tenga lugar alguna fluencia. El esfuerzo último es de casi 10 000 psi (70 MPa) para ciertas clases de vidrio en placa, pero hay grandes variaciones, dependiendo del tipo de vidrio, del tamaño de la muestra y de la presencia de defectos microscópicos. Las **fibras de vidrio** pueden desarrollar resistencias enormes y se han alcanzado esfuerzos últimos mayores que 1 000 000 psi (7 GPa).

Muchos tipos de **plásticos** se utilizan para fines estructurales debido a su peso ligero, a su resistencia a la corrosión y a sus buenas propiedades de aislamiento eléctrico. Sus propiedades mecánicas varían enormemente, tal que algunos plásticos son frágiles y otros dúctiles. Al diseñar con plásticos es importante tomar en cuenta que sus propiedades se afectan en gran medida por los cambios de temperatura y por el tiempo. Por ejemplo, el esfuerzo último de tensión de algunos plásticos disminuye a la mitad solamente elevando la temperatura de 10 a 40°C. Además, un plástico cargado se puede estirar gradualmente al paso del tiempo hasta que pierde su capacidad de servicio. Por ejemplo, una barra de cloruro de polivinilo sometida a una carga de tensión que inicialmente produce una deformación unitaria de 0.005 puede tener el doble de esa deformación después de una semana, aunque la carga permanezca constante. (Este fenómeno, conocido como *termofluencia*, se explica en la siguiente sección.)

Los esfuerzos últimos de tensión para plásticos usualmente se encuentran en el rango de 2 a 50 ksi (14 a 350 MPa) y sus pesos específicos varían entre 50 a 90 lb/ft³ (8 a 14 kN/m³). Un tipo de nailon tiene un esfuerzo último de 12 ksi (80 MPa) y un peso específico de sólo 70 lb/ft³ (11 kN/m³), que es sólo 12 por ciento más pesado que el agua. Debido a su peso ligero, la razón entre resistencia y peso para el nailon es casi la misma que para el acero estructural (consulte el problema 1.3-4).

Un **materia reforzado con filamentos**, consiste en una base (o *matriz*) en la que están embebidos filamentos, fibras o microfibras de alta resistencia. El material compuesto resultante tiene una resistencia mucho mayor que el material base. Como ejemplo, el uso de fibras de vidrio puede aumentar a más del doble la resistencia de una matriz plástica. Los compuestos se emplean ampliamente en aviones, botes, cohetes y vehículos espaciales donde se requiere alta resistencia y peso ligero.

Compresión

Las curvas esfuerzo-deformación unitaria para materiales en compresión difieren de las curvas de tensión. Los metales dúctiles como el acero, el aluminio y el cobre tienen límites de proporcionalidad en compresión muy cercanos a los de tensión y las regiones iniciales de sus diagramas esfuerzo-deformación unitaria en compresión y tensión son casi iguales. Sin embargo, después que inicia la fluencia, el comportamiento es muy diferente. En un ensayo de tensión, la muestra se estira, puede ocurrir estricción y finalmente sucede la fractura. Cuando el material se comprime, se abulta hacia fuera en los lados y adopta una forma como de barril, debido a que la fricción entre la muestra y las placas extremas evita la expansión lateral. Al aumentar la carga, la muestra se aplanan y presenta una resistencia mucho mayor a un

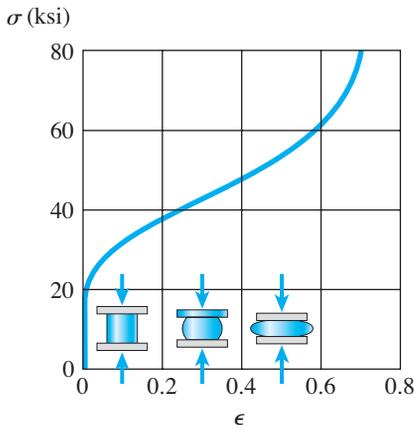


FIGURA 1.17 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el cobre en compresión.

acortamiento adicional (lo que significa que la curva esfuerzo-deformación unitaria se vuelve muy empinada). Esas características se ilustran en la figura 1.17, donde se muestra un diagrama esfuerzo-deformación unitaria en compresión para el cobre. Como el área de la sección transversal real de una muestra ensayada en compresión es mayor que el área inicial, el esfuerzo verdadero en un ensayo de compresión es menor que el esfuerzo nominal.

Los materiales frágiles cargados en compresión usualmente tienen una región lineal inicial seguida de una región en la que el acortamiento aumenta a una velocidad ligeramente mayor que la carga. Las curvas esfuerzo-deformación unitaria para compresión y tensión con frecuencia tienen formas similares, pero los esfuerzos últimos en compresión son mucho mayores que los de tensión. Además, a diferencia de los materiales dúctiles, que se aplanan cuando se comprimen, los materiales frágiles en realidad se fracturan con la carga máxima.

Tablas de propiedades mecánicas

Las propiedades de los materiales se listan en las tablas del apéndice H al final del libro. Los datos de materiales en las tablas son los típicos y adecuados para resolver problemas en este libro. Sin embargo, las propiedades de los materiales y las curvas esfuerzo-deformación unitaria varían en gran medida, incluso para el mismo material, debido a los diferentes procesos de manufactura, a la composición química, a defectos internos, a la temperatura y a muchos otros factores.

Por estas razones, los datos obtenidos del apéndice H (o de otras tablas de naturaleza similar) no se deben emplear para fines específicos de ingeniería o diseño. En cambio, se debe consultar los fabricantes o proveedores de materiales para obtener información sobre un producto particular.

1.4 ELASTICIDAD, PLASTICIDAD Y TERMOFLUENCIA

Los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria presentan el comportamiento de los materiales ingenieriles cuando están cargados en tensión o compresión, como se describió en la sección anterior. Para ir un paso más allá, consideremos que sucede cuando la carga se quita y el material se *descarga*.

Suponga por ejemplo, que aplicamos una carga de tensión a una muestra tal que el esfuerzo y la deformación unitaria vayan del origen O al punto A en la curva de esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.18a. Suponga además que cuando la carga se remueve, el material sigue exactamente la misma curva de regreso al origen O . Esta propiedad de un material, mediante la cual regresa a sus dimensiones originales durante la descarga, se denomina **elasticidad** y se dice que el propio material es *elástico*. Observe que la curva esfuerzo-deformación unitaria de O a A no tiene que ser lineal a fin de que el material sea elástico.

Ahora suponga que cargamos este mismo material hasta un nivel mayor, tal que se alcanza el punto B en la curva esfuerzo-deformación unitaria (figura 1.18b). Cuando la descarga sucede a partir del punto B , el material sigue la línea BC en el diagrama. Esta línea de descarga es paralela a la parte inicial de la curva de carga; es decir, la línea BC es paralela a una tangente a la curva esfuerzo-deformación unitaria en el origen. Cuando se alcanza el punto C , la carga se ha removido por completo, pero en el material permanece una **deformación unitaria residual** o *deformación unitaria permanente*, representada

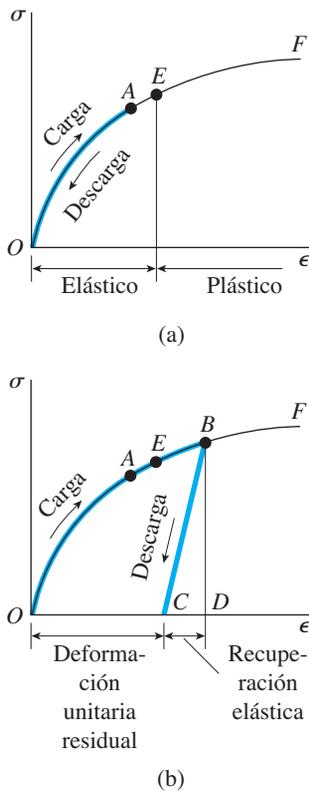


FIGURA 1.18 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria que ilustran (a) un comportamiento elástico y (b) un comportamiento parcialmente elástico.

por la línea OC . Como consecuencia, la barra ensayada es más larga ahora que antes de la aplicación de la carga. Este alargamiento residual de la barra se denomina **deformación permanente**. De la deformación total OD desarrollada durante la carga de O a B , la deformación unitaria CD se ha recuperado elásticamente y la deformación unitaria OC permanece como una deformación unitaria permanente. Así, durante la descarga la barra regresa parcialmente a su forma original y, por tanto, se dice que el material es **parcialmente elástico**.

Entre los puntos A y B en la curva esfuerzo-deformación unitaria (figura 1.18b), debe haber un punto antes del cual el material es elástico y después del cual el material es parcialmente elástico. Para encontrar este punto, cargamos el material hasta un valor seleccionado de esfuerzo y luego removemos la carga. Si no hay una deformación unitaria permanente (es decir, si el alargamiento de la barra regresa a cero), entonces el material es completamente elástico hasta el valor seleccionado del esfuerzo.

El proceso de carga y descarga se puede repetir para valores sucesivamente mayores del esfuerzo. Al final se alcanzará un esfuerzo tal que no toda la deformación unitaria se recupera durante la descarga. Mediante este procedimiento es posible determinar el esfuerzo en el límite superior de la región elástica, por ejemplo, el esfuerzo en el punto E en las figuras 1.18a y b. El esfuerzo en este punto se conoce como **límite elástico** del material.

Muchos materiales, incluyendo la mayor parte de los metales, tienen regiones lineales al inicio de sus curvas esfuerzo-deformación unitaria (por ejemplo, consulte las figuras 1.10 y 1.13). El esfuerzo en el límite superior de esta región lineal es el límite de proporcionalidad, como se explicó en la sección anterior. El límite elástico usualmente es igual o ligeramente mayor que el límite de proporcionalidad. De aquí que, para muchos materiales, a los dos límites se les asigne el mismo valor numérico. En el caso del acero dulce, el esfuerzo de fluencia también está muy cercano al límite de proporcionalidad, tal que para fines prácticos el esfuerzo de fluencia, el límite elástico y el límite de proporcionalidad se suponen iguales. Por supuesto, esta situación no es válida para todos los materiales. El caucho es un notable ejemplo de un material que es elástico mucho más allá de su límite de proporcionalidad.

La característica de un material por la cual experimenta deformaciones unitarias inelásticas, más allá de la deformación unitaria en el límite elástico, se conoce como **plasticidad**. Por tanto, en la curva esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.18a tenemos una región elástica seguida de una región plástica. Cuando suceden deformaciones unitarias grandes en un material dúctil cargado en la región plástica, se dice que el material experimenta **flujo plástico**.

Carga repetida de un material

Si el material permanece dentro del rango elástico, se puede cargar, descargar y cargar de nuevo sin cambiar significativamente su comportamiento. Sin embargo, cuando está cargado en el rango plástico, la estructura interna del material se altera y cambian sus propiedades. Por ejemplo, ya hemos observado que se da una deformación unitaria permanente en la muestra después de la descarga desde la región plástica (figura 1.18b). Ahora suponga que el material se **recarga** después de esa descarga (figura 1.19). La nueva carga inicia en el punto C en el diagrama y continúa hacia arriba hasta el punto B , el punto en el cual comenzó la descarga durante el primer ciclo de carga. Entonces el material sigue la curva original de esfuerzo-deformación unitaria hacia el punto F . Así, para la segunda carga, podemos imaginar que

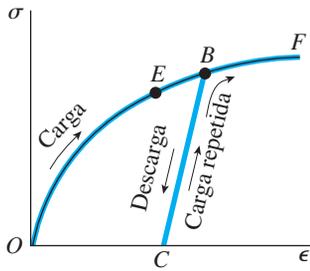


FIGURA 1.19 Carga repetida de un material y elevación de los límites elástico y de proporcionalidad.

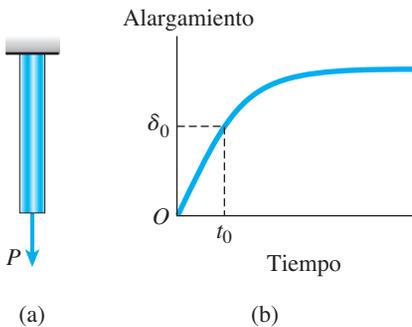


FIGURA 1.20 Termofluencia en una barra sometida a una carga constante.

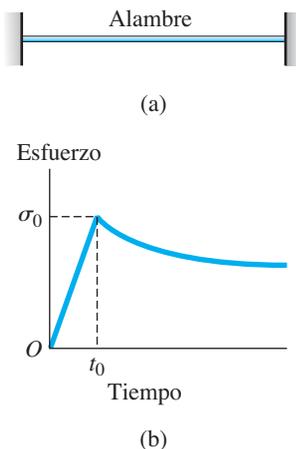


FIGURA 1.21 Relajación del esfuerzo en un alambre sometido a una deformación unitaria constante.

tenemos un diagrama nuevo de esfuerzo-deformación unitaria con su origen en el punto C .

Durante la segunda carga el material se comporta de una manera linealmente elástica de C a B , donde la pendiente de la recta CB es igual que la pendiente de la tangente a la curva original de carga, en el origen O . Ahora el límite de proporcionalidad está en el punto B , el cual está mayor esfuerzo que el límite elástico original (punto E). Así, al estirar un material como el acero o el aluminio en el rango inelástico o plástico, *cambian las propiedades del material* —aumenta la región linealmente elástica, aumenta el límite de proporcionalidad y aumenta también el límite elástico—. Sin embargo, la ductilidad se reduce debido a que en el “nuevo material” la cantidad de fluencia más allá del límite elástico (de B a F) es menor que en el material original (de E a F).*

Termofluencia

Los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria descritos antes se obtuvieron a partir de ensayos de tensión en los que se aplicaba carga y descarga estática a las muestras y el paso del tiempo no entró en nuestros análisis. No obstante, cuando los materiales se cargan durante periodos largos, algunos de ellos desarrollan deformaciones unitarias adicionales y se dice que presentan **termofluencia**.

Este fenómeno se manifiesta de diversas maneras. Por ejemplo, suponga que una barra vertical (figura 1.20a) se carga lentamente mediante una fuerza P , produciendo un alargamiento igual a δ_0 . Supongamos que la carga y el alargamiento correspondiente tiene lugar durante un intervalo que dura t_0 (figura 1.20b). Después del tiempo t_0 , la carga permanece constante. Sin embargo, debido a la termofluencia, la barra puede alargarse en forma gradual, como se muestra en la figura 1.20b, aunque la carga no cambie. Este comportamiento sucede en muchos materiales, aunque algunas veces el cambio es demasiado pequeño para considerarlo.

Como otra manifestación de termofluencia, considere un alambre que se estira entre dos soportes inmóviles, de manera tal que tiene un esfuerzo de tensión inicial σ_0 (figura 1.21). Una vez más, denotaremos el tiempo durante el cual el alambre se alarga inicialmente como t_0 . Con el paso del tiempo el esfuerzo en el alambre disminuye de manera gradual y termina alcanzando un valor constante, aun cuando los soportes en los extremos del alambre no se muevan. Este proceso se denomina **relajación** del material.

En general, la termofluencia es más importante a temperaturas elevadas que a temperaturas ordinarias y, por lo tanto, siempre se debe tomar en cuenta en el diseño de motores, chimeneas y otras estructuras que operan a temperaturas elevadas durante grandes periodos. Sin embargo, materiales como el acero, el concreto y la madera tendrán una termofluencia ligera aun a temperaturas ambiente. Por ejemplo, la termofluencia del concreto en el trascurso de grandes periodos puede crear ondulaciones en las calzadas de puentes debido a la flexión entre los apoyos. (Una solución es construir la calzada con una **contraflecha**, que es un desplazamiento inicial arriba de la horizontal, de modo que cuando ocurra la termofluencia, los tramos del puente bajen hasta su posición a nivel.)

*El estudio del comportamiento de materiales expuestos a diversas condiciones ambientales y sometidos a varias cargas es una rama importante de la mecánica aplicada. Para obtener información ingenieril más detallada sobre materiales, consulte un libro de texto enfocado en este tema.

1.5 ELASTICIDAD LINEAL, LEY DE HOOKE Y RELACIÓN DE POISSON

Muchos materiales estructurales, incluyendo la mayor parte de los metales, madera, plásticos y cerámicos, se comportan tanto de manera elástica como lineal cuando se cargan por primera vez. En consecuencia, sus curvas esfuerzo-deformación unitaria inician con una línea que pasa por el origen. Un ejemplo es la curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero estructural (figura 1.10), donde la región desde el origen O hasta el límite de proporcionalidad (punto A) es tanto lineal como elástica. Otros ejemplos son las regiones bajo los límites tanto de proporcionalidad como de elasticidad en los diagramas para el aluminio (figura 1.13), los materiales frágiles (figura 1.16) y el cobre (figura 1.17).

Cuando un material se comporta elásticamente y también presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria se dice que es **linealmente elástico**. Este tipo de comportamiento es muy importante en ingeniería por una razón obvia: al diseñar estructuras y máquinas para que trabajen en esta región, evitamos deformaciones permanentes debidas a la fluencia plástica.

Ley de Hooke

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria para una barra en tensión o compresión simple se expresa por la ecuación

$$\sigma = E\epsilon \quad (1.8)$$

en donde σ es el esfuerzo axial, ϵ es la deformación unitaria axial y E es una constante de proporcionalidad conocida como **módulo de elasticidad** del material. El módulo de elasticidad es la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación unitaria en la región linealmente elástica, como mencionamos en la sección 1.3. Como la deformación unitaria es adimensional, las unidades de E son las mismas que las del esfuerzo. Las unidades típicas de E son psi o ksi en unidades inglesas y pascuales (o sus múltiplos) en unidades SI.

La ecuación $\sigma = E\epsilon$ se conoce como **ley de Hooke**, nombrada en honor del famoso científico inglés Robert Hooke (1635-1703), quien fue la primera persona que investigó científicamente las propiedades elásticas de los materiales y probó varios de ellos como metal, madera, piedra, hueso y tendones. Hooke midió el alargamiento de alambres largos que soportaban pesos y observó que los estiramientos “siempre mantienen las mismas proporciones entre sí de acuerdo con los pesos que los causaron” (referencia 1.6). Así, Hooke estableció la relación lineal entre las cargas aplicadas y los alargamientos resultantes.

La ecuación (1.8) en realidad es una versión muy limitada de la ley de Hooke debido a que sólo se relaciona con los esfuerzos longitudinales y las deformaciones unitarias desarrolladas en tensión o compresión simple de la barra (*esfuerzo uniaxial*). Para tratar con estados más complicados de esfuerzos, como los encontrados en la mayoría de las estructuras y máquinas, debemos emplear ecuaciones más completas de la ley de Hooke (consulte las secciones 7.5 y 7.6).

El módulo de elasticidad tiene valores relativamente grandes para materiales que son muy rígidos, como los metales estructurales. El acero tiene

un módulo de elasticidad de aproximadamente 30 000 ksi (210 GPa) y el aluminio tiene valores típicos alrededor de 10 600 ksi (73 GPa). Los materiales más flexibles tienen un módulo menor —los valores para los plásticos varían de 100 a 2000 ksi (0.7 a 14 GPa)—. Algunos valores representativos de E se enlistan en la tabla H.2 del apéndice H. Para la mayor parte de los materiales el valor de E en compresión es casi el mismo que en tensión.

El módulo de elasticidad con frecuencia se llama **módulo de Young**, en honor de otro científico inglés, Thomas Young (1773-1829), quien introdujo la idea de un “módulo de la elasticidad” en conexión con una investigación de tensión y compresión de barras prismáticas. Sin embargo, su módulo no era el mismo que el empleado en la actualidad, debido a que comprendía propiedades de la barra así como del material (referencia 1.7).

Relación de Poisson

Cuando una barra prismática se somete a tensión, la elongación axial va acompañada de una **contracción lateral** (es decir, contracción normal a la dirección de la carga aplicada). Este cambio de forma se representa en la figura 1.22, donde en la parte (a) se muestra la barra antes de la carga y en la (b) después de la carga. En la parte (b), las líneas discontinuas representan la forma de la barra antes de la carga.

La contracción lateral se observa con facilidad estirando una banda de caucho, pero en los metales los cambios en las dimensiones laterales (en la región linealmente elástica) usualmente son demasiado pequeños para observarlos a simple vista. Sin embargo, se pueden detectar mediante dispositivos sensitivos de medición.

La **deformación unitaria lateral** ϵ' en cualquier punto en una barra es proporcional a la deformación unitaria axial ϵ en el mismo punto si el material es linealmente elástico. La relación de esas deformaciones unitarias es una propiedad del material conocida como **relación de Poisson**. Esta relación adimensional, que en general se denota por la letra griega ν (nu), se puede expresar mediante la ecuación

$$\nu = - \frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} = - \frac{\epsilon'}{\epsilon} \quad (1.9)$$

El signo menos agregado en la ecuación es para compensar el hecho de que las deformaciones unitarias lateral y axial por lo general tienen signos opuestos. Por ejemplo, la deformación unitaria axial en una barra en tensión es positiva y la deformación unitaria lateral es negativa (debido a que el ancho de la barra disminuye). Para compresión tenemos la situación opuesta ya que la barra se acorta (deformación unitaria axial negativa) y se hace más ancha (deformación unitaria lateral positiva). Por tanto, para materiales ordinarios la relación de Poisson tendrá un valor positivo.

Cuando se conoce la relación de Poisson para un material, podemos obtener la deformación unitaria lateral a partir de la deformación unitaria axial como sigue:

$$\epsilon' = -\nu\epsilon \quad (1.10)$$

Al emplear las ecuaciones (1.9) y (1.10) siempre debemos tener en cuenta que sólo se aplican a una barra sometida a esfuerzo axial, es decir, una barra para la cual el único esfuerzo es el esfuerzo normal σ en la dirección axial.

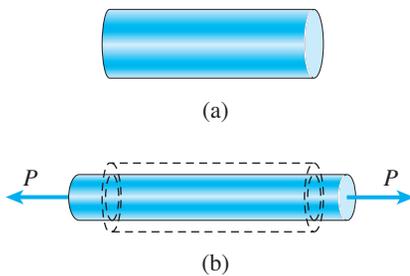


FIGURA 1.22 Alargamiento axial y contracción lateral de una barra prismática en tensión (a) antes de aplicar la carga y (b) barra después de aplicar la carga. (Las deformaciones de la barra se muestran muy exageradas.)

La relación de Poisson recibe su nombre en honor del matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840), quien intentó calcular esta relación mediante una teoría molecular de los materiales (referencia 1.8). Para materiales isotrópicos, Poisson determinó que $\nu = 1/4$. Cálculos más recientes basados en mejores modelos de estructura atómica dan como resultado $\nu = 1/3$. Esas dos cifras están cercanas a los valores reales medidos, que están en el rango de 0.25 a 0.35 para la mayor parte de los metales y para muchos otros materiales. Entre los materiales con un valor extremadamente bajo de la relación de Poisson se incluyen el corcho, para el cual ν es prácticamente cero y el concreto, para el cual ν es aproximadamente 0.1 o 0.2. Un límite teórico superior para la relación de Poisson es 0.5, como se explica en la sección 7.5. El caucho se acerca a este valor limitante.

En el apéndice H se da una tabla de relaciones de Poisson para varios materiales en el rango linealmente elástico (consulte la tabla H.2). Para la mayor parte de los fines se supone que la relación de Poisson es la misma tanto en tensión como en compresión.

Cuando las deformaciones unitarias en un material son grandes, la relación de Poisson cambia. Por ejemplo, en el caso del acero estructural la relación llega hasta 0.5 cuando ocurre la fluencia plástica. Así, la relación de Poisson permanece constante sólo en el rango linealmente elástico. Cuando el comportamiento del material es no lineal, la relación entre la deformación unitaria lateral y la deformación unitaria axial con frecuencia se denomina *relación de contracción*. Por supuesto, en el caso especial de comportamiento linealmente elástico, la relación de contracción es igual que la relación de Poisson.

Limitaciones

Para un material particular, la relación de Poisson permanece constante en todo el rango linealmente elástico, como ya se explicó antes. Por tanto, en cualquier punto dado en la barra prismática de la figura 1.22, la deformación unitaria lateral permanece proporcional a la deformación unitaria axial conforme la carga aumenta o disminuye. Sin embargo, para un valor dado de la carga (que significa que la deformación unitaria axial es constante en toda la barra), se deben cumplir condiciones adicionales si las deformaciones unitarias laterales deben ser las mismas en toda la barra.

En primer lugar, el material debe ser **homogéneo**, es decir, debe tener la misma composición (y en consecuencia las mismas propiedades elásticas) en cada punto. Sin embargo, tener un material homogéneo no significa que las propiedades elásticas en un punto particular sean las mismas en todas las *direcciones*. Por ejemplo, el módulo de elasticidad podría ser diferente en las direcciones axial y lateral, como en el caso de un poste de madera). Por tanto, una segunda condición para la uniformidad en las deformaciones unitarias laterales es que las propiedades elásticas deben ser las mismas en todas las direcciones *perpendiculares* al eje longitudinal. Cuando se cumplen las condiciones anteriores, como es el caso frecuente con los metales, las deformaciones unitarias laterales en una barra prismática sometida a una tensión uniforme serán las mismas en cada punto en la barra y también en todas las direcciones laterales.

Los materiales que tienen las mismas propiedades en todas las direcciones (ya sea axial, lateral o cualquier otra dirección) se llaman **isotrópicos**. Si las propiedades difieren en distintas direcciones, el material es **anisotrópicos (aeolotrópico)**.

En este libro, todos los ejemplos y problemas se resuelven suponiendo que el material es linealmente elástico, homogéneo e isotrópico, a menos que se especifique lo contrario.

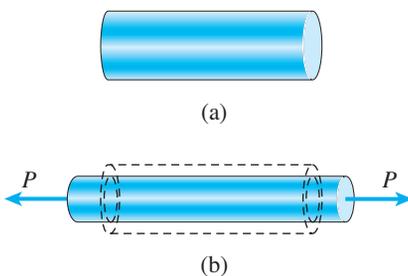


FIGURA 1.22 (Repetida.)

Ejemplo 1.3

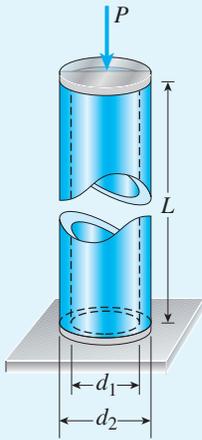


FIGURA 1.23 Ejemplo 1.3. Tubo de acero en compresión.

Un tubo de acero con longitud $L = 4.0$ ft, diámetro exterior $d_2 = 6.0$ in y diámetro interior $d_1 = 4.5$ in se comprime mediante una fuerza axial $P = 140$ k (figura 1.23). El material tiene un módulo de elasticidad $E = 30,000$ ksi y una relación de Poisson $\nu = 0.30$.

Determine las siguientes cantidades para el tubo: (a) su acortamiento δ , (b) la deformación unitaria lateral ϵ' , (c) el aumento Δd_2 del diámetro exterior y el aumento Δd_1 del diámetro interior y (d) el aumento Δt en el espesor de la pared.

Solución

El área A de la sección transversal y el esfuerzo longitudinal σ se determinan como sigue:

$$A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} [(6.0 \text{ in})^2 - (4.5 \text{ in})^2] = 12.37 \text{ in}^2$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} = -\frac{140 \text{ k}}{12.37 \text{ in}^2} = -11.32 \text{ ksi (compresión)}$$

Como el esfuerzo es mucho menor que el esfuerzo de fluencia (consulte la tabla H.3 del apéndice H), el material se comporta en forma linealmente elástica y la deformación unitaria axial se puede determinar a partir de la ley de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-11.32 \text{ ksi}}{30,000 \text{ ksi}} = -377.3 \times 10^{-6}$$

El signo de menos para la deformación unitaria indica que el tubo se acorta.

(a) Conociendo la deformación unitaria axial, ahora podemos determinar el cambio de longitud del tubo (consulte la ecuación 1.2)

$$\delta = \epsilon L = (-377.3 \times 10^{-6})(4.0 \text{ ft})(12 \text{ in/ft}) = -0.018 \text{ in} \quad \leftarrow$$

De nuevo el signo negativo indica un acortamiento del tubo.

(b) La deformación unitaria lateral se obtiene de la relación de Poisson (consulte la ecuación 1.10):

$$\epsilon' = -\nu \epsilon = -(0.30)(-377.3 \times 10^{-6}) = 113.2 \times 10^{-6} \quad \leftarrow$$

El signo positivo de ϵ' indica un aumento de las dimensiones laterales, como se esperaba para un esfuerzo de compresión.

(c) El aumento del diámetro exterior es igual a la deformación unitaria lateral por el diámetro:

$$\Delta d_2 = \epsilon' d_2 = (113.2 \times 10^{-6})(6.0 \text{ in}) = 0.000679 \text{ in}$$



De manera similar, el aumento del diámetro interior es

$$\Delta d_1 = \epsilon' d_1 = (113.2 \times 10^{-6})(4.5 \text{ in}) = 0.000509 \text{ in}$$



(d) El aumento del espesor de la pared se determina de la misma manera que el aumento de los diámetros; por tanto,

$$\Delta t = \epsilon' t = (113.2 \times 10^{-6})(0.75 \text{ in}) = 0.000085 \text{ in}$$



Este resultado se puede verificar observando que el aumento del espesor de la pared es igual a la mitad de la diferencia de los aumentos de los diámetros:

$$\Delta t = \frac{\Delta d_2 - \Delta d_1}{2} = \frac{1}{2} (0.000679 \text{ in} - 0.000509 \text{ in}) = 0.000085 \text{ in}$$

como se esperaba. Observe que en compresión las tres cantidades aumentan (diámetro exterior, diámetro interior y espesor).

Nota: los resultados numéricos obtenidos en este ejemplo ilustran que los cambios dimensionales en materiales estructurales ante condiciones normales de carga son extremadamente pequeños. A pesar de ello, los cambios de las dimensiones pueden ser importantes en ciertas clases de análisis (como el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas) y en la determinación experimental de esfuerzos y deformaciones unitarias.

1.6 ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACIÓN UNITARIA CORTANTE



Arriostamiento diagonal para un pasillo elevado; se muestra una horquilla y un pasador sometidos a cortante doble

En las secciones anteriores analizamos los efectos de los esfuerzos normales producidos por cargas axiales que actúan en barras rectas. Estos esfuerzos se denominan “esfuerzos normales” debido a que actúan en direcciones *perpendiculares* a la superficie del material. Ahora consideraremos otro tipo de esfuerzo, llamado **esfuerzo cortante**, que actúa de manera *tangencial* a la superficie del material.

Como un ejemplo de la acción de los esfuerzos cortantes, considere la conexión con que se muestra en la figura 1-24a. Esta conexión consiste de una barra plana *A*, una horquilla *C* y un perno *B* que pasa por agujeros en la barra y en la horquilla. Por la acción de las cargas de tensión *P*, la barra y la horquilla presionarán contra el perno en **compresión** y se desarrollarán esfuerzos de contacto, llamados **esfuerzos de compresión, esfuerzos en apoyos o esfuerzos de soporte**. Además, la barra y la horquilla tienden a *cortar* el perno, es decir, pasar a través de él, y esta tendencia es resistida por los esfuerzos cortantes en el perno. Como un ejemplo, considere el refuerzo para un pasillo peatonal elevado que se muestra en la fotografía.

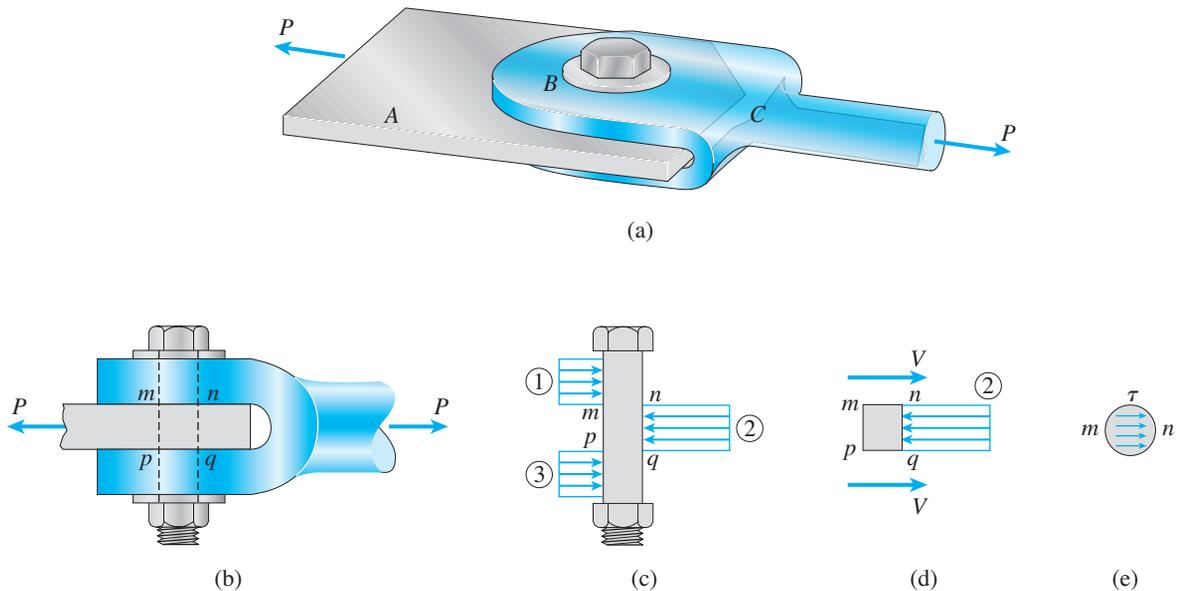


FIGURA 1.24 Conexión con perno en la que éste está sometido a cortante doble.

Para mostrar con más claridad las acciones de los esfuerzos de soporte y cortante, analicemos este tipo de conexión en una vista lateral esquemática (figura 1.24b). Con este esquema en mente, dibujamos un diagrama de cuerpo libre del perno (figura 1.24c). Los esfuerzos en los apoyos ejercidos por la horquilla contra el perno se muestran en el lado izquierdo del diagrama de cuerpo libre y se identifican con 1 y 3. Los esfuerzos de la barra aparecen en el lado derecho y se identifican con 2. La distribución real de los esfuerzos de soporte es difícil de determinar, por lo que se acostumbra suponer que están distribuidos uniformemente. Con base en la suposición de

distribución uniforme, podemos calcular un **esfuerzo de soporte promedio** σ_b dividiendo la fuerza de soporte total F_b entre el área de soporte A_b :

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} \quad (1.11)$$

El **área de soporte** se define como el área proyectada de la superficie curva de soporte. Por ejemplo, considere los esfuerzos de soporte identificados con 1. El área proyectada A_b sobre la cual actúan es un rectángulo que tiene una altura igual al espesor de la horquilla y un ancho igual al diámetro del perno. Además, la fuerza de soporte F_b representada por los esfuerzos identificados con 1 es igual a $P/2$. La misma área y la misma fuerza se aplican a los esfuerzos identificados con 3.

Ahora considere los esfuerzos de soporte entre la barra plana y el perno (los esfuerzos identificados con 2). Para estos esfuerzos, el área de soporte A_b es un rectángulo con una altura igual al espesor de la barra plana y con un ancho igual al diámetro del perno. La fuerza de soporte correspondiente F_b es igual a la carga P .

El diagrama de cuerpo libre de la figura 1.24c muestra que hay una tendencia a cortar el perno a lo largo de las secciones transversales mn y pq . A partir de un diagrama de cuerpo libre de la parte $mnpq$ del perno (consulte la figura 1.24d), observamos que las fuerzas cortantes V actúan sobre las superficies cortadas del perno. En este ejemplo particular hay dos planos de corte (mn y pq) y, por tanto, se dice que el perno está en **cortante doble**. En cortante doble, cada una de las fuerzas de corte es igual a la mitad de la carga transmitida por el perno, es decir, $V = P/2$.

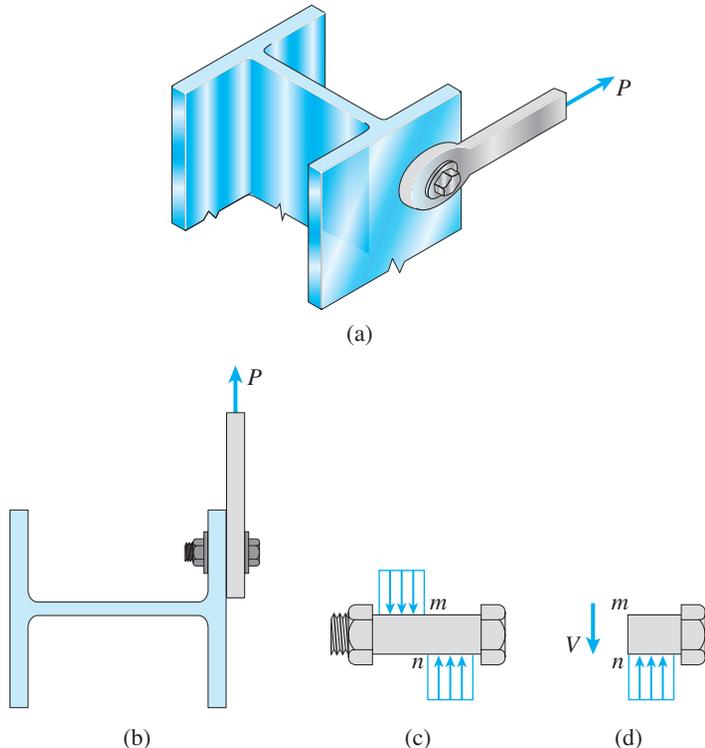


FIGURA 1.25 Conexión con perno en la que el perno está sometido a cortante simple.

Las fuerzas cortantes V son las resultantes de los esfuerzos cortantes distribuidos sobre el área de la sección transversal del perno. Por ejemplo, los esfuerzos cortantes que actúan en la sección transversal mn se muestran en la figura 1.24e. Estos esfuerzos actúan paralelos a la superficie de corte. La distribución exacta de los esfuerzos no se conoce, pero son máximos cerca del centro y se vuelven cero en ciertas ubicaciones en los bordes. Como se indica en la figura 1.24e, los esfuerzos cortantes se representan con la letra griega τ (tau).

Una conexión con perno en **cortante simple** se muestra en la figura 1.25a, donde la fuerza axial P en la barra metálica se transmite al patín de la columna de acero mediante un perno. Una vista de la sección transversal de la columna (figura 1.25b) muestra la conexión con más detalle. Además, un bosquejo del perno (figura 1.25c) muestra la distribución supuesta de los esfuerzos de soporte que actúan en el perno. Como ya se mencionó, la distribución real de estos esfuerzos de soporte es mucho más compleja que la mostrada en la figura. Además, también se desarrollan esfuerzos de soporte contra las superficies internas de la cabeza del perno y de la tuerca. Así, la figura 1.25c *no* es un diagrama de cuerpo libre, ya que sólo se muestran los esfuerzos de soporte idealizados actuando en el vástago del perno.

Al cortar el perno en la sección mn obtenemos el diagrama que se muestra en la figura 1.25d. Este diagrama incluye la fuerza cortante V (igual a la carga P) que actúa sobre la sección transversal del perno. Como ya se señaló, esta fuerza cortante es la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan en el área de la sección transversal del perno.

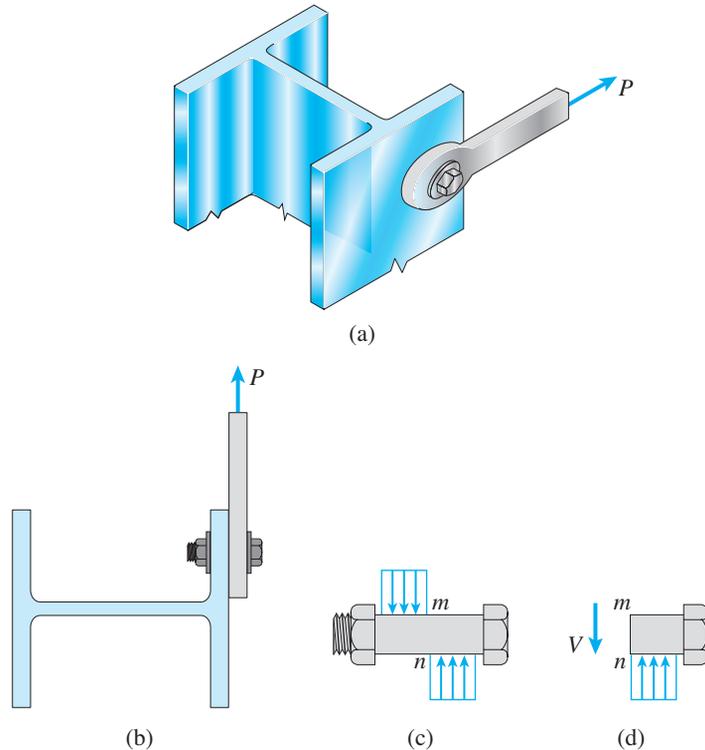


FIGURA 1.25 (Repetida.)

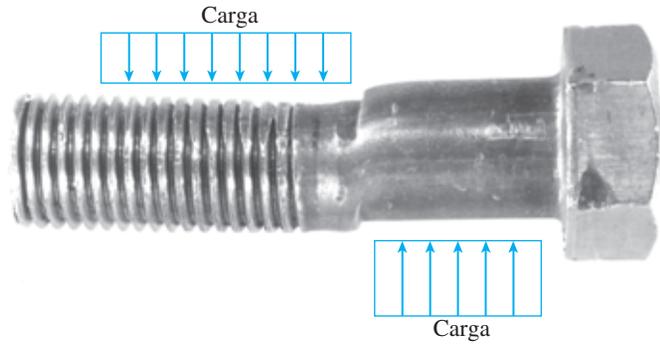


FIGURA 1.26 Falla de un perno en cortante simple.

La deformación de un perno, cargado casi hasta su fractura en cortante simple se muestra en la figura 1.26 (compare con la figura 1.25c).

En las explicaciones anteriores de conexiones con perno ignoramos la **fricción** (producida al apretar los pernos) entre los elementos de conexión. La presencia de fricción significa que parte de la carga es soportada por las fuerzas de fricción, y por ende reducen las cargas en los pernos. Como las fuerzas de fricción son poco confiables y difíciles de estimar, es práctica común pecar de conservador y omitirlas en los cálculos.

El **esfuerzo cortante promedio** sobre la sección transversal de un perno se obtiene dividiendo la fuerza cortante total V entre el área A de la sección transversal sobre la que actúa, como sigue:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{A} \quad (1.12)$$

En el ejemplo de la figura 1.25, que muestra un perno en cortante simple, la fuerza cortante V es igual a la carga P y el área A es el área de la sección transversal del perno. Sin embargo, en el ejemplo de la figura 1.24, donde el perno está en cortante doble, la fuerza cortante V es igual a $P/2$.

De la ecuación (1.12) observamos que los esfuerzos cortantes, al igual que los esfuerzos normales, representan una intensidad de la fuerza o fuerza por unidad de área. Así, las **unidades** del esfuerzo cortante son las mismas que para el esfuerzo normal, que son, psi o ksi en unidades inglesas y pascuales o sus múltiplos en unidades SI.

Las configuraciones de carga que se muestran en las figuras 1.24 y 1.25 son ejemplos de **cortante directo** (o *cortante simple*) en los cuales los esfuerzos cortantes se originan por la acción directa de las fuerzas al tratar de cortar a través del material. El cortante directo se origina en el diseño de pernos, pasadores, remaches, cuñas, soldaduras y juntas pegadas.

También se producen esfuerzos cortantes de una manera indirecta cuando los elementos se someten a tensión, torsión y flexión, como se analiza más adelante en las secciones 2.6, 3.3 y 5.8, respectivamente.

Igualdad de los esfuerzos cortantes en planos perpendiculares

Para obtener una representación más completa de la acción de los esfuerzos cortantes, consideremos un elemento pequeño de material en la forma de un paralelepípedo rectangular con longitudes de sus lados a , b y c en las direc-

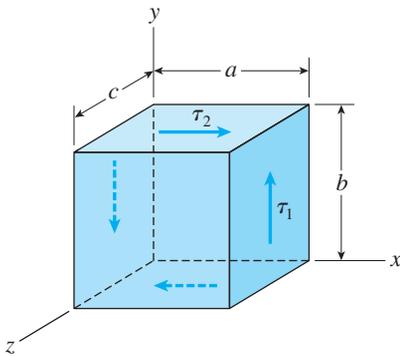


FIGURA 1.27 Elemento pequeño de material sometido a esfuerzos cortantes.

ciones x , y y z , respectivamente (figura 1.27).^{*} Las caras anterior y posterior de este elemento están libres de esfuerzo.

Ahora suponga que un esfuerzo cortante τ_1 está distribuido uniformemente sobre la cara derecha, que tiene un área bc . A fin de que el elemento esté en equilibrio en la dirección y , la fuerza cortante total $\tau_1 bc$ que actúa sobre la cara derecha se debe equilibrar por una fuerza cortante igual pero en dirección opuesta en la cara izquierda. Como las áreas de estas dos caras son iguales, se deduce que los esfuerzos cortantes sobre las dos caras deben ser iguales.

Las fuerzas $\tau_1 bc$ que actúan sobre las caras laterales izquierda y derecha (figura 1.27) forman un par que tiene un momento con respecto al eje z , de magnitud $\tau_1 abc$, que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en la figura.^{**} Para el equilibrio de los elementos se requiere que este momento esté equilibrado por un momento igual y opuesto resultante de los esfuerzos cortantes actuando sobre las caras superior e inferior del elemento. Si representamos los esfuerzos sobre las caras superior e inferior como τ_2 , observamos que las fuerzas cortantes horizontales son iguales a $\tau_2 ac$. Estas fuerzas forman un par en el sentido de las manecillas del reloj de momento $\tau_2 abc$. Del equilibrio de momentos del elemento con respecto al eje z , observamos que $\tau_1 abc$ es igual a $\tau_2 abc$, o

$$\tau_1 = \tau_2 \quad (1.13)$$

Por tanto, las magnitudes de los cuatro esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento son iguales, como se muestra en la figura 1.28a.

En resumen, hemos llegado a las siguientes observaciones generales acerca de los esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento rectangular:

1. Los esfuerzos cortantes sobre caras opuestas (y paralelas) de un elemento son iguales en magnitud y opuestas en dirección.
2. Los esfuerzos cortantes sobre caras adyacentes (y perpendiculares) de un elemento son de igual magnitud y tienen direcciones tales que ambos esfuerzos apuntan alejándose de la línea de intersección de las caras.

Estas observaciones se obtuvieron para un elemento sujeto sólo a esfuerzos cortantes (no esfuerzos normales), como se representa en las figuras 1.27 y 1.28. Este estado de esfuerzo se denomina **cortante puro** y se describirá más adelante con más detalle (sección 3.5).

Para la mayor parte de los fines, las conclusiones anteriores son válidas aun cuando los esfuerzos normales actúen sobre las caras del elemento. La razón es que los esfuerzos sobre caras opuestas de un elemento pequeño usualmente son iguales en magnitud y opuestos en dirección; y de aquí que no modifiquen las ecuaciones de equilibrio empleadas para llegar a las conclusiones anteriores.

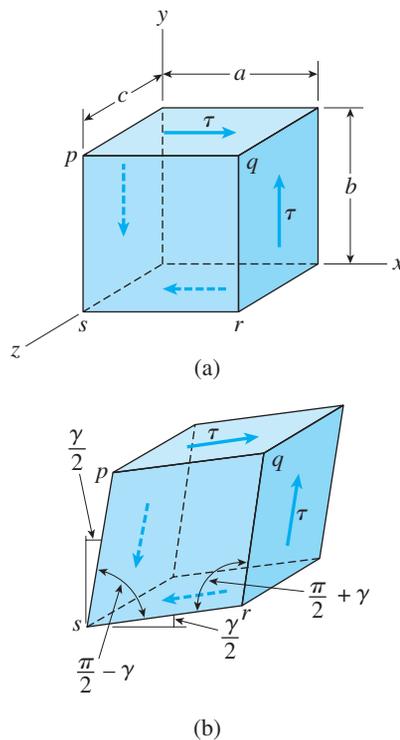


FIGURA 1.28 Elemento de material sometido a esfuerzos y deformaciones unitarias en cortante.

^{*}Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos; así, un paralelepípedo tiene seis caras, cada una de ellas es un paralelogramo. Caras opuestas son paralelas y paralelogramos idénticos. Un **paralelepípedo rectangular** tiene todas sus caras en la forma de rectángulos.

^{**}Un **par** consiste en dos fuerzas paralelas que son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

Deformación unitaria cortante

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento de material (figura 1.28a) van acompañados de *deformaciones unitarias cortantes*. Como una ayuda para visualizar esas deformaciones, observamos que los esfuerzos cortantes no tienen una tendencia a alargar o acortar el elemento en las direcciones x , y y z —en otras palabras, las longitudes de los lados del elemento no cambian—. Más bien, los esfuerzos cortantes producen un cambio en la *forma* del elemento (figura 1.28b). El elemento original, que es un paralelepípedo rectangular, se deforma en un paralelepípedo oblicuo y las caras anterior y posterior se transforman en romboides.*

Debido a esta deformación, cambian los ángulos entre las caras laterales. Por ejemplo, los ángulos en los puntos q y s , que eran $\pi/2$ antes de la deformación, se reducen en un ángulo pequeño γ a $\pi/2 - \gamma$ (figura 1.28b). Al mismo tiempo, los ángulos en los puntos p y r aumentan a $\pi/2 + \gamma$. El ángulo γ es una medida de la **distorsión** o cambio en la forma del elemento y se denomina **deformación unitaria cortante**. Como la deformación unitaria cortante es un ángulo, por lo general se mide en grados o radianes.

Convenciones de signo para esfuerzos cortantes y deformaciones unitarias cortantes

Como ayuda para establecer convenciones de signo para los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias cortantes, necesitamos un esquema en el que se indiquen las diferentes caras de un elemento de esfuerzo (figura 1.28a). De ahora en adelante nos referiremos a las caras orientadas hacia las direcciones positivas de los ejes como las caras positivas del elemento. En otras palabras, una cara positiva tiene su normal exterior dirigida en la dirección positiva de un eje coordenado. Las caras opuestas son caras negativas. Por tanto, en la figura 1.28a, las caras derecha, superior y frontal son las caras x , y y z , respectivamente, y las caras opuestas son las caras negativas x , y y z .

Empleando la terminología descrita en el párrafo anterior, podemos estipular la convención de signos para los esfuerzos cortantes de la siguiente manera:

Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara positiva de un elemento es positivo si actúa en la dirección positiva de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en la dirección negativa de un eje. Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara negativa de un elemento es positivo si actúa en la dirección negativa de un eje y negativo si actúa en una dirección positiva.

Así, todos los esfuerzos cortantes que se muestran en la figura 1.28a son positivos.

La convención de signos para las deformaciones unitarias en cortante es como sigue:

La deformación unitaria cortante en un elemento es positiva cuando se reduce el ángulo entre dos caras positivas (o dos caras negativas). La deformación unitaria es negativa cuando aumenta el ángulo entre dos caras positivas (o entre dos negativas).

*Un **ángulo oblicuo** puede ser agudo o bien obtuso, pero *no* es un ángulo recto. Un **romboide** es un paralelogramo con ángulos oblicuos y lados adyacentes *no* iguales. (Un *rombo* es un paralelogramo con ángulos oblicuos y todos sus cuatro lados iguales, algunas veces denominado *figura con forma de diamante*).

Por tanto, las deformaciones unitarias que se muestran en la figura 1.28b son positivas y observamos que los esfuerzos cortantes positivos van acompañados de deformaciones unitarias cortantes positivas.

Ley de Hooke en cortante

Las propiedades de un material en cortante se pueden determinar de manera experimental a partir de ensayos de cortante directo o de ensayos de torsión. Estos últimos ensayos se realizan torciendo tubos circulares huecos, lo que produce un estado de cortante puro, como se explica más adelante en la sección 3.5. A partir de los resultados de esos ensayos, podemos trazar **diagramas de esfuerzo-deformación unitaria cortante** (es decir, diagramas de esfuerzo cortante τ en función de la deformación unitaria cortante γ). Estos diagramas son similares en forma a los diagramas de ensayos de tensión (σ en función de ϵ) para los mismos materiales, aunque difieren en las magnitudes.

De los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria cortante podemos obtener propiedades de los materiales como el límite de proporcionalidad, el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo último. Estas propiedades en cortante por lo general son casi de la mitad de magnitud que las correspondientes en tensión. Por ejemplo, el esfuerzo de fluencia para el acero estructural en cortante es de 0.5 a 0.6 veces el esfuerzo de fluencia en tensión.

Para muchos materiales, la parte inicial del diagrama de esfuerzo-deformación unitaria en cortante es una recta que pasa por el origen, al igual que en tensión. Para esta región linealmente elástica, el esfuerzo cortante y la deformación unitaria en cortante son proporcionales y, por lo tanto, tenemos la ecuación siguiente para la **ley de Hooke en cortante**:

$$\tau = G\gamma \quad (1.14)$$

en donde G es el **módulo de elasticidad en cortante** (también denominado *módulo de rigidez*).

El módulo de corte G tiene las mismas **unidades** que el módulo de tensión E , que son, psi o ksi en unidades inglesas y pascales (o sus múltiplos) en unidades SI. Para el acero dulce, los valores comunes de G son 11 000 ksi o 75 GPa; para aleaciones de aluminio, los valores comunes son 4000 ksi o 28 GPa. En la tabla H-2 del apéndice H se enlistan valores adicionales.

Los módulos de elasticidad en tensión y en cortante están relacionados por la ecuación siguiente:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.15)$$

en donde ν es la relación de Poisson. Esta relación, que se deducirá después, en la sección 3.6, muestra que E , G y ν no son propiedades elásticas independientes del material. Debido a que la relación de Poisson para materiales ordinarios se encuentra entre cero y un medio, de la ecuación (1.15) observamos que G debe ser de un tercio a un medio de E .

Los siguientes ejemplos ilustran algunos análisis típicos que comprenden los efectos del esfuerzo cortante. El ejemplo 1.4 tiene que ver con esfuerzos cortantes en una placa, el ejemplo 1.5 trata de esfuerzos de soporte y cortantes en pasadores y pernos, y el ejemplo 1.6 implica determinar los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias cortantes en una placa elastomérica de soporte sometida a una fuerza cortante horizontal.

Ejemplo 1.4

En la figura 1.29a se muestra un punzón para hacer agujeros en placas de acero. Suponga que se utiliza un punzón con un diámetro $d = 20$ mm para hacer un agujero en una placa de 8 mm de espesor, como se muestra en la vista transversal correspondiente (figura 1.29b).

Si se requiere de una fuerza $P = 110$ kN para hacer el agujero, ¿cuál es el esfuerzo cortante promedio en la placa y el esfuerzo de compresión promedio en el punzón?

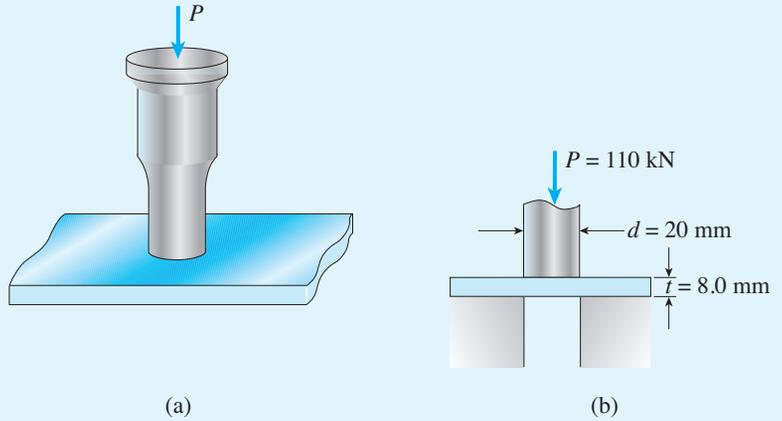


FIGURA 1.29 Ejemplo 1.4. Realización de un agujero con punzón en una placa de acero.

Solución

El esfuerzo cortante promedio en la placa se obtiene dividiendo la fuerza P entre el área en cortante de la placa. El área en cortante A_s es igual a la circunferencia del agujero por el espesor de la placa, o

$$A_s = \pi dt = \pi(20 \text{ mm})(8.0 \text{ mm}) = 502.7 \text{ mm}^2$$

en donde d es el diámetro del punzón y t es el espesor de la placa. Por lo tanto, el esfuerzo cortante promedio en la placa es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A_s} = \frac{110 \text{ kN}}{502.7 \text{ mm}^2} = 219 \text{ MPa}$$

El esfuerzo de compresión promedio en el punzón es

$$\sigma_c = \frac{P}{A_{\text{punzón}}} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{110 \text{ kN}}{\pi(20 \text{ mm})^2/4} = 350 \text{ MPa}$$

en donde $A_{\text{punzón}}$ es el área de la sección transversal del punzón.

Nota: este análisis está muy idealizado debido a que ignoramos los efectos de impacto que ocurren cuando se penetra una placa con un punzón. (Para incluirlos se requiere una metodología de análisis que están más allá del alcance de la mecánica de materiales.)

Ejemplo 1.5

Un puntal S de acero que sirve como riostra para un malacate marino transmite una fuerza de compresión $P = 12$ k a la plataforma de un muelle (figura 1.30a). El puntal tiene una sección transversal hueca con espesor de pared $t = 0.375$ in (figura 1.30b) y el ángulo θ entre el puntal y la horizontal es 40° . Un pasador que atraviesa el puntal transmite la fuerza de compresión del puntal a dos placas de unión G que están soldadas a la placa base B . Cuatro pernos de anclaje sujetan la placa base a la plataforma.

El diámetro del pasador es $d_{\text{pasador}} = 0.75$ in, el espesor de las placas de unión es $t_G = 0.625$ in, el espesor de la placa base es $t_B = 0.375$ in y el diámetro de los pernos de anclaje es $d_{\text{perno}} = 0.50$ in.

Determine los esfuerzos siguientes: (a) el esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador, (b) el esfuerzo cortante en el pasador, (c) el esfuerzo de soporte entre el pasador y las placas de unión, (d) el esfuerzo de soporte entre los pernos de anclaje y la placa base y (e) el esfuerzo cortante en los pernos de anclaje. (No tenga en cuenta la fricción entre la placa base y la plataforma.)

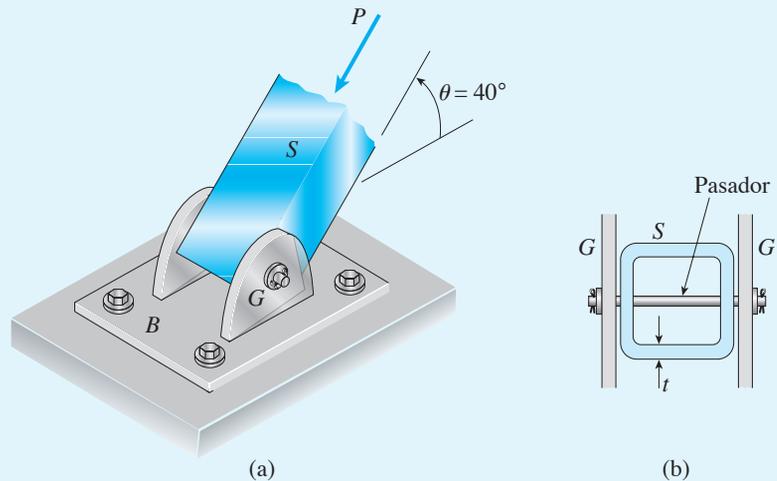


FIGURA 1.30 Ejemplo 1.5. (a) Conexión con pasador entre el puntal S y la placa base B . (b) Sección transversal a través del puntal S .

Solución

(a) *Esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador.* El valor promedio del esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador se determina dividiendo la fuerza en el puntal entre el área total de soporte del puntal contra el pasador. Ésta última es igual al doble del espesor del puntal (debido a que el soporte se tiene en dos ubicaciones) por el diámetro del pasador (consulte la figura 1.30b). Por tanto, el esfuerzo de soporte es

$$\sigma_{b1} = \frac{P}{2td_{\text{perno}}} = \frac{12 \text{ k}}{2(0.375 \text{ in})(0.75 \text{ in})} = 21.3 \text{ ksi}$$



Este esfuerzo de soporte no es excesivo para un puntal de acero estructural.

(b) *Esfuerzo cortante en el pasador.* Como se observa en la figura 1.30b, el pasador tiende a cortarse en dos planos, que son los planos entre el puntal y las placas de unión. Por tanto, el esfuerzo cortante promedio en el pasador (que está en cortante doble) es igual a la carga total aplicada al pasador dividida entre dos veces el área de su sección transversal.

$$\tau_{\text{pasador}} = \frac{P}{2\pi d_{\text{pasador}}^2/4} = \frac{12 \text{ k}}{2\pi(0.75 \text{ in})^2/4} = 13.6 \text{ ksi} \quad \leftarrow$$

Normalmente el pasador se fabricaría con acero de alta resistencia (esfuerzo de fluencia en tensión mayor que 50 ksi) y con facilidad podría soportar este esfuerzo cortante (el esfuerzo de fluencia en cortante usualmente es al menos 50% del esfuerzo de fluencia en tensión).

(c) *Esfuerzo de soporte entre el pasador y las placas de unión.* El pasador se apoya contra las placas de unión en dos puntos, por tanto el área de soporte es el doble del espesor de las placas de unión por el diámetro del pasador; entonces,

$$\sigma_{b2} = \frac{P}{2t_G d_{\text{pasador}}} = \frac{12 \text{ k}}{2(0.625 \text{ in})(0.75 \text{ in})} = 12.8 \text{ ksi} \quad \leftarrow$$

que es menor que el esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador (21.3 ksi).

(d) *Esfuerzo de soporte entre los pernos de anclaje y la placa base.* La componente vertical de la fuerza P (consulte la figura 1.30a) se transmite a la plataforma por soporte directo entre la placa base y la plataforma. Sin embargo, la componente horizontal se transmite a través de los pernos de anclaje. El esfuerzo de soporte promedio entre la placa base y los pernos de anclaje es igual a la componente horizontal de la fuerza P dividida entre el área de soporte de los cuatro pernos. El área de soporte para un perno es igual al espesor de la placa base por el diámetro del perno. En consecuencia, el esfuerzo de soporte es

$$\sigma_{b3} = \frac{P \cos 40^\circ}{4t_B d_{\text{perno}}} = \frac{(12 \text{ k})(\cos 40^\circ)}{4(0.375 \text{ in})(0.50 \text{ in})} = 12.3 \text{ ksi} \quad \leftarrow$$

(e) *Esfuerzo cortante en los pernos de anclaje.* El esfuerzo cortante promedio en los pernos de anclaje es igual a la componente horizontal de la fuerza P dividida entre el área total de la sección transversal de los cuatro pernos (observe que cada perno está sometido a cortante simple). Por lo tanto,

$$\tau_{\text{perno}} = \frac{P \cos 40^\circ}{4\pi d_{\text{perno}}^2/4} = \frac{(12 \text{ k})(\cos 40^\circ)}{4\pi(0.50 \text{ in})^2/4} = 11.7 \text{ ksi} \quad \leftarrow$$

Cualquier fricción entre la placa base y la plataforma reduciría la carga sobre los pernos de anclaje.

Ejemplo 1.6

Una placa de soporte del tipo empleado para sostener máquinas y traveses de puentes consiste en un material linealmente elástico (por lo general un elastómero como el caucho) cubierto con una placa de acero (figura 1.31a). Suponga que el espesor del elastómero es h , que las dimensiones de la placa son $a \times b$ y que la placa está sometida a una fuerza cortante horizontal V .

Obtenga fórmulas para el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en el elastómero y el desplazamiento horizontal d de la placa (figura 1.31b).

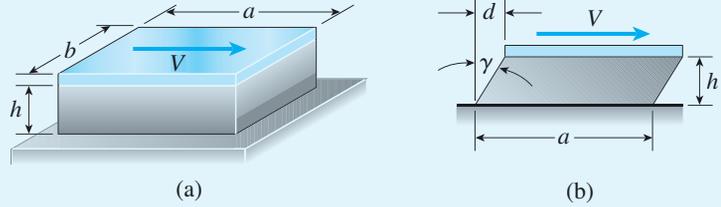


FIGURA 1.31 Ejemplo 1.6. Placa de soporte en cortante.

Solución

Suponga que los esfuerzos cortantes en el elastómero están distribuidos uniformemente en todo el volumen del mismo. Entonces el esfuerzo cortante sobre cualquier plano horizontal a través del elastómero es igual a la fuerza cortante V dividida entre el área ab de la placa (figura 1.31a):

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{ab} \quad (1.16) \quad \leftarrow$$

La deformación unitaria cortante correspondiente (de la ley de Hooke para cortante; ecuación 1.14) es

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{prom}}}{G_e} = \frac{V}{abG_e} \quad (1.17) \quad \leftarrow$$

en donde G_e es el módulo de corte del material elastomérico. Por último, el desplazamiento horizontal d es igual a $h \tan \gamma$ (de la figura 1.31b):

$$d = h \tan \gamma = h \tan \left(\frac{V}{abG_e} \right) \quad (1.18) \quad \leftarrow$$

En la mayor parte de las situaciones prácticas la deformación unitaria por cortante γ es un ángulo pequeño y en esos casos $\tan \gamma$ se puede sustituir por γ y obtenemos

$$d = h\gamma = \frac{hV}{abG_e} \quad (1.19) \quad \leftarrow$$

Las ecuaciones (1.18) y (1.19) dan resultados aproximados del desplazamiento horizontal de la placa, debido a que se basan en la suposición de que el esfuerzo cortante y la deformación unitaria cortante son constantes en todo el volumen del material elastomérico. En realidad, el esfuerzo cortante es cero en los bordes del material (porque no hay esfuerzos cortantes sobre las caras verticales libres) y, por tanto, la deformación del material es más compleja que la representada en la figura 1.31b. Sin embargo, si la longitud a de la placa es grande en comparación con el espesor h del elastómero, los resultados anteriores son satisfactorios para fines de diseño.

1.7 ESFUERZOS Y CARGAS PERMISIBLES

La ingeniería se ha descrito apropiadamente como la *aplicación de la ciencia a los propósitos comunes de la vida*. Al cumplir esta misión, los ingenieros diseñan una variedad aparentemente sin fin de objetos para satisfacer las necesidades básicas de la sociedad. Esas necesidades incluyen vivienda, agricultura, transporte, comunicación y muchos otros aspectos de la vida moderna. Los factores que se deben considerar en el diseño incluyen funcionalidad, resistencia, apariencia, economía y efectos ambientales. Sin embargo, al estudiar la mecánica de materiales, nuestro interés principal de diseño es la **resistencia**, es decir, *la capacidad del objeto para soportar o transmitir cargas*. Entre los objetos que deben soportar cargas se incluyen edificios, máquinas, recipientes, camiones, aeronaves, barcos y similares. Por simplicidad, nos referiremos a estos objetos como **estructuras**; por tanto, *una estructura es cualquier objeto que debe soportar o transmitir cargas*.

Factores de seguridad

Como se debe evitar la falla estructural, las cargas que una estructura debe soportar deben ser mayores que las cargas a que se someterá cuando esté en servicio. Como la *resistencia* es la habilidad de una estructura para resistir cargas, el criterio anterior se puede volver a plantear como sigue: *la resistencia real de una estructura debe ser mayor que la resistencia requerida*. La razón entre la resistencia real y la resistencia requerida se denomina **factor de seguridad n** :

$$\text{Factor de seguridad } n = \frac{\text{Resistencia real}}{\text{Resistencia requerida}} \quad (1.20)$$

Por supuesto, para evitar la falla el factor de seguridad debe ser mayor que 1.0. Dependiendo de las circunstancias, se utilizan factores de seguridad un poco mayores que 1.0 y hasta de 10.

La incorporación de factores de seguridad en el diseño no es un asunto simple, porque tanto la resistencia como la falla pueden tener significados distintos. La resistencia se puede medir mediante la capacidad de soporte de carga de una estructura o por el esfuerzo en el material. Falla puede significar la fractura y el derrumbe completo de una estructura, o puede significar que las deformaciones son tan grandes que la estructura ya no puede realizar sus funciones propuestas. Éste último tipo de falla puede presentarse con cargas mucho menores que las que ocasionan el desplome real.

En la determinación de un factor de seguridad también deben tomarse en cuenta aspectos como los siguientes: probabilidad de sobrecarga accidental de la estructura, por cargas que sobrepasan las cargas de diseño; tipos de cargas (estáticas o dinámicas); si las cargas se aplican una vez o se repiten; qué tan exactamente se conocen las cargas; posibilidades de falla

por fatiga; imprecisiones de construcción; variabilidad en la calidad de la mano de obra; variaciones en las propiedades de los materiales; deterioro debido a corrosión u otros efectos ambientales; precisión de los métodos de análisis; si la falla es gradual (con advertencia suficiente) o repentina (sin advertencia); consecuencias de la falla (daño menor o catástrofe mayor) y otras consideraciones de este tipo. Si el factor de seguridad es muy bajo, la probabilidad de falla será alta y la estructura será inaceptable; si es muy grande, la estructura será un desperdicio de materiales y tal vez inadecuada para su función (por ejemplo, podría ser muy pesada).

Debido a estas complejidades e incertidumbres, los factores de seguridad deben determinarse con una base probabilística. En general son establecidos por grupos de ingenieros experimentados que escriben los códigos y las especificaciones empleadas por otros diseñadores y en algunas ocasiones se promulgan como leyes. Las previsiones de códigos y especificaciones tienen el propósito de proporcionar niveles de seguridad razonables sin costos exorbitantes.

En el diseño de aeronaves se acostumbra hablar del **margen de seguridad** en lugar del factor de seguridad. El margen de seguridad se define como el factor de seguridad menos uno:

$$\text{Margen de seguridad} = n - 1 \quad (1.21)$$

El margen de seguridad con frecuencia se expresa como un porcentaje, caso en el cual el valor dado antes se multiplica por 100. Por tanto, una estructura que tiene un resistencia real que es 1.75 veces la requerida tiene un factor de seguridad de 1.75 y un margen de seguridad de 0.75 (o 75 por ciento). Cuando el margen de seguridad se reduce a cero o menos, la estructura (probablemente) fallará.

Esfuerzos permisibles

Los factores de seguridad se definen e implantan de diversas maneras. Para muchas estructuras, es importante que el material permanezca dentro del rango elástico a fin de evitar deformaciones permanentes cuando se remuevan las cargas. En estas condiciones el factor de seguridad se establece con respecto a la fluencia de la estructura. La fluencia inicia cuando el esfuerzo de fluencia se alcanza en *cualquier* punto dentro de la estructura. Por tanto, al aplicar un factor de seguridad con respecto al esfuerzo de fluencia (o resistencia a la fluencia), obtenemos un **esfuerzo permisible** (o *esfuerzo de trabajo*) que no se debe rebasar en la estructura. Por tanto,

$$\text{Esfuerzo permisible} = \frac{\text{Resistencia a la fluencia}}{\text{Factor de seguridad}} \quad (1.22)$$

O bien, para tensión y cortante, respectivamente,

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_Y}{n_1} \quad \text{y} \quad \tau_{\text{perm}} = \frac{\tau_Y}{n_2} \quad (1.23\text{a,b})$$

donde σ_Y y τ_Y son los esfuerzos de fluencia y n_1 y n_2 son los factores de seguridad correspondientes. En el diseño de edificios, un factor de seguridad común con respecto a la fluencia en tensión es 1.67; por lo que un acero dulce que tenga una resistencia a la fluencia de 36 ksi tiene un esfuerzo permisible de 21.6 ksi.

En ocasiones el factor de seguridad se aplica al **esfuerzo último** en vez de al esfuerzo de fluencia. Este método es adecuado para materiales frágiles, como el concreto y algunos plásticos, y para materiales sin un esfuerzo de fluencia bien definido, como la madera y los aceros de alta resistencia. En estos casos los esfuerzos permisibles en tensión y cortante son

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_U}{n_3} \quad \text{y} \quad \tau_{\text{perm}} = \frac{\tau_U}{n_4} \quad (1.24\text{a,b})$$

donde σ_U y τ_U son los esfuerzos últimos (o resistencias últimas). Los factores de seguridad con respecto a la resistencia última de un material, en general, son mayores que los basados en la resistencia a la fluencia. En el caso de acero dulce, un factor de seguridad de 1.67 con respecto a la fluencia corresponde a un factor de aproximadamente 2.8 con respecto a la resistencia última.

Cargas permisibles

Después que se han establecido los esfuerzos permisibles para un material o una estructura particular, se puede determinar la **carga permisible** sobre esa estructura. La relación entre la carga permisible y el esfuerzo permisible depende del tipo de estructura. En este capítulo nos interesan sólo las clases más elementales de estructuras, que son las barras en tensión o compresión y los pasadores (o pernos) en cortante directo y en soporte.

En estos tipos de estructuras los esfuerzos están distribuidos uniformemente (o al menos se *supone* que lo están) sobre un área. Por ejemplo, en el caso de una barra en tensión, el esfuerzo está distribuido uniformemente sobre el área de la sección transversal, siempre que la fuerza axial resultante actúe en el centroide de la sección transversal. Lo mismo es válido para una barra en compresión con la condición que no se le someta a una carga excéntrica que provoque pandeo. En el caso de un pasador sometido a cortante, sólo consideramos el esfuerzo cortante promedio sobre la sección transversal, que es equivalente a suponer que el esfuerzo cortante está distribuido uniformemente. De manera similar, sólo consideramos un valor promedio del esfuerzo de soporte que actúa sobre el área proyectada del pasador.

Por tanto, en los cuatro casos anteriores la **carga permisible** (también llamada *carga segura*) es igual al esfuerzo permisible por el área sobre la que actúa:

$$\text{Carga permisible} = (\text{Esfuerzo permisible})(\text{Área}) \quad (1.25)$$

Para barras en *tensión* y *compresión* directa (sin pandeo), esta ecuación se convierte en

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A \quad (1.26)$$

donde σ_{perm} es el esfuerzo normal permisible y A es el área de la sección transversal de la barra. Si la barra tiene un agujero, cuando se somete a tensión es usual que se emplee el *área neta*. El **área neta** es el área total de la sección transversal menos el área del agujero. Para compresión, se puede emplear el área total si por el agujero pasa un perno o un pasador que pueda transmitir los esfuerzos de compresión.

Para pasadores en *cortante directo*, la ecuación (1.25) se transforma en

$$P_{\text{perm}} = \tau_{\text{perm}} A \quad (1.27)$$

en donde τ_{perm} es el esfuerzo cortante permisible y A es el área sobre la que actúa el esfuerzo cortante. Si el pasador está en cortante simple, el área es el de la sección transversal del pasador; en cortante doble, es el doble del área de la sección transversal.

Por último, la carga permisible basada en *soporte* es

$$P_{\text{perm}} = \sigma_b A_b \quad (1.28)$$

en donde σ_b es el esfuerzo normal permisible y A_b es el área proyectada del pasador u otra superficie sobre la que actúan los esfuerzos de soporte.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se determinan las cargas permisibles cuando se conocen los esfuerzos permisibles del material.

Ejemplo 1.7

Una barra de acero que trabaja como barra de suspensión para maquinaria pesada en una fábrica, está acoplada a un soporte mediante la conexión con perno que se muestra en la figura 1.32. La parte principal del colgante tiene una sección transversal rectangular con un ancho $b_1 = 1.5$ in y un espesor $t = 0.5$ in. En la conexión con perno la barra de suspensión se alarga hasta un ancho $b_2 = 3.0$ in. El perno, que transfiere la carga de la barra a las dos placas de unión, tiene un diámetro $d = 1.0$ in.

Determine el valor permisible de la carga de tensión P en la barra de suspensión con base en las siguientes consideraciones:

- El esfuerzo de tensión permisible en la parte principal de la barra de suspensión es 16,000 psi.
- El esfuerzo de tensión permisible en la barra de suspensión en su sección transversal que pasa por el agujero del perno es 11,000 psi. (El esfuerzo permisible en esta sección es menor debido a las concentraciones de esfuerzos alrededor del agujero).
- El esfuerzo de soporte permisible entre la barra de suspensión y el perno es 26,000 psi.
- El esfuerzo cortante permisible en el perno es 6500 psi.

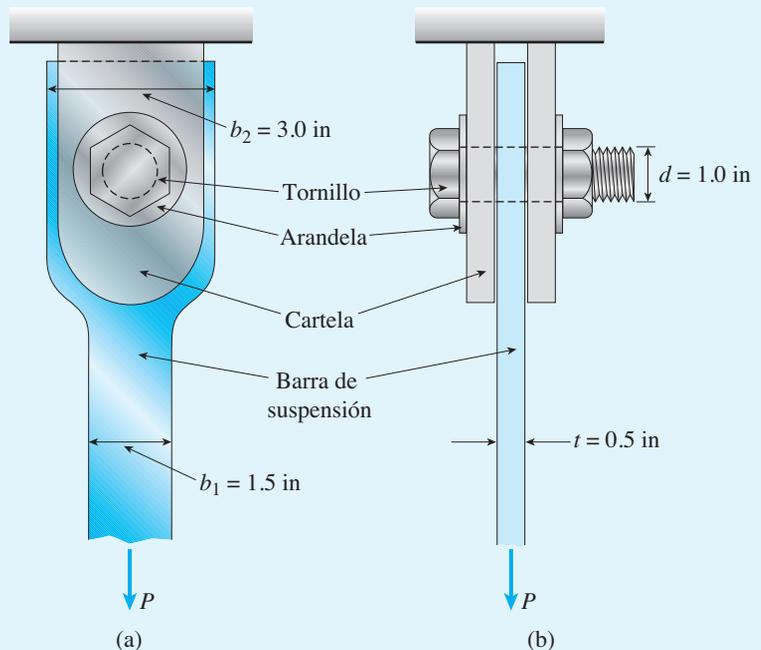


FIGURA 1.32 Ejemplo 1.7. Barra de suspensión vertical sometida a una carga de tensión P : (a) vista frontal de la conexión con perno y (b) vista lateral de la conexión.

Solución

(a) La carga permisible P_1 con base en el esfuerzo en la parte principal de la barra de suspensión es igual al esfuerzo permisible en tensión por el área de la sección transversal de la barra de suspensión (ecuación 1.26):

$$P_1 = \sigma_{\text{perm}} A = \sigma_{\text{perm}} b_1 t = (16,000 \text{ psi})(1.5 \text{ in} \times 0.5 \text{ in}) = 12,000 \text{ lb}$$

continúa

Una carga mayor que este valor provocará una tensión excesiva en la parte principal de la barra de suspensión, es decir, el esfuerzo real excederá el esfuerzo permisible y, en consecuencia, se reduciría el factor de seguridad.

(b) En la sección transversal de la barra de suspensión a través del perno debemos hacer un cálculo similar, pero con un esfuerzo permisible y un área diferentes. El área neta de la sección transversal es igual al ancho neto por el espesor. El ancho neto es igual al ancho total b_2 menos el diámetro d del agujero. Por tanto, la ecuación para la carga permisible P_2 en esta sección es

$$P_2 = \sigma_{\text{perm}} A = \sigma_{\text{perm}} (b_2 - d)t = (11,000 \text{ psi})(3.0 \text{ in} - 1.0 \text{ in})(0.5 \text{ in}) \\ = 11,000 \text{ lb}$$

(c) La carga permisible basada en el soporte entre la barra de suspensión y el perno es igual al esfuerzo de soporte permisible por el área de soporte. El área de soporte es la proyección del área real de contacto, que a su vez es igual al diámetro del perno por el espesor de la barra de suspensión. Por tanto, la carga permisible (ecuación 1.28) es

$$P_3 = \sigma_b A = \sigma_b dt = (26,000 \text{ psi})(1.0 \text{ in})(0.5 \text{ in}) = 13,000 \text{ lb}$$

(d) Por último, la carga permisible P_4 con base en el cortante en el perno es igual al esfuerzo cortante permisible por el área de corte (ecuación 1.27). El área de corte es dos veces el área del perno debido a que el perno está en cortante doble; por tanto:

$$P_4 = \tau_{\text{perm}} A = \tau_{\text{perm}} (2)(\pi d^2/4) = (6500 \text{ psi})(2)(\pi)(1.0 \text{ in})^2/4 = 10,200 \text{ lb}$$

Ahora hemos determinado las cargas de tensión permisibles en la barra de suspensión con base en las cuatro condiciones dadas.

Al comparar los cuatro resultados anteriores, observamos que el valor menor de la carga es

$$P_{\text{perm}} = 10,200 \text{ lb}$$



Esta carga, que se basa en el cortante en el perno, es la carga de tensión permisible en la barra de suspensión.

1.8 DISEÑO POR CARGAS AXIALES Y CORTANTE DIRECTO

En la sección anterior analizamos la determinación de las cargas permisibles para estructuras simples y en secciones anteriores vimos cómo determinar esfuerzos, deformaciones unitarias y deformaciones en barras. La determinación de esas cantidades se conoce como **análisis**. En el contexto de la mecánica de materiales, el análisis consiste en determinar la *respuesta* de una estructura a cargas, cambios de temperatura y otras acciones físicas. Por respuesta de una estructura queremos decir los esfuerzos, las deformaciones unitarias y las deformaciones producidas por las cargas.

Respuesta también se refiere a la capacidad de soporte de carga de una estructura; por ejemplo, la carga permisible sobre una estructura es una forma de respuesta.

Se dice que una estructura es *conocida* (o *dada*) cuando tenemos una descripción física completa de ella, es decir cuando conocemos todas sus *propiedades*. Las propiedades de una estructura incluyen los tipos de elementos y cómo están dispuestos, las dimensiones de todos los elementos, los tipos de soportes y dónde se ubican, los materiales empleados y sus propiedades. Así, cuando se analiza una estructura, *se dan las propiedades y se determinará su respuesta*.

El proceso inverso se denomina **diseño**. Al diseñar una estructura, *debemos determinar las propiedades de la estructura a fin de que soporte las cargas y cumpla sus funciones previstas*. Por ejemplo, un problema de diseño común en ingeniería es determinar el tamaño de un elemento para soportar ciertas cargas dadas. En general, diseñar una estructura es un proceso más largo y más difícil que analizarla; de hecho, analizar una estructura, a menudo más de una vez, es parte característica del proceso de diseño.

En esta sección trataremos el diseño en su forma más elemental calculando los tamaños requeridos de elementos en tensión y compresión simple así como de pasadores y pernos cargados en cortante. En estos casos el proceso de diseño es muy directo. Si se conocen las cargas que se van a transmitir y los esfuerzos permisibles en los materiales, podemos calcular las áreas necesarias de los elementos a partir de la relación general siguiente (compárela con la ecuación 1.25):

$$\text{Área requerida} = \frac{\text{Carga por transmitir}}{\text{Esfuerzo permisible}} \quad (1.29)$$

Esta ecuación se puede aplicar a cualquier estructura en la que los esfuerzos estén distribuidos uniformemente sobre el área. (Su uso en la determinación del tamaño de una barra en tensión y el tamaño de un pasador en cortante se ilustra en el ejemplo 1.8 que sigue).

Además de consideraciones de **resistencia**, como se ejemplifica por la ecuación (1.29), es probable que el diseño de una estructura comprenda la **rigidez** y la **estabilidad**. Rigidez se refiere a la capacidad de la estructura para resistir cambios de forma (por ejemplo, para resistir alargamiento, flexión o torsión) y estabilidad se refiere a la habilidad de la estructura para resistir pandeo ante esfuerzos de compresión. En ocasiones son necesarias

limitaciones en la rigidez para evitar deformaciones excesivas, como deflexiones grandes de una viga que podrían interferir con su desempeño. El pandeo es la consideración principal en el diseño de columnas, que son elementos esbeltos en compresión (capítulo 11).

Otra parte del proceso de diseño es el **perfeccionamiento**, que es la tarea de diseñar la mejor estructura para cumplir con una meta particular, como peso mínimo. Por ejemplo, puede haber muchas estructuras que soportarán una carga dada, pero en algunas circunstancias la mejor estructura será la más ligera. Por supuesto, una meta como peso mínimo generalmente se debe equilibrar con consideraciones más generales, incluyendo los aspectos estético, económico, ambiental, político y técnico del proyecto de diseño particular.

Al analizar o diseñar una estructura, nos referimos a las fuerzas que actúan sobre ella ya sea como **cargas** o **reacciones**. Las cargas son *fuerzas activas* que se aplican a la estructura debido a alguna causa externa, como la gravedad, presión del agua, viento y movimiento del suelo por un terremoto. Las reacciones son *fuerzas pasivas* que se inducen en los soportes de la estructura, cuyas magnitudes y direcciones se determinan por la naturaleza de la propia estructura. Por tanto, las reacciones se deben calcular como parte del análisis, en tanto que las cargas se conocen de antemano.

El ejemplo 1.8, en las siguientes páginas, comienza con un repaso de los **diagramas de cuerpo libre** y de la estática elemental y concluye con el diseño de una barra en tensión y un pasador en cortante directo.

Al trazar diagramas de cuerpo libre es útil hacer la diferencia entre reacciones debidas a cargas y reacciones debidas a otras fuerzas aplicadas. Un esquema común es colocar una línea o línea inclinada, a través de la flecha cuando representa una fuerza reactiva, como se ilustra en la figura 1.34 del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.8

La armadura de dos barras ABC que se muestra en la figura 1.33 tiene soportes articulados en los puntos A y C , que están separados 2.0 m. Los elementos AB y BC son barras de acero, interconectadas por un pasador en el nodo B . La longitud de la barra BC es de 3.0 m. Un anuncio que pesa 5.4 kN está suspendido de la barra BC en los puntos D y E , que están ubicados a 0.8 m y 0.4 m, respectivamente, de los extremos de la barra.

Determine el área de la sección transversal necesaria de la barra AB y el diámetro necesario del pasador en el soporte C si los esfuerzos permisibles en tensión y cortante son 125 MPa y 45 MPa, respectivamente. (Nota: los pasadores en los soportes están en cortante doble. Además, no tome en cuenta los pesos de los elementos AB y BC .)

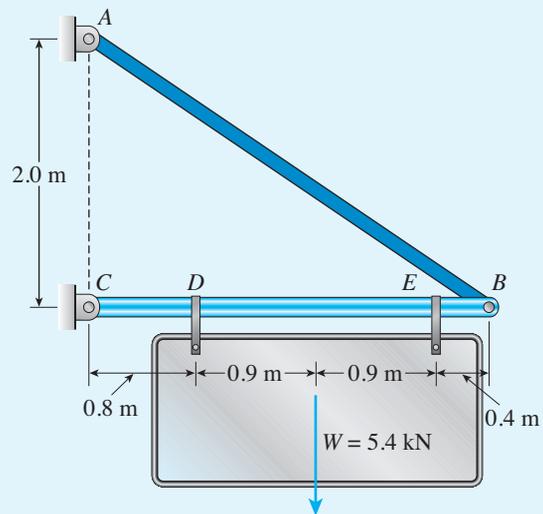


FIGURA 1.33 Ejemplo 1.8. Armadura de dos barras ABC que soportan un anuncio con peso W .

Solución

Los objetivos de este ejemplo son determinar los tamaños necesarios de la barra AB y del pasador en el soporte C . Como primer punto, debemos determinar la fuerza de tensión en la barra y la fuerza cortante que atúa sobre el pasador. Estas cantidades se encuentran a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio.

Reacciones: iniciamos con un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa (figura 1.34a). En este diagrama mostramos todas las fuerzas que actúan sobre la armadura, que son, las cargas del peso del anuncio y las fuerzas reactivas ejercidas por los soportes de los pasadores en A y C . Cada reacción se muestra mediante sus componentes horizontal y vertical, mostrando la reacción resultante mediante una línea discontinua. (Observe el uso de líneas a través de las flechas para distinguir las reacciones de las cargas).

La componente horizontal R_{AH} de la reacción en el soporte A se obtiene sumando momentos con respecto al punto C , como sigue (los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos):

$$\sum M_C = 0 \quad R_{AH}(2.0 \text{ m}) - (2.7 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) - (2.7 \text{ kN})(2.6 \text{ m}) = 0$$

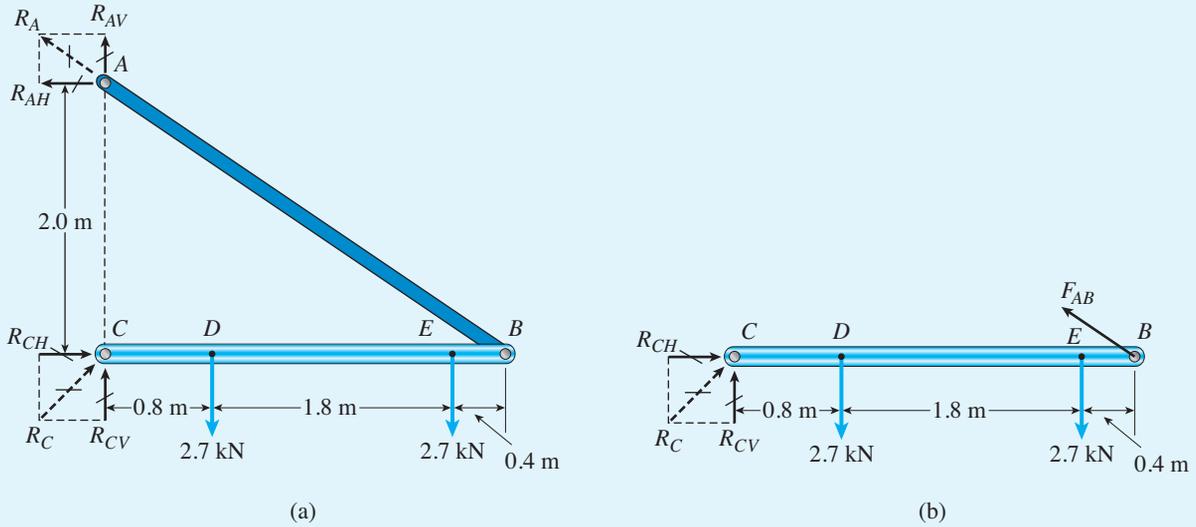


FIGURA 1.34 Diagramas de cuerpo libre para el ejemplo 1.8.

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$R_{AH} = 4.590 \text{ kN}$$

Enseguida sumamos las fuerzas en la dirección horizontal y tenemos

$$\sum F_{\text{horiz}} = 0 \quad R_{CH} = R_{AH} = 4.590 \text{ kN}$$

Para obtener la componente vertical de la reacción en el soporte C podemos emplear un diagrama de cuerpo libre del elemento BC, como se muestra en la figura 1.34b. La suma de momentos con respecto al nodo B da la componente deseada de la reacción:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 \quad -R_{CV}(3.0 \text{ m}) + (2.7 \text{ kN})(2.2 \text{ m}) + (2.7 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) &= 0 \\ R_{CV} &= 2.340 \text{ kN} \end{aligned}$$

Ahora regresamos al diagrama de cuerpo libre de la armadura completa (figura 1.34a) y sumamos fuerzas en la dirección vertical para obtener la componente vertical R_{AV} de la reacción en A:

$$\begin{aligned} \sum F_{\text{vert}} = 0 \quad R_{AV} + R_{CV} - 2.7 \text{ kN} - 2.7 \text{ kN} &= 0 \\ R_{AV} &= 3.060 \text{ kN} \end{aligned}$$

Como una verificación parcial de estos resultados, observamos que la razón R_{AV}/R_{AH} de las fuerzas que actúan en el punto A es igual a la razón de las componentes vertical y horizontal de la línea AB que es: 2.0 m/3.0 m o 2/3.

Conociendo las componentes horizontal y vertical de la reacción en A , podemos calcular la reacción misma (figura 1.34a):

$$R_A = \sqrt{(R_{AH})^2 + (R_{AV})^2} = 5.516 \text{ kN}$$

De manera similar, la reacción en el punto C se obtiene a partir de sus componentes R_{CH} y R_{CV} , como sigue:

$$R_C = \sqrt{(R_{CH})^2 + (R_{CV})^2} = 5.152 \text{ kN}$$

Fuerza de tensión en la barra AB . Como no tomamos en cuenta el peso de la barra AB , la fuerza de tensión F_{AB} en la barra es igual a la reacción en A (consulte la figura 1.34):

$$F_{AB} = R_A = 5.516 \text{ kN}$$

Fuerza cortante que actúa sobre el pasador en C . Esta fuerza cortante es igual a la reacción R_C (consulte la figura 1.34); por tanto,

$$V_C = R_C = 5.152 \text{ kN}$$

De esta manera, ahora hemos determinado la fuerza de tensión F_{AB} en la barra AB y la fuerza cortante V_C que actúa sobre el pasador en C .

Área necesaria de la barra. El área de la sección transversal necesaria de la barra AB se calcula dividiendo la fuerza de tensión entre el esfuerzo permisible, ya que el esfuerzo está distribuido uniformemente sobre la sección transversal (consulte la ecuación 1.29):

$$A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{5.516 \text{ kN}}{125 \text{ MPa}} = 44.1 \text{ mm}^2$$



La barra AB se debe diseñar con un área de sección transversal igual o mayor que 44.1 mm² a fin de que soporte el peso del anuncio, que es la única carga que consideramos. Si se incluyen otras cargas en los cálculos, el área necesaria será mayor.

Diámetro necesario del pasador. El área de la sección transversal necesaria del pasador en C , el cual está en cortante doble, es

$$A_{\text{pasador}} = \frac{V_C}{2\tau_{\text{perm}}} = \frac{5.152 \text{ kN}}{2(45 \text{ MPa})} = 57.2 \text{ mm}^2$$

de donde podemos calcular el diámetro requerido:

$$d_{\text{pasador}} = \sqrt{4A_{\text{pasador}}/\pi} = 8.54 \text{ mm}$$



continúa

Se necesita un pasador con al menos este diámetro para soportar el peso del anuncio sin sobrepasar el esfuerzo cortante permisible.

Notas: en este ejemplo, omitimos intencionalmente en los cálculos el peso de la armadura. Sin embargo, una vez que se conozcan los tamaños de los elementos, se pueden calcular sus pesos e incluirlos en los diagramas de cuerpo libre de la figura 1.34.

Cuando se incluyen los pesos de las barras, el diseño del elemento AB se complica, debido a que ya no es una barra en tensión simple. En cambio, es una viga sometida tanto a flexión como a tensión. Existe una situación análoga para el elemento BC . No sólo debido a su propio peso, sino también al peso del anuncio, el elemento BC está sometido tanto a flexión como a compresión. El diseño de esos elementos debe esperar hasta que estudiemos los esfuerzos en vigas (capítulo 5).

En la práctica se tienen que considerar otras cargas además de los pesos de la armadura y del anuncio antes de tomar una decisión final sobre los tamaños de las barras y de los pasadores. Las cargas que podrían ser importantes incluyen cargas por viento, cargas por sismo y los pesos de los objetos que tendrían que soportar de manera temporal la armadura y el anuncio.

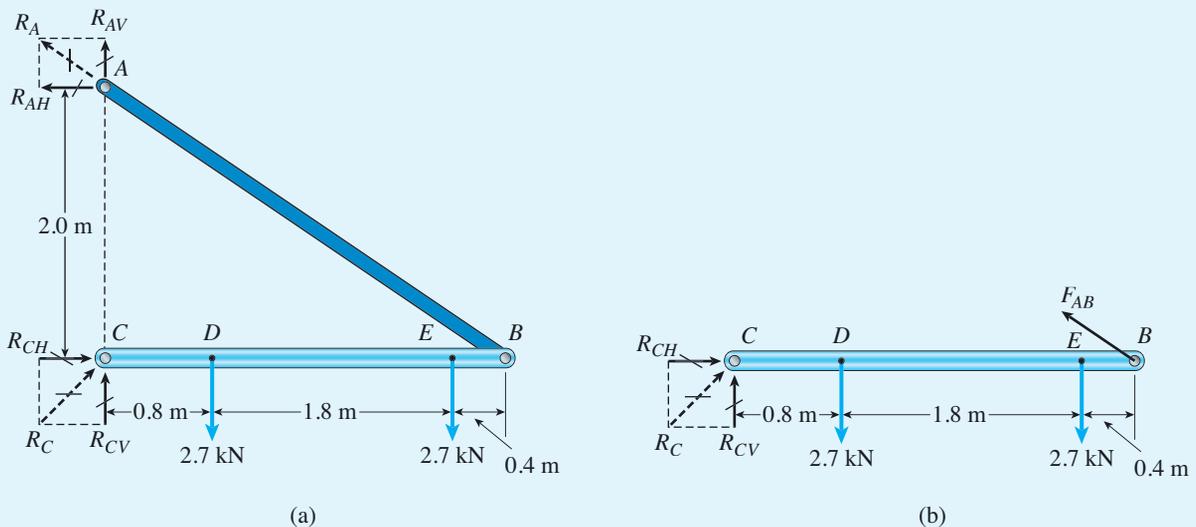


FIGURA 1.34 (Repetida.)

2.6 ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS

En nuestro análisis anterior de tensión y compresión en elementos cargados axialmente, los únicos esfuerzos que consideramos fueron los normales que actúan sobre las secciones transversales. Éstos se representan en la figura 2.30, donde consideramos una barra AB sometida a cargas axiales P .

Cuando la barra se corta en una sección transversal intermedia por un plano mn (perpendicular al eje x), obtenemos el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.30b. Los esfuerzos normales que actúan sobre la sección cortada se deben calcular con la fórmula $\sigma_x = P/A$ siempre que la distribución del esfuerzo sea uniforme sobre el área de la sección transversal A . Como ya se explicó en el capítulo 1, esta condición existe si la barra es prismática, el material es homogéneo y la fuerza axial P actúa en el centroide del área de la sección transversal, y la sección transversal está alejada de cualquier concentración localizada de esfuerzos. Por supuesto, no hay esfuerzos cortantes actuando sobre la sección cortada, debido a que ésta es perpendicular al eje longitudinal de la barra.

Por conveniencia se suelen mostrar los esfuerzos en una vista bidimensional de la barra (figura 2.30c) en vez de la vista tridimensional más compleja (figura 2.30b). Sin embargo, al trabajar con figuras bidimensionales no debemos olvidar que la barra tiene un espesor perpendicular al plano de

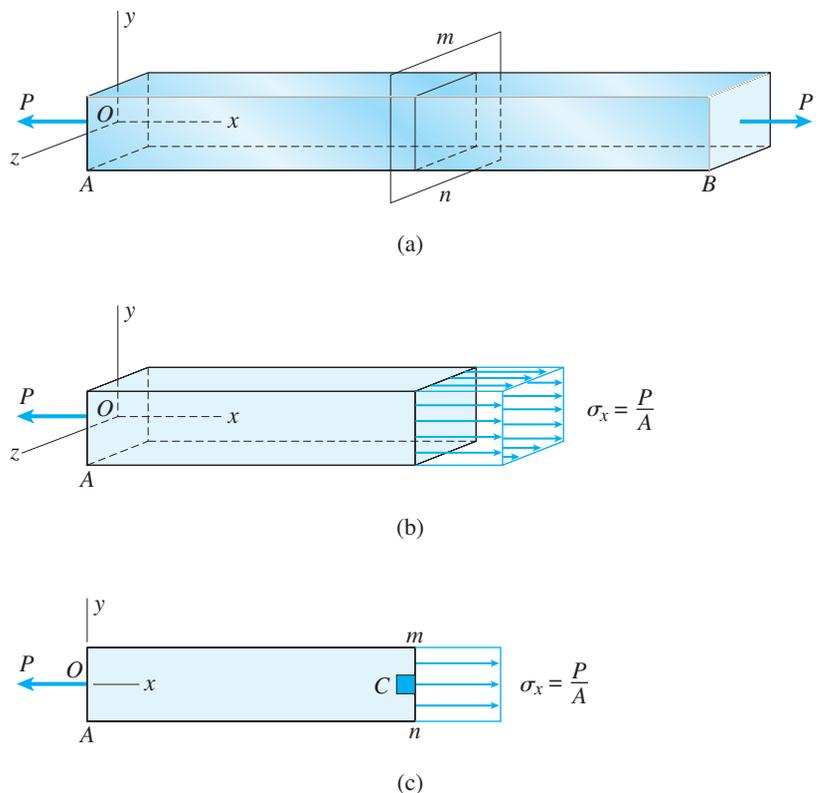


FIGURA 2.20 Barra prismática en tensión mostrando los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal mn : (a) barra con fuerzas axiales P , (b) vista tridimensional mostrando los esfuerzos normales y (c) vista bidimensional.

la figura. Esta tercera dimensión debe considerarse en las deducciones y en los cálculos.

Elementos de esfuerzo

La forma más útil de representar los esfuerzos en la barra de la figura 2.30 es aislar un elemento pequeño de material, como el que se identifica con C en la figura 2.30c y luego mostrar los esfuerzos que actúan sobre todas sus caras. Un elemento de este tipo se denomina **elemento de esfuerzo**. El elemento de esfuerzo en el punto C es un bloque rectangular pequeño (no importa si es un cubo o un paralelepípedo rectangular) con su cara derecha coincidiendo con la sección mn .

Las dimensiones de un elemento de esfuerzo se suponen infinitesimalmente pequeñas, pero por claridad lo dibujamos a una escala grande, como en la figura 2.31a. En este caso, los bordes del elemento son paralelos a los ejes x , y y z , y los únicos esfuerzos son los normales σ_x que actúan sobre las caras x (recuerde que las caras x tienen sus normales paralelas al eje x). Como es más conveniente, con frecuencia dibujaremos una vista bidimensional del elemento (figura 2.31b) en lugar de una vista tridimensional.

Esfuerzos sobre secciones inclinadas

El elemento de esfuerzo de la figura 2.31 sólo muestra una vista limitada de los esfuerzos en una barra cargada axialmente. Para obtener una representación más completa, necesitamos investigar los esfuerzos que actúan sobre **secciones inclinadas**, como la sección cortada por el plano inclinado pq en la figura 2.32a. Puesto que los esfuerzos son los mismos en toda la barra, los que actúan sobre la sección inclinada deben estar distribuidos uniformemente, como se representa en los diagramas de cuerpo libre de la figura 2.32b (vista tridimensional) y en la figura 2.32c (vista bidimensional). A partir del equilibrio del cuerpo libre sabemos que la resultante de los esfuerzos debe ser una fuerza horizontal P . (La resultante se traza con una línea discontinua en las figuras 2.32b y 2.32c.)

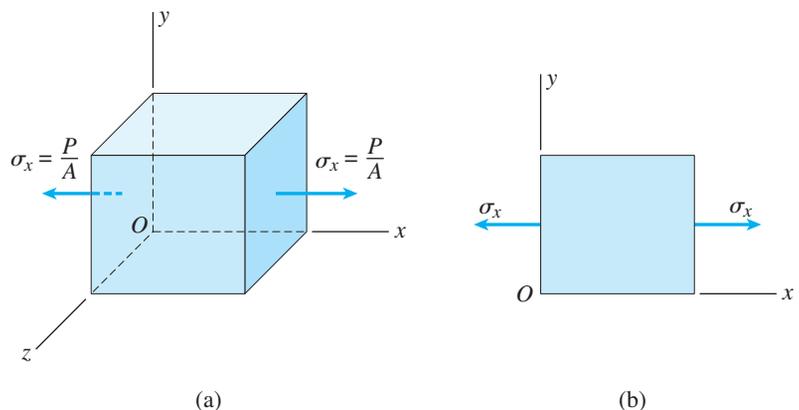


FIGURA 2.31 Elemento de esfuerzo en el punto C de la barra cargada axialmente mostrada en la figura 2.30c: (a) vista tridimensional del elemento y (b) vista bidimensional del elemento.

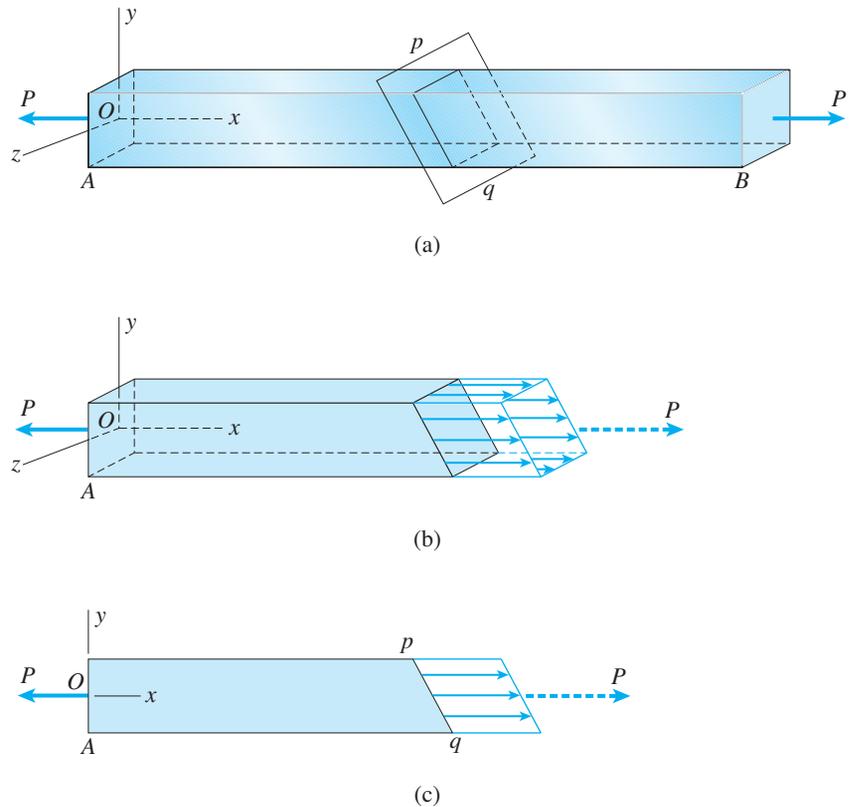


FIGURA 2.32 Barra prismática en tensión mostrando los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada pq : (a) barra con fuerzas axiales P , (b) vista tridimensional de la barra cortada mostrando los esfuerzos y (c) vista bidimensional.

Como punto preliminar, necesitamos un esquema para especificar la **orientación** de la sección inclinada pq . Un método estándar es especificar el ángulo θ entre el eje x y la normal n a la sección (consulte la figura 2.33a). De esta manera, el ángulo θ para la sección inclinada mostrada en la figura es aproximadamente 30° . En contraste, la sección transversal mn (figura 2.30a) tiene un ángulo θ igual a cero (debido a que la normal a la sección es el eje x). Como ejemplos adicionales, considere, el elemento de esfuerzo de la figura 2.31. El ángulo θ para la cara derecha es 0 , para la cara superior es 90° (una sección longitudinal de la barra), para la cara izquierda es 180° y para la cara inferior es 270° (o -90°).

Ahora regresemos a la tarea de determinar los esfuerzos que actúan sobre la sección pq (figura 2.33b). Como ya se mencionó, la resultante de estos esfuerzos es una fuerza P en la dirección x . Esta resultante se puede separar en dos componentes, una fuerza N que es perpendicular al plano inclinado pq y una fuerza cortante V que es tangencial a ella. Estas componentes de la fuerza son

$$N = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta \quad (2.26a,b)$$

Asociados con las fuerzas N y V se tienen esfuerzos normales y cortantes que están distribuidos uniformemente sobre la sección inclinada (figuras

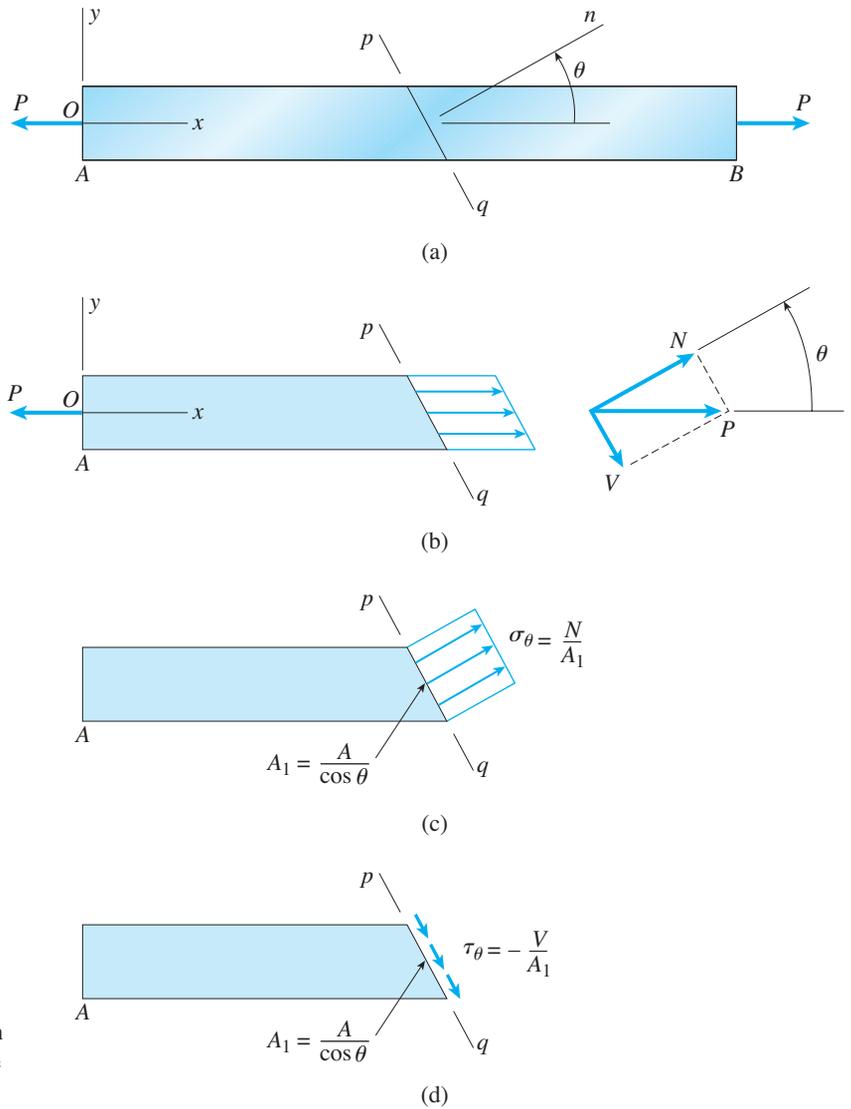


FIGURA 2.33 Barra prismática en tensión mostrando los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada pq .

2.33 c y d). El esfuerzo normal es igual al fuerza normal N dividida entre el área de la sección y el esfuerzo cortante es igual a la fuerza cortante V dividida entre el área de la sección. Por tanto, los esfuerzos son

$$\sigma = \frac{N}{A_1} \quad \tau = \frac{V}{A_1} \tag{2.27a,b}$$

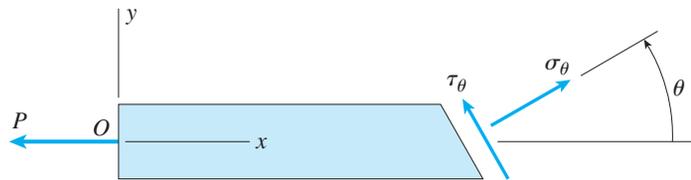
en donde A_1 es el área de la sección inclinada:

$$A_1 = \frac{A}{\cos \theta} \tag{2.28}$$

Como es usual, A representa el área de la sección transversal de la barra. Los esfuerzos σ y τ actúan en las direcciones que se muestran en la figura 2.33c y d, es decir, en las mismas direcciones que la fuerza normal N y que la fuerza cortante V , respectivamente.

En este punto necesitamos establecer una **notación y convención de signos** estandarizadas para los esfuerzos que actúan sobre las secciones inclinadas. Utilizaremos un subíndice θ para indicar que el esfuerzo actúa sobre una sección inclinada un ángulo θ (figura 2.34), de igual forma empleamos un subíndice x para indicar que los esfuerzos actúan sobre una sección perpendicular al eje x (consulte la figura 2.30). Los esfuerzos normales σ_θ son positivos en tensión y los esfuerzos cortantes τ_θ son positivos cuando tienden a producir una rotación del material en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2.34.

FIGURA 2.34 Convención de signos para esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada. (Los esfuerzos normales son positivos en tensión y los esfuerzos cortantes son positivos cuando tienden a producir rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj).



Para una barra en tensión, la fuerza normal N produce esfuerzos normales positivos σ_θ (consulte la figura 2.33c) y la fuerza cortante produce esfuerzos cortantes negativos τ_θ (consulte la figura 2.33d). Estos esfuerzos están dados por las siguientes ecuaciones (consulte las ecuaciones 2.26, 2.27 y 2.28):

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta \quad \tau_\theta = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta$$

Introduciendo la notación $\sigma_x = P/A$, en donde σ_x es el esfuerzo normal sobre una sección trasversal y también empleando las relaciones trigonométricas

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}(\sin 2\theta)$$

obtenemos las expresiones siguientes para los **esfuerzos normal y cortante**:

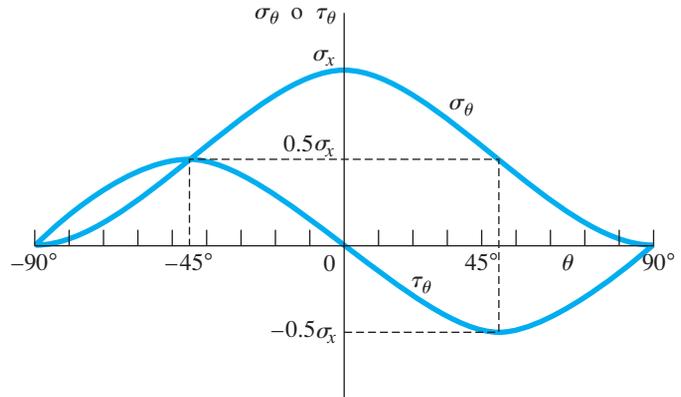
$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (2.29a)$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_x}{2} (\sin 2\theta) \quad (2.29b)$$

Estas ecuaciones dan los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada orientada en un ángulo θ con respecto al eje x (figura 2.34).

Es importante reconocer que las ecuaciones (2.29a) y (2.29b) sólo fueron deducidas a partir de la estática y, por tanto, son independientes del material. Entonces, estas ecuaciones son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte lineal o no linealmente, elástica o inelásticamente.

FIGURA 2.35 Gráfica del esfuerzo normal σ_θ y del esfuerzo cortante τ_θ en función del ángulo θ de la sección inclinada (consulte la figura 2.34 y las ecuaciones 2.29a y b).



Esfuerzos normales y cortantes máximos

La forma en que varían los esfuerzos conforme la sección inclinada se corta en varios ángulos se muestra en la figura 2.35. El eje horizontal da el ángulo θ conforme varía de -90° a $+90^\circ$, el eje vertical indica los esfuerzos σ_θ y τ_θ . Observe que un ángulo positivo θ se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x (figura 2.34) y uno negativo se mide en sentido de las manecillas del reloj.

Como se muestra en la gráfica, el esfuerzo normal σ_θ es igual a σ_x cuando $\theta = 0$. Entonces, a medida que θ aumenta o disminuye, el esfuerzo normal disminuye hasta que en $\theta = \pm 90^\circ$ se hace cero, debido a que no hay esfuerzos normales sobre las secciones cortadas paralelas al eje longitudinal. El **esfuerzo normal máximo** se presenta en $\theta = 0$ y es

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_x \quad (2.30)$$

Además, observamos que cuando $\theta = \pm 45^\circ$, el esfuerzo normal es la mitad del valor máximo.

El esfuerzo cortante τ_θ es cero sobre las secciones transversales de la barra ($\theta = 0$) así como sobre las secciones longitudinales ($\theta = \pm 90^\circ$). Entre estos extremos, el esfuerzo varía como se muestra en la gráfica, alcanzando el valor positivo máximo cuando $\theta = -45^\circ$ y el valor negativo máximo cuando $\theta = +45^\circ$. Estos **esfuerzos cortantes máximos** tienen la misma magnitud:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (2.31)$$

pero tienden a girar al elemento en direcciones opuestas.

Los esfuerzos máximos en una **barra en tensión** se muestran en la figura 2.36. Hemos seleccionado dos elementos de esfuerzo, el elemento *A* está orientado en $\theta = 0^\circ$ y el elemento *B* está orientado en $\theta = 45^\circ$. El elemento *A* tiene los esfuerzos normales máximos (ecuación 2.30) y el elemento *B* tiene los esfuerzos cortantes máximos (ecuación 2.31). En el caso del elemento *A* (figura 2.36b), los únicos esfuerzos son los normales máximos (no existen esfuerzos cortantes sobre ninguna de las caras).

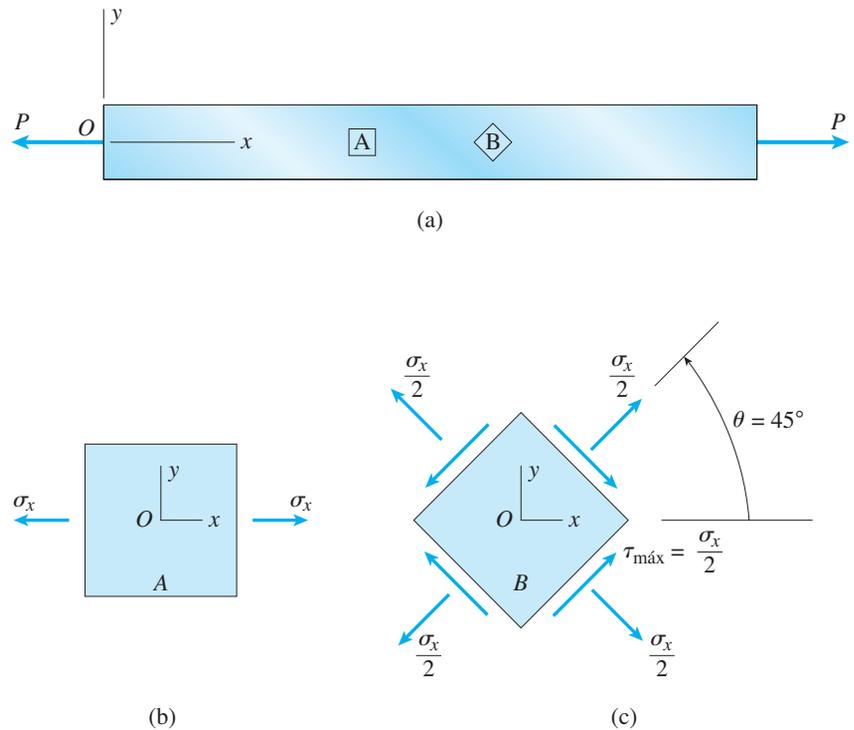


FIGURA 2.36 Esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre elementos de esfuerzo orientados en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$ para una barra en tensión.

En el caso del elemento B (figura 2.36c), actúan esfuerzos normales y cortantes sobre todas las caras (excepto, por supuesto, en las caras anterior y posterior del elemento). Considere, por ejemplo, la cara a 45° (la superior derecha). Sobre ella, los esfuerzos normales y cortantes (de las ecuaciones 2.29a y b) son $\sigma_x/2$ y $-\sigma_x/2$, respectivamente. De aquí, el esfuerzo normal está en tensión (positivo) y el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj (negativo) contra el elemento. Los esfuerzos sobre las caras restantes se obtienen de una manera similar sustituyendo $\theta = 135^\circ$, -45° y -135° en las ecuaciones (2.29a y b).

Entonces, en este caso especial de un elemento orientado en $\theta = 45^\circ$, los esfuerzos normales sobre las cuatro caras son los mismos (iguales a $\sigma_x/2$) y los cuatro esfuerzos cortantes tienen la misma magnitud (igual a $\sigma_x/2$). Asimismo, observe que los esfuerzos cortantes que actúan sobre planos perpendiculares son iguales en magnitud y tienen direcciones ya sea hacia arriba o bien alejadas de la línea de intersección de los planos, como se analizó con detalle en la sección 1.6.

Si una barra se carga en compresión en lugar de en tensión, el esfuerzo σ_x será de compresión y tendrá un valor negativo. En consecuencia, todos los esfuerzos que actúan sobre elementos de esfuerzo tendrán direcciones opuestas a las de una barra en tensión. Por supuesto, las ecuaciones (2.29a y b) aún se pueden usar para los cálculos simplemente sustituyendo σ_x como una cantidad negativa.

No obstante que el esfuerzo cortante máximo en una barra cargada axialmente sólo es la mitad del esfuerzo normal máximo, el esfuerzo cortante puede ocasionar la falla si el material es mucho más débil en cortante



FIGURA 2.37 Falla por cortante a lo largo de un plano a 45° de un bloque de madera sometido a compresión.

que en tensión. Un ejemplo de una falla por cortante se representa en la figura 2.37, donde se muestra un bloque de madera que se sometió a compresión y falló por cortante a lo largo de un plano a 45° .

Un comportamiento similar se tiene en el acero dulce sometido a tensión. Durante un ensayo a tensión de una barra plana de acero al bajo carbono con superficies pulidas, aparecen *bandas de deslizamiento* visibles en los lados de la barra a aproximadamente 45° respecto de su eje (figura 2.38). Estas bandas indican que el material está fallando en cortante a lo largo de planos sobre los cuales el esfuerzo cortante es máximo. Las bandas fueron observadas por primera vez por G. Piobert en 1842 y W. Lüders en 1860 (consulte las referencias 2.5 y 2.6) y en la actualidad se llaman *bandas de Lüders* o *bandas de Piobert*. Comienzan a aparecer cuando el esfuerzo de fluencia se alcanza en la barra (punto *B* en la figura 1.10 de la sección 1.3).

Esfuerzo uniaxial

El estado de esfuerzo que se describe en toda esta sección se llama **esfuerzo uniaxial**, por la obvia razón de que la barra se somete a tensión o compresión simple sólo en una dirección. Las orientaciones más importantes de los elementos de esfuerzo para esfuerzo uniaxial son $\theta = 0$ y $\theta = 45^\circ$ (figuras 2.36b y c); la primera tiene un esfuerzo normal máximo y la segunda tiene un esfuerzo cortante máximo. Si las secciones se cortan a través de la barra en otros ángulos, los esfuerzos que actúan sobre las cargas de los elementos de esfuerzo correspondientes se pueden determinar a partir de las ecuaciones (2.29a y b), como se ilustra en los ejemplos 2.10 y 2.11 siguientes.

El esfuerzo uniaxial es un caso especial de un estado de esfuerzo más general conocido como *esfuerzo plano*, que se describe con detalle en el capítulo 7.



FIGURA 2.38 Bandas de deslizamiento (o bandas de Lüders) en una probeta de acero pulido sometida a tensión.

Ejemplo 2.10

Una barra prismática con área de su sección transversal $A = 1200 \text{ mm}^2$ se comprime mediante una carga axial $P = 90 \text{ kN}$ (figura 2.39a).

(a) Determine los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada pq cortada a través de la barra en un ángulo $\theta = 25^\circ$.

(b) Determine el estado de esfuerzo completo para $\theta = 25^\circ$ y muestre los esfuerzos sobre un elemento de esfuerzo con la orientación adecuada.

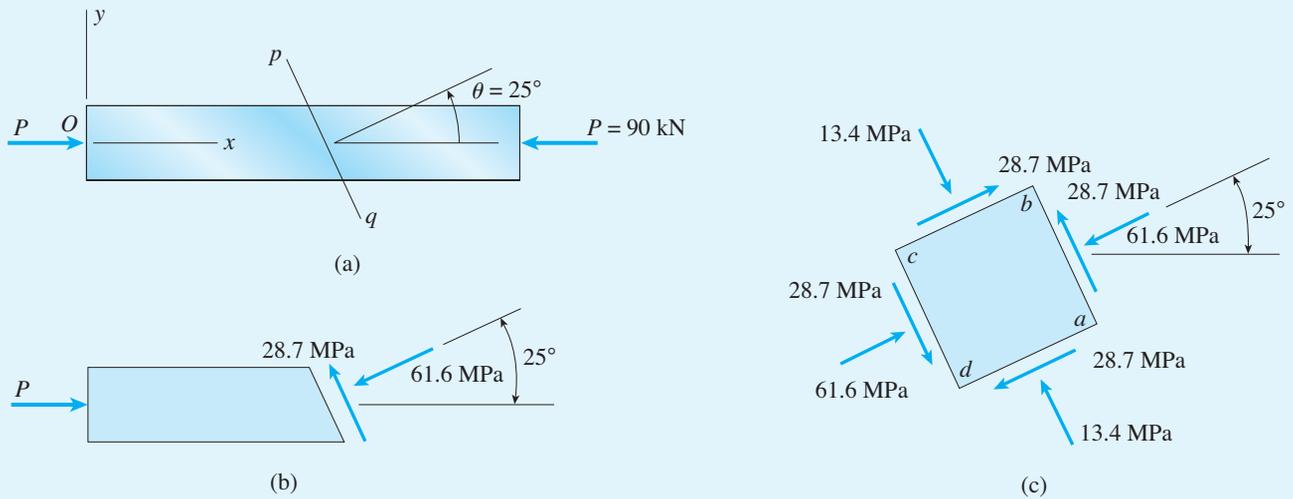


FIGURA 2.39 Ejemplo 2.10. Esfuerzos sobre una sección inclinada.

Solución

(a) *Esfuerzos sobre la sección inclinada.* Para determinar los esfuerzos que actúan sobre una sección con $\theta = 25^\circ$, primero calculamos el esfuerzo normal σ_x que actúa sobre una sección transversal:

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} = -\frac{90 \text{ kN}}{1200 \text{ mm}^2} = -75 \text{ MPa}$$

donde el signo menos indica que el esfuerzo es de compresión. Enseguida, calculamos los esfuerzos normal y cortante con las ecuaciones (2.29a y b) con $\theta = 25^\circ$, como sigue:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = (-75 \text{ MPa})(\cos 25^\circ)^2 = -61.6 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = (75 \text{ MPa})(\sin 25^\circ)(\cos 25^\circ) = 28.7 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

En la figura 2.39b se muestran estos esfuerzos que actúan sobre la sección inclinada. Observe que el esfuerzo normal σ_θ es negativo (de compresión) y el esfuerzo cortante τ_θ es positivo (sentido contrario al de las manecillas del reloj).

(b) *Estado de esfuerzo completo.* Para determinar el estado de esfuerzo completo necesitamos calcular los esfuerzos que actúan sobre todas las caras de un elemento de esfuerzo orientado a 25° (figura 2.39c). La cara ab , para la cual $\theta = 25^\circ$, tiene la misma orientación que el plano inclinado que se muestra en la figura 2.39b. Por tanto, los esfuerzos son los mismos que los dados con anterioridad.

Los esfuerzos sobre la cara opuesta cd son los mismos que sobre la cara ab , lo que se puede verificar sustituyendo $\theta = 25^\circ + 180^\circ = 205^\circ$ en las ecuaciones (2.29a y b).

Para la cara ad sustituimos $\theta = 25^\circ - 90^\circ = -65^\circ$ en las ecuaciones (2.29a y b) y obtenemos

$$\sigma_\theta = -13.4 \text{ MPa} \quad \tau_\theta = -28.7 \text{ MPa}$$

Estos mismos esfuerzos se aplican a la cara opuesta bc , como se puede verificar sustituyendo $\theta = 25^\circ + 90^\circ = 115^\circ$ en las ecuaciones (2.29a y b). Observe que el esfuerzo normal es de compresión y que el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj.

El estado de esfuerzo completo se muestra por el elemento de esfuerzo de la figura 2.39c. Un bosquejo de este tipo es una forma excelente para mostrar las direcciones de los esfuerzos y las orientaciones de los planos sobre los que actúan.

Ejemplo 2.11

Una barra en compresión con sección transversal cuadrada de ancho b debe soportar una carga $P = 8000$ lb (figura 2.40a). La barra está hecha con dos piezas de material que están conectadas mediante una junta pegada (conocida como *junta biselada*) a lo largo del plano pq , que está a un ángulo $\alpha = 40^\circ$ con respecto a la vertical. El material es un plástico estructural con esfuerzos permisibles en compresión y cortante de 1100 y 600 psi, respectivamente. Además, los esfuerzos permisibles en la junta pegada son 750 psi en compresión y 500 psi en cortante.

Determine el ancho mínimo b de la barra.

Solución

Por conveniencia giremos la barra hasta una posición horizontal (figura 2.40b) que iguale a las figuras empleadas al deducir las ecuaciones para los esfuerzos sobre una sección inclinada (consulte las figuras 2.33 y 2.34). Con la barra en esta posición observamos que la normal n respecto al plano de la junta pegada (plano pq) forma un ángulo $\beta = 90^\circ - \alpha$, o 50° , con el eje de la barra. Como el ángulo θ se define como positivo cuando es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (figura 2.34), concluimos que $\theta = -50^\circ$ para la junta pegada.

El área de la sección transversal de la barra se relaciona con la carga P y el esfuerzo σ_x que actúa sobre las secciones transversales mediante la ecuación

$$A = \frac{P}{\sigma_x} \quad (a)$$

Por tanto, para encontrar el área necesaria, debemos determinar el valor de σ_x que corresponde a cada uno de los cuatro esfuerzos permisibles. Luego, el valor menor de σ_x determinará el área necesaria. Los valores de σ_x se obtienen reacomodando las ecuaciones (2.29a y b) como sigue:

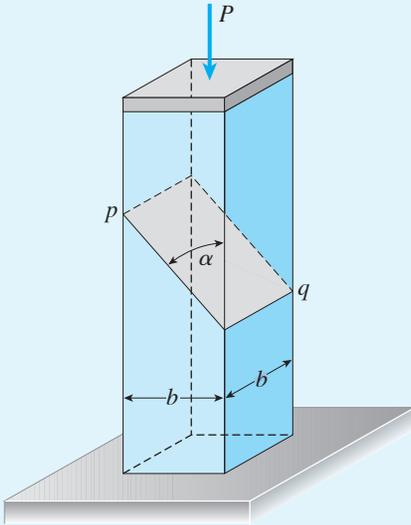
$$\sigma_x = \frac{\sigma_\theta}{\cos^2 \theta} \quad \sigma_x = -\frac{\tau_\theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad (2.32a,b)$$

Ahora aplicamos estas ecuaciones a la junta pegada y al plástico.

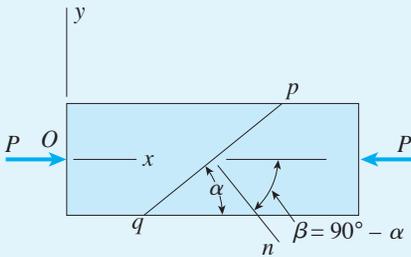
(a) *Valores de σ_x con base en los esfuerzos permisibles en la junta pegada.* Para compresión en la junta pegada tenemos $\sigma_\theta = -750$ psi y $\theta = -50^\circ$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.32a), obtenemos

$$\sigma_x = \frac{-750 \text{ psi}}{(\cos -50^\circ)^2} = -1815 \text{ psi} \quad (b)$$

Para el cortante en la junta pegada tenemos un esfuerzo permisible de 500 psi. Sin embargo, no es inmediatamente evidente si τ_θ es +500 psi o -500 psi. Un enfo-



(a)



$\alpha = 40^\circ$
 $\beta = 50^\circ$
 $\theta = -\beta = -50^\circ$

(b)

FIGURA 2-40 Ejemplo 2.11. Esfuerzos sobre una sección inclinada.

que es sustituir los dos valores $+500$ psi y -500 psi en la ecuación (2.32b) y después seleccionar el valor de σ_x que sea negativo. El otro valor de σ_x será positivo (tensión) y no se aplica a esta barra. Otro enfoque es inspeccionar la propia barra (figura 2.40b) y observar a partir de las direcciones de las cargas que el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj contra el plano pq , lo que significa que el esfuerzo cortante es negativo. Por lo tanto, sustituimos $\tau_\theta = -500$ psi y $\theta = -50^\circ$ en la ecuación (2.32b) y obtenemos

$$\sigma_x = - \frac{-500 \text{ psi}}{(\text{sen } -50^\circ)(\text{cos } -50^\circ)} = -1015 \text{ psi} \quad (c)$$

(b) *Valores de σ_x con base en los esfuerzos permisibles en el plástico.* El esfuerzo de compresión máximo en el plástico se tiene sobre una sección transversal. Por tanto, como el esfuerzo permisible en compresión es 1100 psi, de inmediato sabemos que

$$\sigma_x = -1100 \text{ psi} \quad (d)$$

El esfuerzo cortante máximo ocurre sobre un plano a 45° y numéricamente es igual a $\sigma_x/2$ (consulte la ecuación 2.31). Puesto que el esfuerzo permisible en cortante es 600 psi, obtenemos

$$\sigma_x = -1200 \text{ psi} \quad (e)$$

El mismo resultado se puede obtener con la ecuación (2.32b) sustituyendo $\tau_\theta = 600$ psi y $\theta = 45^\circ$.

(c) *Ancho mínimo de la barra.* Al comparar los cuatro valores de σ_x (ecuaciones b, c, d y e), observamos que el menor es $\sigma_x = -1015$ psi. Por tanto, este valor gobierna el diseño. Sustituyendo en la ecuación (a) y empleando sólo valores numéricos obtenemos el área necesaria:

$$A = \frac{8000 \text{ lb}}{1015 \text{ psi}} = 7.88 \text{ in}^2$$

Como la barra tiene una sección transversal cuadrada ($A = b^2$), el ancho mínimo es

$$b_{\text{mín}} = \sqrt{A} = \sqrt{7.88 \text{ in}^2} = 2.81 \text{ in}$$



Cualquier ancho mayor que $b_{\text{mín}}$ garantizará que no se rebasen los esfuerzos permisibles.

★ 2.8 CARGA DE IMPACTO

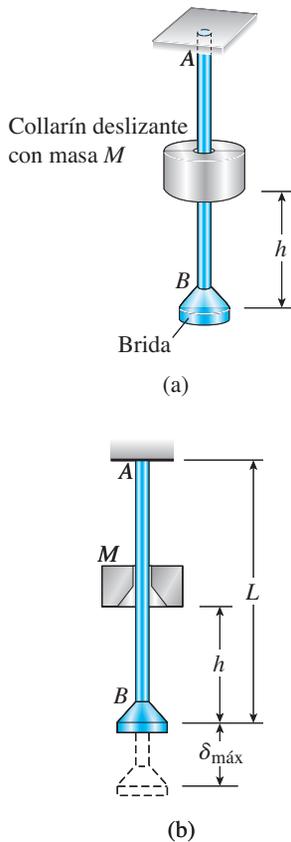


FIGURA 2.53 Carga de impacto sobre una barra prismática AB debida a un objeto en caída con masa M .

Las cargas se pueden clasificar como estáticas o dinámicas, dependiendo de si permanecen constantes o varían con el tiempo. Una **carga estática** se aplica lentamente para que no cause efectos vibratorios o dinámicos en la estructura. La carga aumenta gradualmente de cero a su valor máximo y después permanece constante.

Una **carga dinámica** puede adoptar muchas formas, algunas cargas se aplican y se remueven repentinamente (*cargas de impacto*), otras persisten durante periodos largos y varían continuamente de intensidad (*cargas fluctuantes*). Las cargas de impacto se producen cuando dos objetos colisionan o cuando un objeto en caída golpea una estructura. Las cargas fluctuantes se producen por maquinaria rotatoria, tránsito, rachas de viento, olas de agua, sismos y procesos de manufactura.

Como un ejemplo de cómo responden las estructuras a las cargas dinámicas, analizaremos el impacto de un objeto que cae hacia el extremo inferior de una barra prismática (figura 2.53). Un collarín con masa M , inicialmente en reposo, cae desde una altura h hacia una brida en el extremo de la barra AB . Cuando el collarín golpea la brida, la barra comienza a alargarse, creando esfuerzos axiales dentro de la barra. En un intervalo de tiempo muy breve, del orden de algunos milisegundos, la brida se moverá hacia abajo y alcanzará su posición de desplazamiento máximo. Después, la barra se acorta, luego se alarga, se acorta de nuevo conforme la barra vibra longitudinalmente y el extremo de la barra se mueve hacia arriba y abajo. Las vibraciones son análogas a las que suceden cuando un resorte se estira y luego se libera, o cuando una persona salta con una cuerda elástica sujeta a su tobillo. Las vibraciones de la barra se extinguen pronto debido a varios efectos de amortiguamiento y luego la barra llega al reposo con la masa M soportada por la brida.

Es obvio que la respuesta de la barra al collarín descendente es muy complicada y un análisis completo y exacto requiere el uso de técnicas matemáticas avanzadas. Sin embargo, podemos hacer un análisis aproximado empleando el concepto de energía de deformación (sección 2.7) y formulando varias suposiciones simplificadas

Iniciemos considerando la energía del sistema justo antes de que se libere el collarín (figura 2.53a). La energía potencial del collarín con respecto a la elevación de la brida es Mgh , donde g es la aceleración de la gravedad.* Esta energía potencial se convierte en energía cinética conforme cae el collarín. En el instante que el collarín golpea la brida, su energía potencial con respecto a la elevación de la brida es cero y su energía cinética es $Mv^2/2$, donde $v = \sqrt{2gh}$ es su velocidad.**

*En unidades SI, la aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, en unidades inglesas, $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$. Para valores más precisos de g , o para un análisis de masa y peso, consulte el apéndice A.

**En trabajos de ingeniería es usual que la velocidad se tome como una cantidad vectorial. Sin embargo, como la energía cinética es un escalar, emplearemos la palabra “velocidad” para denominar la *magnitud* de la velocidad o su *rapidez*.

Durante el impacto resultante, la energía cinética del collarín se convierte en otras formas de energía. Parte de la energía cinética se transforma en la energía de deformación de la barra estirada. Algo de la energía se disipa produciendo calor y causando deformaciones plásticas localizadas del collarín y de la brida. Una pequeña parte permanece como la energía cinética del collarín, que o se mueve hacia abajo aún más (mientras está en contacto con la brida) o bien rebota hacia arriba.

Para hacer un análisis simplificado de esta situación tan compleja, idealizaremos el comportamiento haciendo las siguientes suposiciones. (1) Supondremos que el collarín y la brida están contruidos de tal manera que el collarín “se pega” a la brida y se mueve hacia abajo con ella (es decir, el collarín no rebota). Este comportamiento es más probable que se dé cuando la masa del collarín es grande comparada con la masa de la barra. (2) No tendremos en cuenta todas las pérdidas de energía y supondremos que la energía cinética de la masa en caída se transforma completamente en energía de deformación de la barra. Esta suposición predice esfuerzos mayores en la barra que los que se anticiparían si se tomaran en cuenta pérdidas de energía. (3) No tomaremos en cuenta cualquier cambio en la energía potencial de la barra (debido al movimiento vertical de sus elementos) ni tomaremos en cuenta la existencia de energía de deformación en la barra debida a su propio peso. Estos dos efectos son extremadamente pequeños. (4) Supondremos que los esfuerzos en la barra permanecen dentro del intervalo linealmente elástico. (5) Supondremos que la distribución de esfuerzos en toda la barra es la misma que cuando está cargada estáticamente por una fuerza en su extremo inferior, es decir, supondremos que los esfuerzos son uniformes en todo el volumen de la barra. (En realidad las ondas del esfuerzo longitudinal viajarán por la barra y debido a esto causaría variaciones en la distribución del esfuerzo).

Con base en las suposiciones anteriores, podremos calcular el alargamiento máximo de la barra y los esfuerzos de tensión máximos producidos por la carga de impacto. (Recuerde que no tomamos en cuenta el peso de la barra y sólo hemos determinado los esfuerzos debidos al collarín que cae).

Alargamiento máximo de la barra

El alargamiento máximo de la barra $\delta_{\text{máx}}$ (figura 2.53b) se puede obtener a partir del principio de *conservación de la energía* igualando la energía potencial perdida por la masa en caída con la energía de deformación máxima adquirida por la barra. La energía potencial perdida es $W(h + \delta_{\text{máx}})$, donde $W = Mg$ es el peso del collarín y $h + \delta_{\text{máx}}$ es la distancia que se desplaza. La energía de deformación de la barra es $EA \delta_{\text{máx}}^2 / 2L$, donde EA es la rigidez axial y L es la longitud de la barra (consulte la figura 2.37b). Con estos datos obtenemos la siguiente ecuación:

$$W(h + \delta_{\text{máx}}) = \frac{EA \delta_{\text{máx}}^2}{2L} \quad (2.49)$$

Esta ecuación es cuadrática en $\delta_{\text{máx}}$ y se puede despejar la raíz positiva; el resultado es

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{WL}{EA} + \left[\left(\frac{WL}{EA} \right)^2 + 2h \left(\frac{WL}{EA} \right) \right]^{1/2} \quad (2.50)$$

Observe que el alargamiento máximo de la barra aumenta si el peso del collarín o bien la altura de la caída aumentan. El alargamiento disminuye si la rigidez EA/L aumenta.

La ecuación anterior se puede escribir en una forma más simple introduciendo la notación

$$\delta_{\text{est}} = \frac{WL}{EA} = \frac{MgL}{EA} \quad (2.51)$$

en donde δ_{est} es el alargamiento de la barra debida al peso del collarín en condiciones de carga estática. Entonces, la ecuación (2-50) se transforma en

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_{\text{est}} + (\delta_{\text{est}}^2 + 2h\delta_{\text{est}})^{1/2} \quad (2.52)$$

o bien

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_{\text{est}} \left[1 + \left(1 + \frac{2h}{\delta_{\text{est}}} \right)^{1/2} \right] \quad (2.53)$$

En esta ecuación observamos que el alargamiento de la barra ante la carga de impacto es mucho mayor que si aplicara la misma carga de manera estática. Suponga, por ejemplo, que el peso h es 40 multiplicado por el desplazamiento estático δ_{est} ; entonces el alargamiento máximo sería 10 multiplicado por el alargamiento estático.

Cuando la altura h es grande comparada con el alargamiento estático, podemos ignorar los “unos” en el lado derecho de la ecuación (2.53) y obtenemos

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{2h\delta_{\text{est}}} = \sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} \quad (2.54)$$

en donde $M = W/g$ y $v = \sqrt{2gh}$ es la velocidad de la masa en caída cuando golpea la brida. Esta ecuación también se puede obtener directamente de la ecuación (2.49) omitiendo $\delta_{\text{máx}}$ en el lado izquierdo de la ecuación y luego despejando $\delta_{\text{máx}}$. Debido a los términos que se omitieron, los valores de $\delta_{\text{máx}}$ calculados con la ecuación (2.54) siempre son menores que los que se obtienen con la ecuación (2.53).

Esfuerzo máximo en la barra

El esfuerzo máximo se puede calcular fácilmente a partir del alargamiento máximo debido a que suponemos que la distribución de esfuerzos es uniforme en toda la longitud de la barra. De la ecuación general $\delta = PL/EA = \sigma L/E$, sabemos que

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E\delta_{\text{máx}}}{L} \quad (2.55)$$

Sustituyendo de la ecuación (2.50), obtenemos la siguiente ecuación para el esfuerzo de tensión máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{W}{A} + \left[\left(\frac{W}{A} \right)^2 + \frac{2WhE}{AL} \right]^{1/2} \quad (2.56)$$

Introduciendo la notación

$$\sigma_{\text{est}} = \frac{W}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{E\delta_{\text{est}}}{L} \quad (2.57)$$

en donde σ_{est} es el esfuerzo cuando la carga actúa estáticamente, podemos escribir la ecuación (2.56) en la siguiente forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{est}} + \left(\sigma_{\text{est}}^2 + \frac{2hE}{L} \sigma_{\text{est}} \right)^{1/2} \quad (2.58)$$

o bien

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{est}} \left[1 + \left(1 + \frac{2hE}{L\sigma_{\text{est}}} \right)^{1/2} \right] \quad (2.59)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (2.53) y de nuevo muestra que una carga de impacto produce efectos mucho mayores que cuando la misma carga se aplica estáticamente.

Considerando otra vez el caso en el que la altura h es grande en comparación con el alargamiento de la barra (compare con la ecuación 2.54), obtenemos

$$\sigma_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2hE\sigma_{\text{est}}}{L}} = \sqrt{\frac{Mv^2E}{AL}} \quad (2.60)$$

De este resultado observamos que un aumento en la energía cinética $Mv^2/2$ de la masa que cae aumenta el esfuerzo, en tanto que un aumento en el volumen AL de la barra reducirá el esfuerzo. Esta situación es muy diferente a la de tensión estática de la barra, donde el esfuerzo es independiente de la longitud L y del módulo de elasticidad E .

Las ecuaciones anteriores para el alargamiento máximo y el esfuerzo máximo se aplican sólo en el instante en que la brida de la barra está en su posición más baja. Después que se alcanza el alargamiento máximo en la barra, ésta vibrará axialmente hasta llegar al reposo en el alargamiento estático. De allí en adelante el alargamiento y el esfuerzo tienen valores dados por las ecuaciones (2.51) y (2.57).

Si bien las ecuaciones anteriores se dedujeron para el caso de una barra prismática, se pueden usar para cualquier estructura linealmente elástica sometida a una carga en caída, siempre que conozcamos la rigidez apropiada de la estructura. En particular, las ecuaciones se pueden utilizar para un resorte sustituyendo la rigidez k del resorte (consulte la sección 2.2) por la rigidez EA/L de la barra prismática.

Factor de impacto

La razón entre la respuesta dinámica de una estructura y la respuesta estática (para la misma carga) se conoce como **factor de impacto**. Por ejemplo,

el factor de impacto de la barra de la figura 2.53 es la razón entre alargamiento máximo y el alargamiento estático.

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{\delta_{\text{est}}} \quad (2.61)$$

Este factor representa la cantidad en la cual se amplifica el alargamiento estático debida a los efectos dinámicos del impacto.

Se pueden escribir ecuaciones análogas a la (2.61) para otros factores de impacto, como el factor de impacto para el esfuerzo en la barra (la razón $\sigma_{\text{máx}}$ entre σ_{est}). Cuando el collarín cae desde una altura considerable, el factor de impacto puede ser muy grande, de 100 o mayor.

Carga aplicada repentinamente

Un caso especial de impacto ocurre cuando la carga se aplica repentinamente sin velocidad inicial. Para explicar este tipo de carga considere otra vez la barra prismática que se muestra en la figura 2.53 y suponga que el collarín deslizante se baja despacio hasta que apenas toca la brida. Luego el collarín se libera repentinamente. Aunque en este caso no existe energía cinética al inicio de la extensión de la barra, el comportamiento es muy diferente del de la carga estática de la barra. En condiciones de carga estática, la carga se libera de forma gradual y siempre existe equilibrio entre la carga aplicada y la fuerza resistente de la barra.

Sin embargo, considere qué sucede cuando el collarín se libera repentinamente desde su punto de contacto con la brida. Inicialmente el alargamiento de la barra y el esfuerzo en la barra son cero, pero el collarín se mueve hacia abajo ante la acción de su propio peso. Durante este movimiento la barra se alarga y su fuerza resistente aumenta gradualmente. El movimiento continúa hasta que en algún instante la fuerza resistente es apenas igual a W , el peso del collarín. En este instante particular el alargamiento de la barra es δ_{est} . Sin embargo, ahora el collarín tiene cierta energía cinética que adquiere durante el desplazamiento hacia abajo δ_{est} . Por tanto, el collarín continúa moviéndose hacia abajo hasta que su velocidad se hace cero por la fuerza resistente en la barra. El alargamiento máximo para esta condición se obtiene con la ecuación (2.53) igualando h a cero; de donde obtenemos

$$\delta_{\text{máx}} = 2\delta_{\text{est}} \quad (2.62)$$

A partir de esta ecuación observamos que una carga aplicada repentinamente produce un alargamiento que es el doble del causado por la misma carga aplicada estáticamente. Por tanto, el factor de impacto es 2.

Después que se ha alcanzado el alargamiento máximo $2\delta_{est}$, el extremo de la barra se moverá hacia arriba y comienza una serie de vibraciones hacia arriba y hacia abajo que finalmente llegan al reposo en el alargamiento estático producido por el peso del collarín.*

Limitaciones

Los análisis anteriores se basaron en la suposición de que no ocurren pérdidas de energía durante el impacto. En la realidad siempre se tienen pérdidas de energía y la mayor parte de ellas se disipan en forma de calor y de deformación localizada de los materiales. Debido a estas pérdidas la energía cinética de un sistema inmediatamente después de un impacto es menor que antes del impacto. En consecuencia, se convierte menos energía en energía de deformación de la barra que la que se supuso con anterioridad. Como resultado, el desplazamiento real del extremo de la barra de la figura 2.53 es menor que el anticipado mediante nuestro análisis simplificado.

También supusimos que los esfuerzos en la barra permanecen dentro del límite de proporcionalidad. Si el esfuerzo máximo excede este límite, el análisis se hace más complicado debido a que el alargamiento de la barra ya no es proporcional a la fuerza axial. Otros factores que se deben considerar son los efectos de las ondas de esfuerzo, amortiguamiento e imperfecciones en las superficies de contacto. Por tanto, debemos recordar que todas las fórmulas en esta sección se basan en condiciones muy idealizadas y proporcionan sólo una aproximación burda de las condiciones verdaderas (por lo general al sobrestimar el alargamiento).

Los materiales que presentan ductilidad considerable más allá del límite de proporcionalidad ofrecen una resistencia mucho mayor a las cargas de impacto que los materiales frágiles. También se debe considerar que las barras con ranuras, agujeros y otras formas de concentraciones de esfuerzos (consulte las secciones 2.9 y 2.10) son muy débiles contra el impacto; una sacudida ligera puede producir la fractura, incluso cuando el material es dúctil ante cargas estáticas.

*La ecuación (2.62) fue obtenida por primera vez por el matemático y científico francés J. V. Poncelet (1788-1867); consulte la referencia 2.8.

Ejemplo 2.16

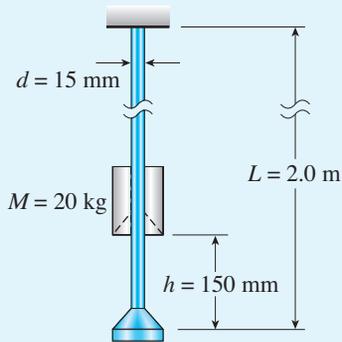


FIGURA 2.54 Ejemplo 2.16. Carga de impacto sobre una barra vertical.

Una barra prismática redonda de acero ($E = 210$ GPa), longitud $L = 2.0$ m y diámetro $d = 15$ mm cuelga verticalmente de un soporte en su extremo superior (figura 2.54). Un collarín deslizable con masa $M = 20$ kg cae desde una altura $h = 150$ mm sobre una brida en el extremo inferior de la barra sin rebotar.

(a) Calcule el alargamiento máximo de la barra debida al impacto y determine el factor de impacto correspondiente.

(b) Calcule el esfuerzo de tensión máximo en la barra y determine el factor de impacto correspondiente.

Solución

Como la configuración de la barra y el collarín en este ejemplo es igual a la configuración que se muestra en la figura 2.53, podemos emplear las ecuaciones derivadas con anterioridad (ecuaciones 2.49 a 2.60).

(a) *Alargamiento máximo.* El alargamiento de la barra producido por el collarín en caída se puede determinar con la ecuación (2.53). El primer paso es determinar el alargamiento estático de la barra debido al peso del collarín. Como el peso del collarín es Mg , el cálculo del alargamiento es como sigue:

$$\delta_{\text{est}} = \frac{MgL}{EA} = \frac{(20.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})}{(210 \text{ GPa})(\pi/4)(15 \text{ mm})^2} = 0.0106 \text{ mm}$$

De este resultado observamos que

$$\frac{h}{\delta_{\text{est}}} = \frac{150 \text{ mm}}{0.0106 \text{ mm}} = 14,150$$

Ahora se pueden sustituir los valores numéricos en la ecuación (2.53) para obtener el alargamiento máximo:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{máx}} &= \delta_{\text{est}} \left[1 + \left(1 + \frac{2h}{\delta} \right)^{1/2} \right] \\ &= (0.0106 \text{ mm}) [1 + \sqrt{1 + 2(14,150)}] \\ &= 1.79 \text{ mm} \end{aligned}$$



Como la altura de caída es muy grande comparada con el alargamiento estático, obtenemos casi el mismo resultado calculando el alargamiento máximo con la ecuación (2.54):

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{2h\delta_{\text{est}}} = [2(150 \text{ mm})(0.0106 \text{ mm})]^{1/2} = 1.78 \text{ mm}$$

El factor de impacto es igual a la razón entre alargamiento máximo y el alargamiento estático:

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1.79 \text{ mm}}{0.0106 \text{ mm}} = 169$$

Este resultado demuestra que los efectos de una carga dinámicamente aplicada pueden ser muy grandes comparados con los efectos de la misma carga cuando actúa estáticamente.

(b) *Esfuerzo de tensión máximo.* El esfuerzo máximo producido por el collarín en caída se obtiene de la ecuación (2.55) como sigue:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E\delta_{\text{máx}}}{L} = \frac{(210 \text{ GPa})(1.79 \text{ mm})}{2.0 \text{ m}} = 188 \text{ MPa}$$

Este esfuerzo se puede comparar con el esfuerzo estático (consulte la ecuación 2.57), que es

$$\sigma_{\text{est}} = \frac{W}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{(20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(\pi/4)(15 \text{ mm})^2} = 1.11 \text{ MPa}$$

La razón entre $\sigma_{\text{máx}}$ y σ_{est} es $188/1.11 = 169$, es igual al factor de impacto para los alargamientos. Este resultado era de esperarse, debido a que los esfuerzos son directamente proporcionales a los alargamientos correspondientes (consulte las ecuaciones 2.55 y 2.57).

Ejemplo 2.17

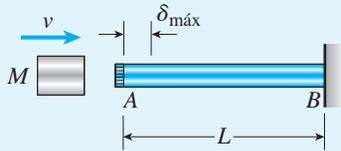


FIGURA 2.55 Ejemplo 2.17. Carga de impacto sobre una barra horizontal

Una barra horizontal AB con longitud L recibe un impacto en su extremo libre por un bloque pesado con masa M que se mueve horizontalmente con velocidad v (consulte figura 2.55).

(a) Determine el acortamiento máximo $\delta_{\text{máx}}$ de la barra debido al impacto y determine el factor de impacto correspondiente.

(b) Determine el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ de la barra y el factor de impacto correspondiente. (Sea EA la rigidez axial de la barra).

Solución

La carga sobre la barra en este ejemplo es muy diferente de las cargas sobre las barras representadas en las figuras 2.53 y 2.54. Por tanto, debemos hacer un análisis con base en la conservación de la energía.

(a) *Acortamiento máximo de la barra.* Para este análisis adoptamos las mismas suposiciones anteriores. Así, no tomaremos en cuenta todas las pérdidas de energía y supondremos que la energía cinética del bloque en movimiento se transforma por completo en energía de deformación de la barra.

La energía cinética del bloque en el instante del impacto es $Mv^2/2$. La energía de deformación de la barra cuando el bloque llega al reposo en el instante de acortamiento máximo es $EA \delta_{\text{máx}}^2/2L$, según lo establece la ecuación (2.37b). Por tanto, podemos escribir la siguiente ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{EA\delta_{\text{máx}}^2}{2L} \quad (2.63)$$

Despejando $\delta_{\text{máx}}$, obtenemos

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} \quad (2.64) \quad \leftarrow$$

Esta ecuación es igual a la ecuación (2.54), lo que podríamos haber anticipado.

Para determinar el factor de impacto necesitamos conocer el desplazamiento estático del extremo de la barra. En este caso el desplazamiento estático es el acortamiento de la barra debido al peso del bloque aplicado como una carga de compresión sobre ella (consulte la ecuación 2.51):

$$\delta_{\text{est}} = \frac{WL}{EA} = \frac{MgL}{EA}$$

Por tanto, el factor de impacto es

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{\delta_{\text{est}}} = \sqrt{\frac{EA v^2}{Mg^2 L}} \quad (2.65) \quad \leftarrow$$

El valor determinado con esta ecuación debe ser mucho mayor que 1.

(b) *Esfuerzo de compresión máximo en la barra.* El esfuerzo máximo en la barra se determina a partir del acortamiento máximo mediante la ecuación (2.55):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E\delta_{\text{máx}}}{L} = \frac{E}{L} \sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} = \sqrt{\frac{Mv^2E}{AL}} \quad (2.66) \quad \leftarrow$$

Esta ecuación es igual a la ecuación (2.60).

El esfuerzo estático σ_{est} en la barra es igual a W/A o Mg/A que (en combinación con la ecuación 2.66) conduce al mismo factor de impacto que antes (ecuación 2.65).

*2.9 CARGA REPETIDA Y FATIGA

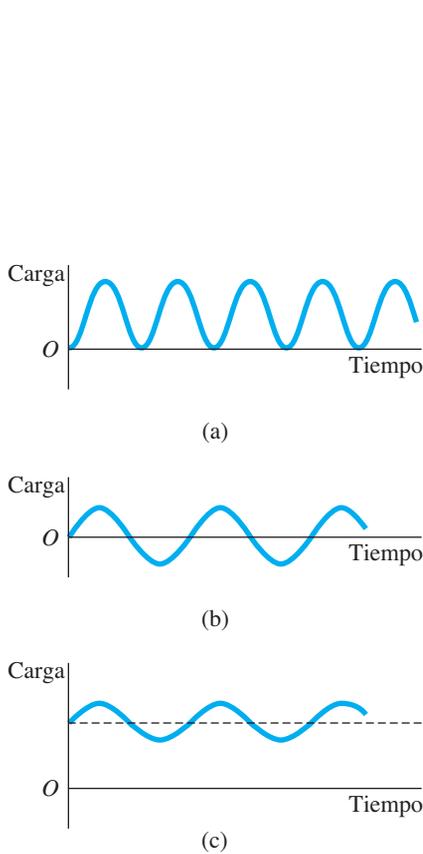


FIGURA 2.56 Tipos de cargas repetidas: (a) carga que actúa sólo en una dirección, (b) carga alternante o invertida y (c) carga fluctuante que varía con respecto a un valor promedio.

El comportamiento de una estructura no sólo depende de la naturaleza del material con que esté hecha, sino también del carácter de las cargas. En algunas situaciones las cargas son estáticas —se aplican en forma gradual, actúan durante largos periodos y cambian lentamente—. Otras cargas son de carácter dinámico, como ejemplos están las cargas de impacto que actúan repentinamente (sección 2.8) y las cargas repetidas recurrentes en grandes números de ciclos.

Algunos patrones comunes de las **cargas repetidas** se presentan en la figura 2.56. La primera gráfica (a) muestra una carga que se aplica, se remueve y se aplica de nuevo, siempre actúa en la misma dirección. La segunda gráfica (b) muestra una carga alternante que invierte su dirección durante cada ciclo de carga y la tercera gráfica (c) ilustra una carga fluctuante que varía con respecto a un valor promedio. Las cargas repetidas se asocian generalmente con maquinaria, motores, turbinas, generadores, ejes, impulsores, partes de aeronaves, partes de automóviles y similares. Algunas de estas estructuras se someten a millones (e incluso a miles de millones) de ciclos de carga durante su vida útil.

Es probable que una estructura sometida a cargas dinámicas falle a un esfuerzo menor que cuando las mismas cargas se aplican de manera estática, en especial cuando se repiten durante un número grande de ciclos. En esos casos es usual que la falla sea por **fatiga** o por **fractura progresiva**. Un ejemplo conocido de una falla por fatiga se tiene al someter a esfuerzo un sujetapapeles metálico hasta el punto de rompimiento al flexionarlo repetidamente hacia delante y hacia atrás. Si el sujetapapeles se dobla sólo una vez, no se rompe. Pero si la carga se invierte al flexionarlo en la dirección opuesta, y si todo el ciclo de carga se repite varias veces, el sujetapapeles finalmente se romperá. La *fatiga* se define como el deterioro de un material por acción de ciclos repetidos de esfuerzo y deformación, lo que resulta en un agrietamiento progresivo que finalmente produce la fractura.

En una falla por fatiga típica, se forma una grieta microscópica en un punto de esfuerzo elevado (por lo general en una *concentración de esfuerzos*, que se describirá en la siguiente sección) y se alarga gradualmente conforme se aplican las cargas repetidamente. Cuando la grieta se vuelve tan grande que el material restante no puede resistir las cargas, ocurre una fractura repentina del material (figura 2.57). Dependiendo de la naturaleza del material, puede tomar desde algunos ciclos de carga hasta cientos de millones de ellos para producir una falla por fatiga.

Como ya se destacó, la magnitud de la carga que ocasiona una falla por fatiga es menor que la carga que se puede soportar en forma estática. Para determinar la carga de falla se deben realizar ensayos del material. En el caso de carga repetida, el material se prueba a varios niveles de esfuerzo y se registra el número de ciclos antes de la falla. Por ejemplo, una probeta de material se coloca en una máquina de ensayos a la tensión y se carga repetidamente hasta un cierto esfuerzo, por ejemplo σ_1 . Los ciclos de carga se continúan hasta que ocurra la falla y se registra el número n de ciclos de carga. Luego el ensayo se repite para un esfuerzo diferente, por ejemplo σ_2 . Si σ_2 es mayor que σ_1 , el número de ciclos antes de la falla será menor. Si σ_2 es menor que σ_1 , el número será mayor. Al final, se acumulan datos suficientes para trazar una **curva de resistencia a la fatiga** o **diagrama S-N**, en

FIGURA 2.57 Falla por fatiga de una barra cargada repetidamente en tensión; la grieta se propagó en forma gradual sobre la sección transversal hasta que la fractura ocurrió repentinamente. (Cortesía de MTS Systems Corporation)

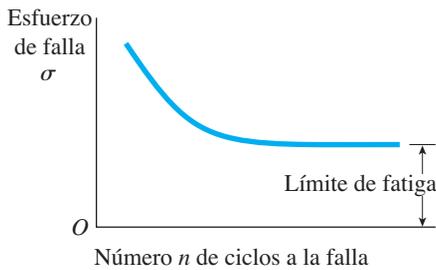
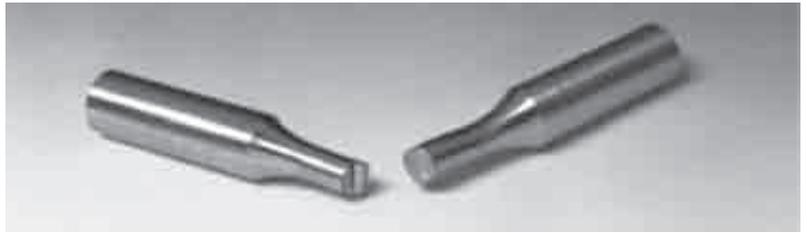


FIGURA 2.58 Curva de resistencia a la fatiga, o diagrama S - N , mostrando el límite de fatiga.

el que se traza el esfuerzo de falla (S) contra el número (N) de ciclos antes de la falla (figura 2.58). Es usual que el eje vertical sea una escala lineal y el eje horizontal una escala logarítmica.

La curva de resistencia a la fatiga de la figura 2.58 muestra que entre menor sea el esfuerzo, mayor será el número de ciclos para producir la falla. Para algunos materiales la curva tiene una asíntota horizontal conocida como **límite de fatiga** o **límite de resistencia a la fatiga**. Cuando existe, este límite es el esfuerzo debajo del cual no ocurrirá una falla por fatiga sin importar cuántas veces se repita la carga. La forma precisa de una curva de resistencia a la fatiga depende de muchos factores, incluidas las propiedades del material, la geometría de la probeta de ensayo, la velocidad del ensayo, el patrón de carga y la condición de la superficie de la probeta. En publicaciones técnicas se reportan para su consulta los resultados de muchos ensayos a la fatiga hechos en una gran variedad de materiales y componentes estructurales.

Los diagramas S - N típicos para el acero y el aluminio se muestran en la figura 2.59. La ordenada es el esfuerzo de falla, expresado como porcentaje del esfuerzo último para el material y la abscisa es el número de ciclos en que ocurre la falla. Observe que el número de ciclos está trazado en una escala logarítmica. La curva para el acero se vuelve horizontal en aproxima-

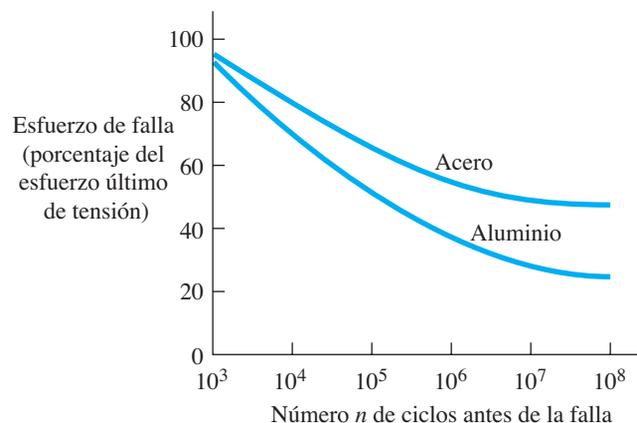


FIGURA 2.59 Curvas de resistencia comunes para acero y aluminio en carga alternante (invertida).

damente 10^7 ciclos y el límite de fatiga es casi 50% del esfuerzo de tensión último para carga estática ordinaria. El límite de fatiga para el aluminio no está tan definido como el del acero, pero un valor común del límite de fatiga es el esfuerzo a 5×10^8 ciclos o aproximadamente 25% del esfuerzo último.

Ya que en general las fallas por fatiga inician con una grieta microscópica en un punto de esfuerzo muy localizado (es decir, en una concentración de esfuerzos), la condición de la superficie del material es extremadamente importante. Las probetas muy pulidas tienen límites de resistencia a la fatiga mayores. Las superficies rugosas, en especial las que se encuentran en concentraciones de esfuerzos alrededor de agujeros o ranuras, disminuyen en gran medida el límite de resistencia a la fatiga. La corrosión, que causa diminutas irregularidades en la superficie, tiene un efecto similar. Para el acero, la corrosión ordinaria puede reducir el límite de fatiga en más de 50 por ciento.

*2.10 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Cuando se determinan los esfuerzos en barras cargadas axialmente, es usual emplear la fórmula básica $\sigma = P/A$, en la cual P es la fuerza axial en la barra y A es el área de su sección transversal. Esta fórmula se basa en la suposición de que la distribución del esfuerzo es uniforme en toda la sección. En realidad, las barras con frecuencia tienen agujeros, ranuras, muescas, filetes, roscas u otros cambios abruptos en su geometría que producen perturbaciones en el patrón uniforme de esfuerzos. Estas discontinuidades en la geometría causan esfuerzos elevados en regiones muy pequeñas de la barra y se conocen como **concentraciones de esfuerzos**. Las discontinuidades se llaman **elevadores de esfuerzos**.

Las concentraciones de esfuerzos también aparecen en cargas puntuales. Por ejemplo, una carga puede actuar sobre un área muy pequeña y producir esfuerzos elevados en la región alrededor de su punto de aplicación. Un ejemplo es una carga aplicada a través de una conexión con pasador, caso en el cual la carga se aplica sobre el área de soporte del pasador.

Los esfuerzos que existen en concentraciones de esfuerzos se pueden determinar mediante métodos experimentales o bien por métodos avanzados de análisis, incluyendo el método del elemento finito. Los resultados de la investigación para muchos casos de interés práctico están disponibles en publicaciones técnicas (por ejemplo, en la referencia 2.9). Algunos datos de concentración de esfuerzos comunes se dan más adelante en esta sección y también en los capítulos 3 y 5.

Principio de Saint-Venant

Para ilustrar la naturaleza de las concentraciones de esfuerzos, considere los esfuerzos en una barra con sección transversal rectangular (ancho b , espesor t) sometida a una carga concentrada P en el extremo (figura 2.60). El esfuerzo pico directamente debajo de la carga puede ser varias veces el valor del esfuerzo promedio P/bt , dependiendo del área sobre la cual se aplica. Sin embargo, el esfuerzo máximo disminuye rápidamente conforme nos alejamos del punto de la aplicación de la carga, como se muestra mediante

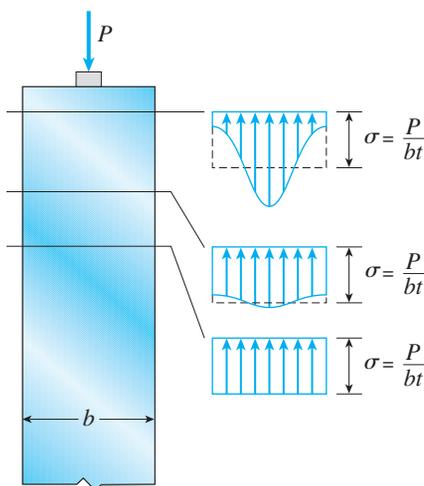


FIGURA 2.60 Distribuciones de esfuerzos cerca del extremo de una barra con sección transversal rectangular (ancho b , espesor t) sometida a una carga concentrada P que actúa sobre un área pequeña.

los diagramas de esfuerzos en la figura. A una distancia desde el extremo de la barra igual al ancho b de la misma, la distribución de esfuerzos es casi uniforme y el esfuerzo máximo es sólo un pequeño porcentaje mayor que el esfuerzo promedio. Esta observación es cierta para la mayor parte de las concentraciones de esfuerzos, como agujeros y ranuras.

Por lo anterior, podemos establecer un enunciado general de que la ecuación $\sigma = P/A$ define los esfuerzos axiales sobre una sección transversal de la barra sólo cuando la sección está alejada al menos una distancia b de cualquier carga concentrada o discontinuidad en su forma, donde b es la dimensión lateral más grande de la barra (como el ancho o el diámetro).

El enunciado anterior sobre los esfuerzos en una barra prismática es parte de una observación general conocida como **principio de Saint-Venant**. Con raras excepciones, este principio se aplica a cuerpos linealmente elásticos de todo tipo. Para comprender el principio de Saint-Venant imagine que tenemos un cuerpo con un sistema de cargas que actúan sobre una parte pequeña de su superficie. Por ejemplo, suponga que tenemos una barra prismática con ancho b sometida a un sistema de varias cargas concentradas que actúan en el extremo (figura 2.61a). Por simplicidad, suponga que las cargas son simétricas y que sólo tienen una resultante vertical.

A continuación, considere un sistema de carga diferente pero estáticamente equivalente que actúa sobre la misma región pequeña de la barra. (“Estáticamente equivalente” significa que los dos sistemas de carga tienen la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante). Por ejemplo, la carga distribuida uniformemente que se muestra en la figura 2.61b es estáticamente equivalente al sistema de cargas concentradas que se muestra en la figura 2.61a. El principio de Saint-Venant establece que los esfuerzos en el cuerpo causados por cualquiera de los sistemas de carga son los mismos, siempre que nos alejemos de la región cargada una distancia al menos igual a la dimensión mayor de la región cargada (distancia b en nuestro ejemplo).

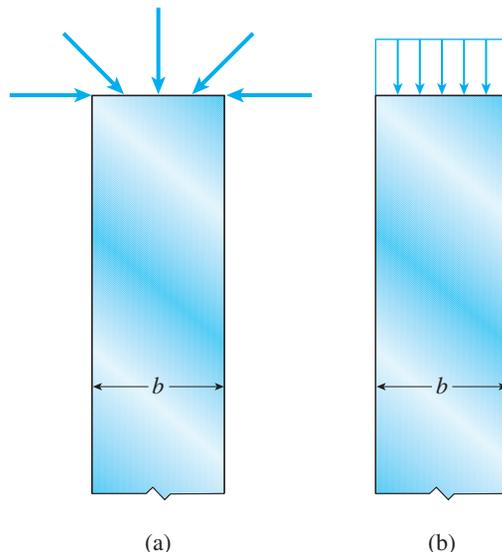


FIGURA 2.61 Ilustración del principio de Saint-Venant: (a) sistema de cargas concentradas que actúan sobre una región pequeña de una barra y (b) sistema estáticamente equivalente.

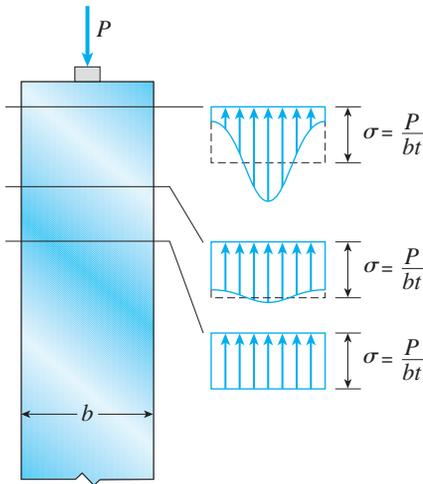


FIGURA 2.60 (Repetida.)

Por tanto, las distribuciones del esfuerzo que se muestran en la figura 2.60 son una ilustración del principio de Saint-Venant. Por supuesto, este “principio” no es una ley rigurosa de la mecánica sino que es una observación de sentido común basada en la experiencia teórica y práctica.

El principio de Saint-Venant tiene una gran importancia práctica en el diseño y análisis de barras, vigas, ejes y otras estructuras que se encuentran en la mecánica de materiales. Ya que los efectos de las concentraciones del esfuerzo son localizados, podemos emplear todas las fórmulas estándares de los esfuerzos (como $\sigma = P/A$) en secciones transversales a una distancia suficientemente alejada de la fuente de la concentración. Cerca de ese lugar los esfuerzos dependen de los detalles de la carga y de la forma del elemento. Además, las fórmulas aplicables a elementos completos, como las fórmulas para alargamientos, desplazamientos y energía de deformación, dan resultados satisfactorios aun cuando se presenten concentraciones de esfuerzos. La explicación yace en el hecho que las concentraciones de esfuerzos están localizadas y tienen poco efecto sobre el comportamiento general de un elemento.*

Factores de concentración de esfuerzos

Ahora consideremos algunos casos particulares de concentraciones de esfuerzos causadas por discontinuidades en la forma de la barra. Comenzamos con una barra con sección transversal rectangular que tiene un agujero circular y que está sometida a una fuerza de tensión P (figura 2.62a). La barra es relativamente esbelta y su ancho b es mucho mayor que su espesor t . El agujero tiene un diámetro d .

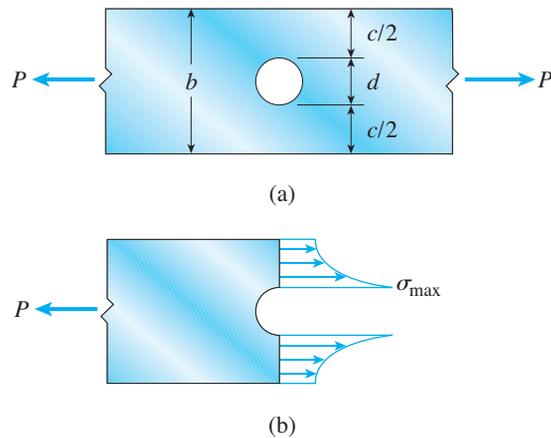


FIGURA 2.62 Distribución del esfuerzo en una barra plana con un agujero circular.

*El principio de Saint-Venant se denomina así en honor del famoso matemático y experto en elasticidad francés Barré de Saint-Venant (1789-1886) (referencia 2.10). El principio se aplica por lo general a barras y vigas sólidas, pero no a secciones abiertas con pared delgada. Para ver un análisis de las limitaciones del principio de Saint-Venant, consulte la referencia 2.11.

El esfuerzo normal que actúa sobre la sección transversal a través del centro del agujero tiene la distribución que se muestra en la figura 2.62b. El esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ ocurre en los bordes del agujero y puede ser bastante mayor que el *esfuerzo nominal* $\sigma = P/ct$ en la misma sección transversal. (Observe que ct es el área neta en la sección transversal que pasa por el agujero). La intensidad de una concentración de esfuerzos usualmente se expresa por la razón entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo nominal, y se llama **factor de concentración de esfuerzos K** :

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (2.67)$$

Para una barra en tensión, el esfuerzo nominal es el esfuerzo promedio basado en el área neta de la sección transversal. En otros casos se puede emplear una variedad de esfuerzos. Ahora bien, siempre que se utilice un factor de concentración de esfuerzos es importante observar cuidadosamente cómo se define el esfuerzo nominal.

En la figura 2.63 se ve una gráfica del factor de concentración de esfuerzos K para una barra con un agujero. Si el agujero es pequeño, el factor K es igual a 3, lo que significa que el esfuerzo máximo es tres veces el esfuerzo nominal. Conforme el agujero es más grande en proporción al ancho de la barra, K se hace menor y el efecto de la concentración no es tan severo.

De acuerdo con el principio de Saint-Venant sabemos que, a distancias iguales al ancho b de la barra *alejadas* del agujero en cualquier dirección axial, la distribución del esfuerzo es prácticamente uniforme e igual a P dividida entre el área transversal total ($\sigma = P/bt$).

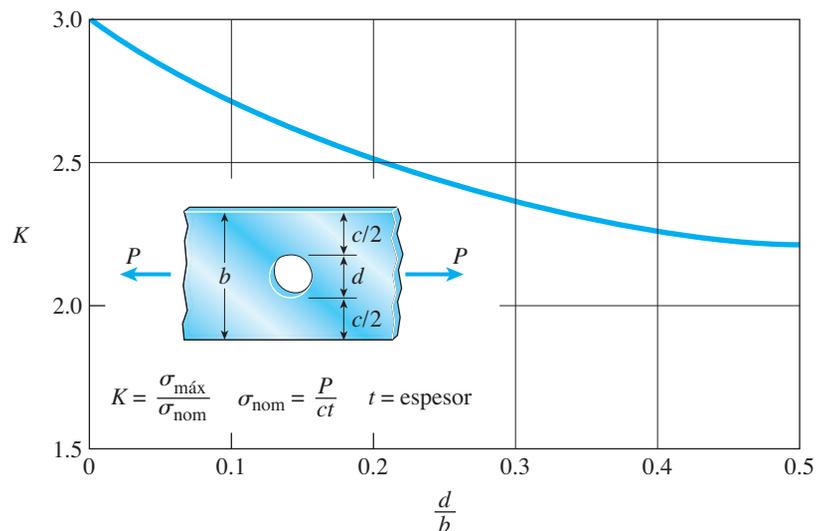


FIGURA 2.63 Factor de concentración de esfuerzos K para barras planas con agujeros circulares.

Los factores de concentración de esfuerzos para otros dos casos de interés práctico se dan en las figuras 2.64 y 2.65. Estas gráficas son para barras planas y barras circulares, respectivamente, que disminuyen su tamaño debido a un escalón formando un *reborde*. Para reducir los efectos de la concentración de esfuerzo se utilizan *filetes* para redondear las esquinas entrantes.* Sin los filetes, los factores de concentración de efectos serían extremadamente grandes, como se indica en el lado izquierdo de cada gráfica donde K tiende al infinito conforme el radio del filete R tiende a cero. En los dos casos el esfuerzo máximo ocurre en la parte menor de la barra en la región del filete.**

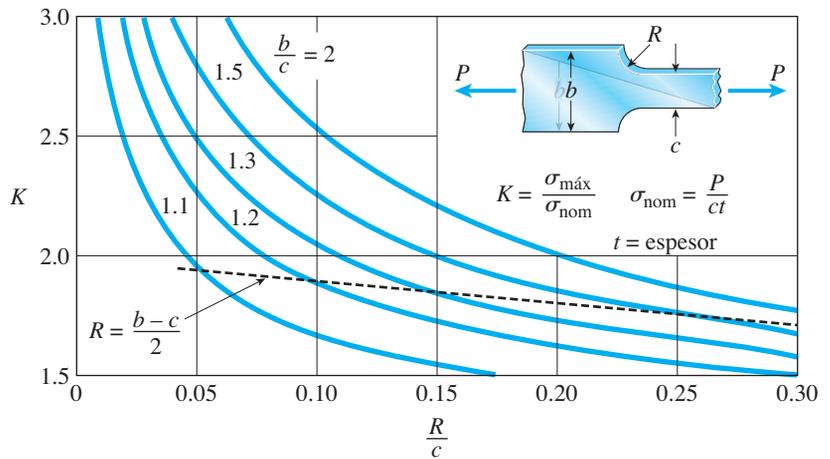


FIGURA 2.64 Factor de concentración de esfuerzos K para barras planas con filetes en los rebordes. La línea discontinua es para un filete de un cuarto de círculo.

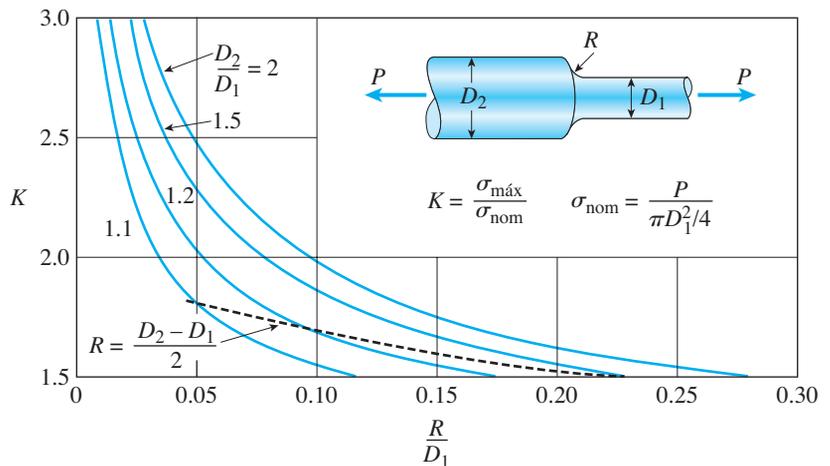


FIGURA 2.65 Factor de concentración de esfuerzos K para barras redondas con filetes en los rebordes. La línea discontinua es para un filete de un cuarto de círculo.

*Un *filete* es una superficie curva y cóncava formada donde dos superficies se unen. Su propósito es redondear lo que de otra manera sería una arista aguda entrante.

**Los factores de concentración de esfuerzos dados en las gráficas son teóricos, para barras de material linealmente elástico. Las gráficas están trazadas a partir de fórmulas dadas en la referencia 2.9.

Diseño por concentraciones de esfuerzos

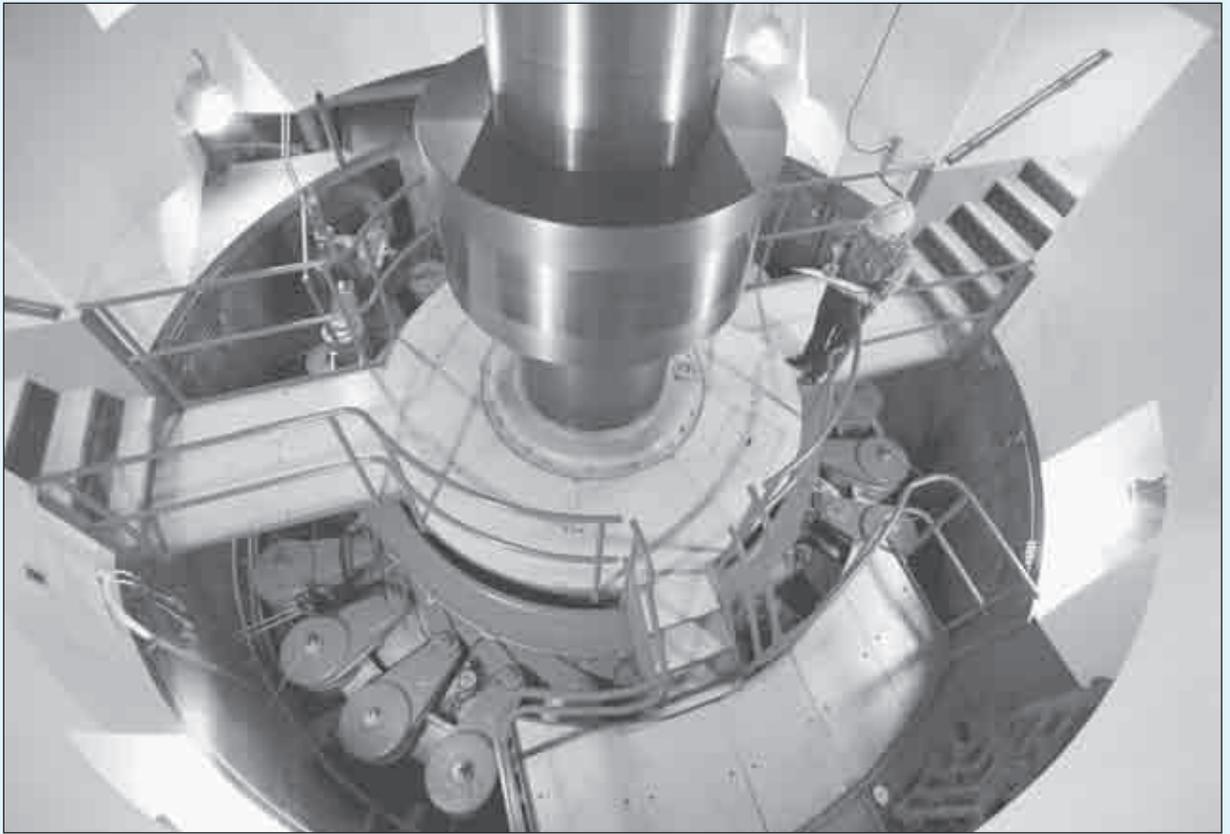
Debido a la posibilidad de fallas por fatiga, las concentraciones de esfuerzos son especialmente importantes cuando el elemento se somete a carga repetida. Como se explicó en la sección anterior, las grietas comienzan en el punto de máximo esfuerzo y luego se difunden de manera gradual por todo el material conforme se repite la carga. En un diseño práctico, el límite de fatiga (figura 2.58) se considera como el esfuerzo último para el material cuando el número de ciclos es extremadamente grande. El esfuerzo permisible se obtiene aplicando un factor de seguridad con respecto a este esfuerzo último. Luego el esfuerzo pico en la concentración de esfuerzo se compara con el esfuerzo permisible.

En muchas situaciones es demasiado estricto el uso del valor total teórico del factor de concentración de esfuerzos. Los ensayos de fatiga por lo general producen la falla a niveles mayores del esfuerzo nominal que los obtenidos dividiendo el límite de fatiga entre K . En otras palabras, un elemento estructural sometido a carga repetida no es tan sensitivo a una concentración de esfuerzos como indica el valor de K y, por tanto, con frecuencia se emplea un factor reducido de concentración de esfuerzos.

Otros tipos de cargas dinámicas, como las cargas de impacto, también requieren que se tomen en cuenta los efectos de concentración de esfuerzos. A menos que se disponga de mejor información, se debe utilizar el factor de concentración de esfuerzos completo. Los elementos sometidos a temperaturas bajas también son muy susceptibles a fallas en las concentraciones de esfuerzos y por lo tanto se debe tener cuidado especial en esos casos.

La importancia de las concentraciones de esfuerzos cuando un elemento se somete a carga estática depende del tipo de material. En los materiales dúctiles, como el acero estructural, a menudo se puede ignorar una concentración de esfuerzo. La razón es que el material en el punto de esfuerzo máximo (por ejemplo alrededor de un agujero) tiene fluencia y ocurrirá flujo plástico, reduciendo de esta manera la intensidad de la concentración de esfuerzo y haciendo casi uniforme la distribución de esfuerzo. Por otro lado, en materiales frágiles (como el vidrio), una concentración de esfuerzo permanecerá hasta el punto de fractura. Por tanto, podemos hacer una observación general que con cargas estáticas y un material dúctil no es probable que el efecto de concentración de esfuerzo sea importante, pero con cargas estáticas y un material frágil se debe considerar el factor total de concentración de esfuerzos.

La intensidad de las concentraciones de esfuerzos se puede reducir si las partes tienen una proporción adecuada. Los filetes de buen tamaño reducen las concentraciones de esfuerzos en las aristas reentrantes. Las superficies lisas en puntos de esfuerzo elevado, como en el interior de un agujero, inhiben la formación de grietas. Un refuerzo alrededor de agujeros también puede ser benéfico. Hay muchas otras técnicas para uniformar las distribuciones de los esfuerzos en un elemento estructural y debido a esto se puede reducir el factor de concentración de esfuerzos. Esas técnicas, que se estudian en cursos de diseño en ingeniería, son de gran importancia en el diseño de aviones, barcos y máquinas. Muchas fallas estructurales innecesarias han ocurrido debido a que los diseñadores erraron en reconocer los efectos de las concentraciones de esfuerzos y de la fatiga.



Los ejes circulares son componentes esenciales de máquinas y dispositivos para generación y transmisión de energía.

Torsión

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata del torcimiento de barras circulares y ejes huecos sometidos a momentos torsionales. Primero consideramos la **torsión uniforme** que se refiere al caso en el cual el par de torsión es constante en toda la longitud de un eje prismático, en tanto que la **torsión no uniforme** describe casos en los que el momento torsional y/o la rigidez torsional de la sección varía en toda la longitud. Como en el caso de deformaciones axiales, debemos relacionar el esfuerzo y la deformación unitaria y también la carga aplicada y la deformación unitaria. Para torsión, recuerde que la ley de Hooke para cortante establece que los esfuerzos cortantes, τ , son proporcionales a las deformaciones unitarias por cortante, γ , con G como la constante de proporcionalidad, que es el módulo de elasticidad en cortante. Los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias por cortante varían linealmente con la distancia radial en la sección transversal, como se describe con la **fórmula de la torsión**. El ángulo de torsión, φ , es proporcional al momento torsional interno y a la flexibilidad torsional de la barra circular. La mayor parte del análisis en este capítulo se dedica al comportamiento lineal elástico y a rotaciones pequeñas de elementos estáticamente determinados. Sin embargo, si la barra es **estáticamente indeterminada**, debemos aumentar las ecuaciones del equilibrio estático con ecuaciones de compatibilidad (que se basan en **relaciones par de torsión-desplazamiento**) para resolver cualesquiera incógnitas de interés, como momentos de soporte o momentos torsionales internos en elementos. Los esfuerzos sobre secciones inclinadas también se estudian como primer paso hacia una consideración más complicada de estados de esfuerzo plano en capítulos posteriores. Por último, al final del capítulo se introduce una variedad de temas especializados y avanzados (como energía de deformación, flujo cortante en tubos de pared delgada y concentraciones de esfuerzos en torsión).

El capítulo 3 está organizado como sigue:

- 3.1 Introducción 222
- 3.2 Deformaciones torsionantes de una barra circular 223
- 3.3 Barras circulares de materiales linealmente elásticos 226
- 3.4 Torsión no uniforme 238
- 3.5 Esfuerzos y deformaciones unitarias en cortante puro 245
- 3.6 Relación entre los módulos de elasticidad E y G 252
- 3.7 Transmisión de potencia por ejes circulares 254
- 3.8 Elementos de torsión estáticamente indeterminados 259
- 3.9 Energía de deformación en torsión y cortante puro 263
- 3.10 Tubos de pared delgada 270
- *3.11 Concentraciones de esfuerzos en torsión 279
- Resumen y repaso del capítulo 282
- Problemas 283

*Temas especializados y/o avanzados

3.1 INTRODUCCIÓN

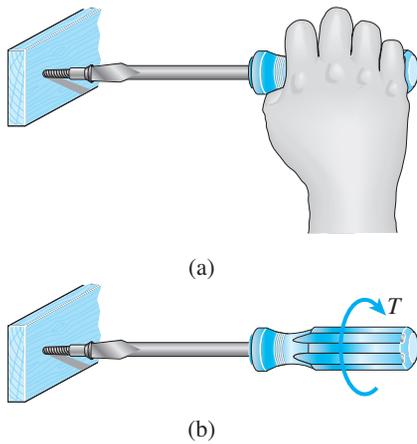


FIGURA 3.1 Torsión de un destornillador debido al par de torsión T aplicado al mango.

En los capítulos 1 y 2 analizamos el comportamiento del tipo de elemento estructural más simple, que es una barra recta sometida a cargas axiales. Ahora consideramos un tipo de comportamiento ligeramente más complejo conocido como **torsión**. Torsión se refiere al torcimiento de una barra recta al ser cargada por momentos (o pares de torsión) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra. Por ejemplo, cuando usted gira un destornillador (figura 3.1a), su mano aplica un par de torsión T al mango (figura 3.1b) y tuerce el vástago del destornillador. Otros ejemplos de barras en torsión son los ejes de impulsión en automóviles, ejes de transmisión, ejes de hélices, barras de dirección y brocas de taladros.

Un caso idealizado de carga torsional se representa en la figura 3.2a, donde se muestra una barra recta soportada en un extremo y cargada por dos pares de fuerzas iguales y opuestas. El primer par consiste en las fuerzas P_1 que actúan cerca del punto medio de la barra y el segundo para consiste de las fuerzas P_2 que actúan en el extremo. Cada par de fuerzas forma un **par de torsión** que tiende a torcer la barra con respecto a su eje longitudinal. Como sabemos de la estática, el **momento de un par de torsión** es igual al producto de una de las fuerzas y la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas; por tanto, el primer par de torsión tiene un momento $T_1 = P_1 d_1$ y el segundo tiene un momento $T_2 = P_2 d_2$.

Las **unidades** en el sistema inglés para el momento son la libra-pie (lb-ft) y la libra-pulgada (lb-in). La unidad en el SI para el momento es el newton metro (N·m).

El momento de un par de torsión se puede representar por un **vector** en forma de una flecha con cabeza doble (figura 3.2b). La flecha es perpendicular al plano que contiene el par de torsión y, por tanto, en este caso las dos flechas son paralelas al eje de la barra. La dirección (o *sentido*) del momento se indica mediante la **regla de la mano derecha** para vectores momento: empleando su mano derecha, permita que sus dedos se curven en el sentido del momento y entonces su dedo pulgar apuntará en la dirección del vector.

Una representación alternativa de un momento es una flecha curva que actúa en el sentido de la rotación (figura 3.2c). La flecha curva y las representaciones vectoriales son de uso común y en este libro emplearemos las dos. La elección depende de la conveniencia y la preferencia personal.

Los momentos que producen el torcimiento de una barra, como los marcados T_1 y T_2 en la figura 3.2, se llaman **pares de torsión** o **momentos de torsión**. Los elementos cilíndricos que se someten a pares de torsión y transmiten potencia mediante rotación se llaman **ejes**; por ejemplo, el eje impulsor de un automóvil o el eje de la hélice de un barco. La mayor parte de los ejes tienen secciones transversales circulares sean sólidas o tubulares.

En este capítulo iniciamos el desarrollo de fórmulas para las deformaciones unitarias y los esfuerzos en barras circulares sometidas a torsión. Luego, analizamos el estado de esfuerzo conocido como *cortante puro* y obtendremos la relación entre los módulos de elasticidad E y G en tensión y cortante, respectivamente. Enseguida, estudiaremos los ejes rotatorios y determinaremos la potencia que transmiten. Por último, estudiaremos varios temas adicionales relacionados con la torsión, los cuales son: elementos estáticamente indeterminados, energía de deformación, tubos de pared delgada con sección transversal no circular y concentraciones de esfuerzos.

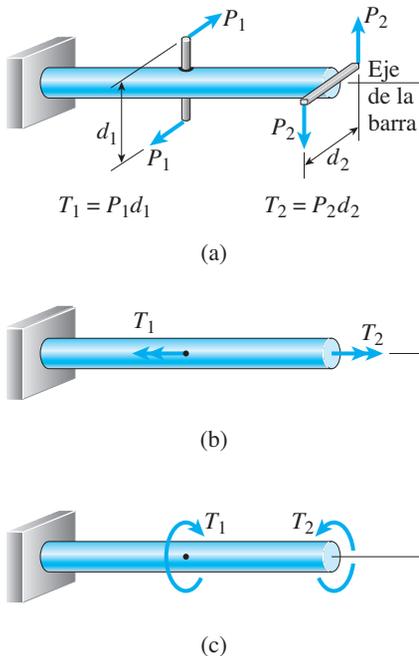


FIGURA 3.2 Barra circular sometida a torsión por los pares de torsión T_1 y T_2 .

3.2 DEFORMACIONES TORSIONANTES DE UNA BARRA CIRCULAR

Comenzamos nuestro estudio de torsión al considerar una barra prismática con sección transversal circular torcida por pares de torsión T que actúan en sus extremos (figura 3.3a). Dado que cada sección transversal de la barra es idéntica y puesto que cada sección transversal se somete al mismo par de torsión interno, decimos que la barra está en **torsión pura**. A partir de consideraciones de simetría, se puede demostrar que las secciones transversales de la barra no cambian de forma conforme giran con respecto al eje longitudinal. En otras palabras, todas las secciones transversales permanecen planas y circulares y todos los radios permanecen rectos. Además, si el ángulo de rotación entre un extremo de la barra y el otro es pequeño, no cambiarán la longitud de la barra ni sus radios.

Para ayudar a visualizar la deformación de la barra, imagine que el extremo izquierdo de la misma (figura 3.3a) está fijo. Luego, ante la acción del par de torsión T , el extremo derecho girará (con respecto al extremo izquierdo) un ángulo pequeño ϕ , conocido como **ángulo de torsión** (o *ángulo de rotación*). Debido a esta rotación, una línea recta longitudinal pq en la superficie de la barra se convertirá en la curva helicoidal pq' , donde q' es la posición del punto q después de que la sección transversal extrema ha girado el ángulo ϕ (figura 3.3b).

El ángulo de torsión cambia a lo largo del eje de la barra y en secciones transversales intermedias tendrá un valor $\phi(x)$ que está entre cero en el extremo izquierdo y ϕ en el extremo derecho. Si cada sección transversal de la barra tiene el mismo radio y se somete al mismo par de torsión (torsión pura), el ángulo $\phi(x)$ variará linealmente entre los extremos.

Deformaciones unitarias por cortante en la superficie exterior

Ahora considere un elemento de la barra entre dos secciones transversales separadas una distancia dx (consulte la figura 3.4a). Este elemento se muestra agrandado en la figura 3.4b. En su superficie exterior identificamos un elemento pequeño $abcd$, con lados ab y cd que al inicio son paralelos al eje longitudinal. Durante el torcimiento de la barra, las secciones transversales derechas giran con respecto a las secciones transversales izquierdas un ángulo pequeño de torsión $d\phi$, de manera que los puntos b y c se mueven a b' y c' , respectivamente. Las longitudes de los lados del elemento, que ahora es el elemento $ab'c'd$, no cambian durante esta rotación pequeña.

Sin embargo, los ángulos en las esquinas del elemento (figura 3.4b) ya no son iguales a 90° . Por tanto, el elemento está en un estado de **cortante puro**, lo cual significa que el elemento está sometido a deformaciones por

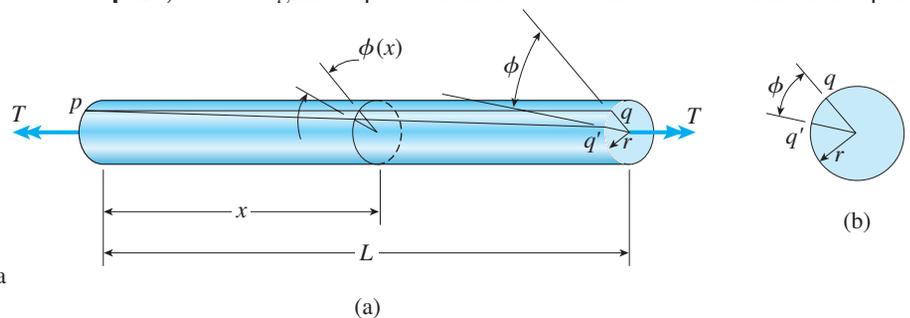


FIGURA 3.3 Deformaciones de una barra circular en torsión pura.

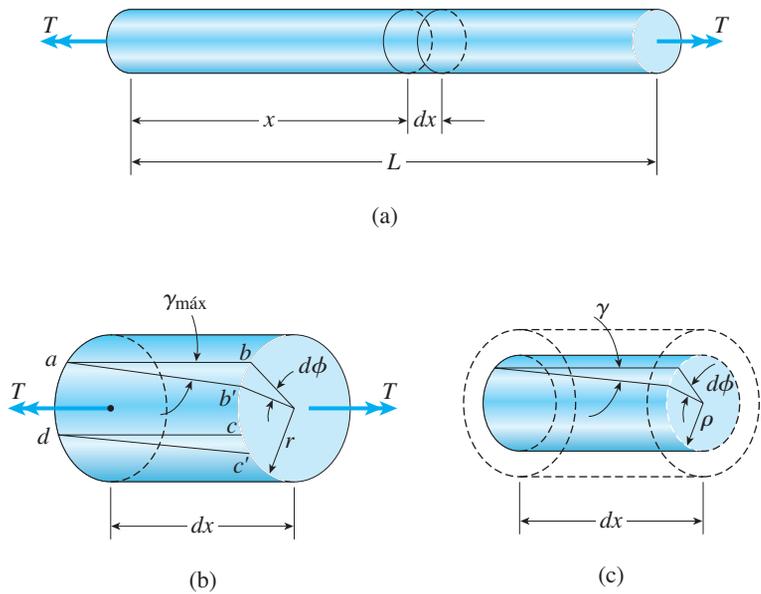


FIGURA 3.4 Deformación de un elemento con longitud dx cortado de una barra en torsión.

cortante pero no a deformaciones normales (consulte la figura 1.28 de la sección 1.6). La magnitud de la deformación por cortante en la superficie exterior de la barra, denotada $\gamma_{\text{máx}}$, es igual al decremento en el ángulo en el punto a , es decir, el decremento en el ángulo bad . De la figura 3.4b observamos que el decremento en este ángulo es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{bb'}{ab} \quad (\text{a})$$

donde $\gamma_{\text{máx}}$ se mide en radianes, bb' es la distancia que se desplaza el punto b y ab es la longitud del elemento (igual a dx). Si r denota el radio de la barra, podemos expresar la distancia bb' como $rd\phi$, donde $d\phi$ también se mide en radianes. Por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{rd\phi}{dx} \quad (\text{b})$$

Esta ecuación relaciona la deformación unitaria cortante en la superficie exterior de la barra con el ángulo de torsión.

La cantidad $d\phi/dx$ es la razón de cambio del ángulo de torsión ϕ con respecto a la distancia x medida a lo largo del eje de la barra. Denotaremos $d\phi/dx$ con el símbolo θ y nos referiremos a ella como **razón de torsión o ángulo de torsión por unidad de longitud**.

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad (3.1)$$

Con esta notación ahora podemos escribir la ecuación para la deformación unitaria por cortante en la superficie exterior (ecuación b) como sigue:

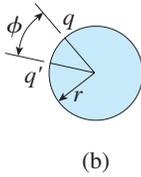


FIGURA 3.3b (Repetida.)

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{rd\phi}{dx} = r\theta \quad (3.2)$$

Por conveniencia hemos considerado una barra sujeta a torsión pura al deducir las ecuaciones (3.1) y (3.2). Sin embargo, las dos ecuaciones son válidas en casos más generales de torsión, como cuando la razón de torsión θ no es constante sino que varía con la distancia x a lo largo del eje de la barra.

En el caso especial de torsión pura, la razón de torsión es igual al ángulo total de torsión ϕ dividido entre la longitud L , es decir, $\theta = \phi/L$. Por lo tanto, sólo para torsión pura, obtenemos

$$\gamma_{\text{máx}} = r\theta = \frac{r\phi}{L} \quad (3.3)$$

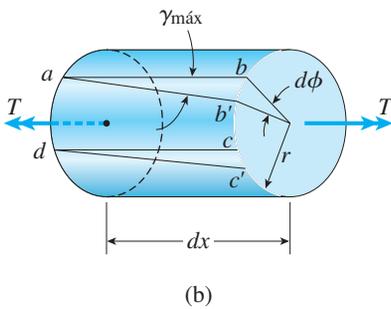


FIGURA 3.4b (Repetida.)

Esta ecuación se puede obtener directamente de la geometría de la figura 3.3a al observar que $\gamma_{\text{máx}}$ es el ángulo entre las líneas pq y pq' , es decir, $\gamma_{\text{máx}}$ es el ángulo qpq' . Por tanto, $\gamma_{\text{máx}}L$ es a la distancia qq' en el extremo de la barra. Pero como la distancia qq' también es igual a $r\phi$ (figura 3.3b), obtenemos $r\phi = \gamma_{\text{máx}}L$, que concuerda con la ecuación (3.3).

Deformaciones unitarias por cortante dentro de la barra

Las deformaciones unitarias por cortante en el interior de la barra se pueden determinar mediante el mismo método empleado para encontrar la deformación unitaria por cortante $\gamma_{\text{máx}}$ en la superficie. Como los radios en las secciones transversales de una barra permanecen rectos y sin distorsión durante la torsión, observamos que el análisis anterior para un elemento $abcd$ en la superficie exterior (figura 3.4b) también será válido para un elemento similar situado en la superficie de un cilindro interior con radio ρ (figura 3.4c). Por tanto, los elementos interiores también están en cortante puro con las deformaciones unitarias por cortante correspondientes dadas por la ecuación (compare con la ecuación 3.2):

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r} \gamma_{\text{máx}} \quad (3.4)$$

Esta ecuación muestra que las deformaciones unitarias cortantes en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro, siendo cero la deformación unitaria en el centro y alcanzando un valor máximo $\gamma_{\text{máx}}$ en la superficie exterior.

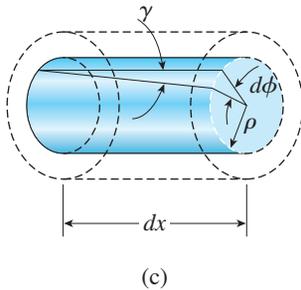


FIGURA 3.4c (Repetida.)

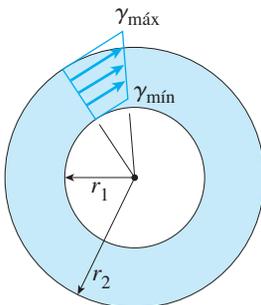
Tubos circulares

Un repaso de los análisis anteriores demostrará que las ecuaciones para las deformaciones unitarias cortantes (ecuaciones 3.2 a 3.4) se aplican a **tubos circulares** (figura 3.5) así como a barras circulares sólidas. En la figura 3.5 se muestra la variación lineal en deformación unitaria por cortante entre la deformación unitaria máxima en la superficie exterior y la deformación unitaria mínima en la superficie interior. Las ecuaciones para estas deformaciones unitarias son las siguientes:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{r_2\phi}{L} \quad \gamma_{\text{mín}} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{\text{máx}} = \frac{r_1\phi}{L} \quad (3.5a,b)$$

FIGURA 3.5 Deformaciones unitarias por cortante en un tubo circular.

en donde r_1 y r_2 son los radios interior y exterior, respectivamente, del tubo.



Todas las ecuaciones anteriores para las deformaciones unitarias en una barra circular se basan en conceptos geométricos y no incluyen las propiedades del material. Por tanto, las ecuaciones son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte elástica o inelásticamente, lineal o no linealmente. Sin embargo, las ecuaciones están limitadas a barras con ángulos de torsión pequeños y deformaciones unitarias mínimas.

3.3 BARRAS CIRCULARES DE MATERIALES LINEALMENTE ELÁSTICOS

Ahora que hemos investigado las deformaciones unitarias por cortante en una barra circular en torsión (consulte las figuras 3.3 a 3.5) podemos determinar las direcciones y magnitudes de los esfuerzos cortantes correspondientes. Las direcciones de los esfuerzos se pueden determinar por inspección, como se ilustra en la figura 3.6a, donde observamos que el par de torsión T tiende a girar el extremo derecho de la barra en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde la derecha. Por tanto, los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre un elemento de esfuerzo ubicado en la superficie de la barra tendrán las direcciones que se muestran en la figura.

Por claridad, el elemento de esfuerzo que se muestra en la figura 3.6a está agrandado en la figura 3.6b, donde se muestran tanto la deformación unitaria por cortante como los esfuerzos cortantes. Como se explicó antes en la sección 2.6, acostumbramos a dibujar elementos de esfuerzo en dos dimensiones, como en la figura 3.6b, pero siempre debemos recordar que los elementos de esfuerzo en realidad son objetos tridimensionales con un espesor perpendicular al plano de la figura.

Las magnitudes de los esfuerzos cortantes se pueden determinar a partir de las deformaciones unitarias mediante la relación esfuerzo-deformación unitaria para el material de la barra. Si el material es linealmente elástico, podemos utilizar la **ley de Hooke en cortante** (ecuación 1.14):

$$\tau = G\gamma \quad (3.6)$$

en donde G es el módulo de elasticidad en cortante y γ es la deformación unitaria por cortante en radianes. Al combinar esta ecuación con las ecuaciones para las deformaciones unitarias por cortante (ecuaciones 3.2 y 3.4), obtenemos

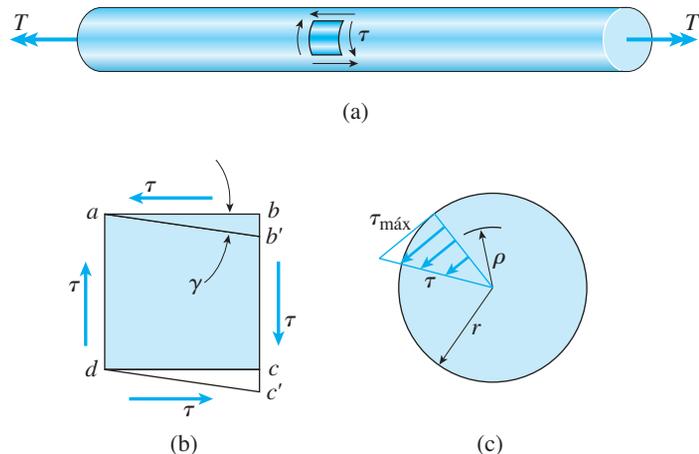


FIGURA 3.6 Esfuerzos cortantes en una barra circular en torsión.

$$\tau_{\text{máx}} = Gr\theta \quad \tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r} \tau_{\text{máx}} \quad (3.7a,b)$$

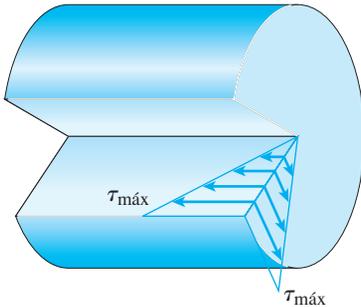


FIGURA 3.7 Esfuerzos cortantes longitudinal y transversal en una barra circular sometida a torsión.

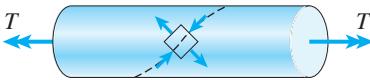


FIGURA 3.8 Esfuerzos de tensión y compresión que actúan sobre un elemento orientado a 45° con respecto al eje longitudinal.

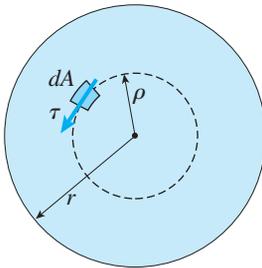


FIGURA 3.9 Determinación de la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal.

en donde $\tau_{\text{máx}}$ es el esfuerzo cortante en la superficie exterior de la barra (radio r), τ es el esfuerzo cortante en un punto interior (radio ρ) y θ es la razón de torsión. (En estas ecuaciones, θ tiene unidades de radianes por unidad de longitud).

Las ecuaciones (3.7a) y (3.7b) muestran que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia desde el centro de la barra, como se ilustra por el diagrama triangular en la figura 3.6c. Esta variación lineal del esfuerzo es una consecuencia de la ley de Hooke. Si la relación esfuerzo-deformación unitaria no es lineal, los esfuerzos no variarán linealmente y se necesitarán otros métodos de análisis.

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un plano transversal van acompañados de esfuerzos cortantes con la misma magnitud que las que actúan sobre planos longitudinales (figura 3.7). Esta conclusión se deriva del hecho que en planos mutuamente perpendiculares siempre existen esfuerzos cortantes iguales, como se explicó en la sección 1.6. Si el material de la barra es más débil en cortante en planos longitudinales que en planos transversales, como es común en la madera cuando el grano corre paralelo al eje de la barra, la primera grieta debida a la torsión aparecerá en la superficie en la dirección longitudinal.

El estado de cortante puro en la superficie de la barra (figura 3.6b) equivale a esfuerzos iguales de tensión y compresión que actúan en un elemento orientado a un ángulo de 45°, como se explica más adelante en la sección 3.5. Por tanto, un elemento rectangular con lados a 45° con respecto al eje de la barra estará sometido a esfuerzos de tensión y compresión, como se muestra en la figura 3.8. Si una barra en torsión está hecha de un material que es más débil en tensión que en cortante, la falla ocurrirá en tensión a lo largo de una hélice inclinada a 45° con respecto al eje, como usted lo puede demostrar torciendo una pieza de gis para pizarrón.

La fórmula de la torsión

El paso siguiente en nuestro análisis es determinar la relación entre los esfuerzos cortantes y el par de torsión T . Una vez determinada esta relación, podremos calcular los esfuerzos y las deformaciones unitarias en una barra debidas a cualquier conjunto de pares de torsión aplicados.

La distribución de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal se representa en las figuras 3.6c y 3.7. Debido a que dichos esfuerzos actúan continuamente alrededor de la sección transversal, tienen una resultante en la forma de un momento que es igual al par de torsión T que actúa sobre la barra. Para determinar esta resultante consideramos un elemento de área dA ubicado a una distancia radial ρ desde el eje de la barra (figura 3.9). La fuerza cortante que actúa sobre este elemento es igual a τdA , donde τ es el esfuerzo cortante a un radio ρ . El momento de esta fuerza con respecto al eje de la barra es igual a la fuerza multiplicada por su distancia desde el centro, o $\tau\rho dA$. Sustituyendo el valor del esfuerzo cortante τ dado por la ecuación (3.7b), podemos expresar este momento elemental como

$$dM = \tau\rho dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r} \rho^2 dA$$

El momento resultante (igual al par de torsión T) es la suma a lo largo de toda el área de la sección transversal de todos los momentos elementales:

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r} I_P \quad (3.8)$$

en donde

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad (3.9)$$

es el **momento polar de inercia** de la sección transversal circular.

Para un **círculo** con radio r y diámetro d , el momento polar de inercia es

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.10)$$

como se indica en el apéndice D, caso 9. Observe que los momentos de inercia tienen unidades de longitud a la cuarta potencia.*

Es posible obtener una expresión para el esfuerzo cortante máximo reacomodando la ecuación (3.8), como sigue:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tr}{I_P} \quad (3.11)$$

Esta ecuación, conocida como la **fórmula de la torsión**, muestra que el esfuerzo cortante máximo es proporcional al par de torsión aplicado T e inversamente proporcional al momento de inercia polar I_P .

Las **unidades** comunes empleadas en la fórmula de la torsión son las siguientes. En el sistema SI el par de torsión T suele expresarse en newton metro (N·m), el radio r en metros (m), el momento polar de inercia I_P en metros a la cuarta potencia (m⁴) y el esfuerzo cortante τ en pascales (Pa). Si se utilizan unidades inglesas, con frecuencia T se expresa en libra-pies (lb-ft) o libra-pulgadas (lb-in), r en pulgadas (in), I_P en pulgadas a la cuarta potencia (in⁴) y τ en libras por pulgada cuadrada (psi).

Sustituyendo $r = d/2$ e $I_P = \pi d^4/32$ en la fórmula de la torsión, obtenemos la ecuación siguiente para el esfuerzo máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (3.12)$$

Esta ecuación sólo se aplica a barras con *sección transversal circular sólida*, en tanto que la fórmula de la torsión (ecuación 3.11) se aplica tanto a barras sólidas como a tubos circulares, como se explica más adelante. La ecuación (3.12) muestra que el esfuerzo cortante es inversamente proporcional al cubo del diámetro. Por tanto, si se duplica el diámetro, el esfuerzo se reduce por un factor de ocho.

*Los momentos polares de inercia se ilustran en la sección 12.6 del capítulo 12.

El esfuerzo cortante a una distancia ρ desde el centro de la barra es

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\text{máx}} = \frac{T\rho}{I_P} \quad (3.13)$$

que se obtiene al combinar la ecuación (3.7b) con la fórmula de la torsión (ecuación 3.11). La ecuación (3.13) es una *fórmula generalizada de la torsión* y de nuevo observamos que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia radial desde el centro de la barra.

Ángulo de torsión

Ahora podemos relacionar el ángulo de torsión de una barra de material linealmente elástico con el par de torsión aplicado T . Al combinar la ecuación (3.7a) con la fórmula de la torsión obtenemos

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \quad (3.14)$$

en donde θ tiene unidades de radianes por unidad de longitud. Esta ecuación muestra que la razón de torsión θ es directamente proporcional al par de torsión T e inversamente proporcional al producto GI_P , conocido como **rigidez torsional** de la barra.

Para una barra en **torsión pura**, el ángulo de torsión ϕ total, igual a la razón de torsión multiplicada por la longitud de la barra (es decir, $\phi = \theta L$), es

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \quad (3.15)$$

en donde ϕ se mide en radianes. El uso de las ecuaciones anteriores tanto en análisis como en diseño se ilustra en los ejemplos 3.1 y 3.2.

La cantidad GI_P/L , llamada **rigidez torsional** de la barra, es el par de torsión necesario para producir una rotación de un ángulo unitario. La **flexibilidad torsional** es el recíproco de la rigidez, o L/GI_P , y se define como el ángulo de rotación producido por un par de torsión unitario. Por tanto, tenemos las expresiones siguientes:

$$k_T = \frac{GI_P}{L} \quad f_T = \frac{L}{GI_P} \quad (a,b)$$

Estas cantidades son análogas a la rigidez axial $k = EA/L$ y a la flexibilidad axial $f = L/EA$ de una barra en tensión o compresión (compare con las ecuaciones 2.4a y 2.4b). Las rigideces y las flexibilidades desempeñan papeles importantes en el análisis estructural.

La ecuación para el ángulo de torsión (ecuación 3.15) proporciona una forma conveniente para determinar el módulo de elasticidad en cortante G de un material. Al realizar una prueba de torsión en una barra circular podemos medir el ángulo de torsión ϕ producido por un par de torsión conocido T . Luego se puede calcular el valor de G con la ecuación (3.15).

Tubos circulares

Los tubos circulares resisten con más eficiencia las cargas torsionales que las barras sólidas. Como sabemos, los esfuerzos cortantes en una barra circular sólida son máximos en el borde exterior de la sección transversal y cero en el centro. Por tanto, la mayor parte del material en un eje sólido se somete a un esfuerzo significativamente menor que el esfuerzo cortante máximo. Además, los esfuerzos cerca del centro de la sección transversal tiene un brazo de momento menor ρ a tomar en cuenta en la determinación del par de torsión (consulte la figura 3.9 y la ecuación 3.8).

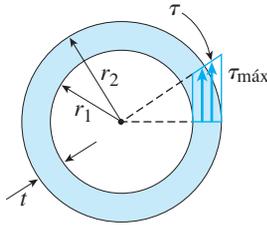


FIGURA 3.10 Tubo circular en torsión.

En contraste, en un tubo hueco común la mayor parte del material está cerca del borde exterior de la sección transversal donde los esfuerzos cortantes y los brazos de momento son mayores (figura 3.10). Por tanto si en una aplicación es importante reducir peso y ahorrar material, se aconseja emplear un tubo circular. Por ejemplo, los ejes de impulsión largos, los ejes de hélices y los ejes de generadores usualmente tienen secciones transversales huecas.

El análisis de la torsión de un tubo circular es casi idéntico al de una barra sólida. Se pueden emplear las mismas expresiones básicas para los esfuerzos cortantes (por ejemplo, las ecuaciones 3.7a y 3.7b). Por supuesto, la distancia radial ρ está limitada al intervalo r_1 a r_2 , donde r_1 es el radio interior y r_2 es el radio exterior de la barra (figura 3.10).

La relación entre el par de torsión T y el esfuerzo máximo está dada por la ecuación (3.8), pero los límites en la integral para el momento polar de inercia (ecuación 3.9) son $\rho = r_1$ y $\rho = r_2$. Por tanto, el momento polar de inercia del área de la sección transversal de un tubo es

$$I_P = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) \quad (3.16)$$

Las expresiones anteriores también se pueden escribir en las siguientes formas:

$$I_P = \frac{\pi r t}{2} (4r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4} (d^2 + t^2) \quad (3.17)$$

en donde r es el *radio promedio* del tubo, igual a $(r_1 + r_2)/2$; d es el *diámetro promedio*, igual a $(d_1 + d_2)/2$ y t es el *espesor de la pared* (figura 3.10), igual a $r_2 - r_1$. Por supuesto, las ecuaciones (3.16) y (3.17) dan los mismos resultados, pero en ocasiones la última es más conveniente.

Si el tubo es relativamente delgado, de tal modo que el espesor de la pared t es pequeño en comparación con el radio promedio r , podemos ignorar los términos t^2 en la ecuación (3.17). Con esta simplificación obtenemos las *fórmulas aproximadas* siguientes para el momento polar de inercia:

$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \quad (3.18)$$

Estas expresiones se dan en el caso 22 del apéndice D.

Recordatorios: en las ecuaciones 3.17 y 3.18, las cantidades r y d son el radio y el diámetro promedios, no los máximos. Además, las ecuaciones 3.16 y 3.17 son exactas; la ecuación 3.18 es aproximada.

La fórmula de la torsión (ecuación 3.11) se puede emplear para un tubo circular de material linealmente elástico siempre que I_p se evalúe de acuerdo con la ecuaciones (3.16), (3.17) o, si es apropiado, con la ecuación (3.18). Los mismos comentarios se aplican a la ecuación general para el esfuerzo cortante (ecuación 3.13), a las ecuaciones para la razón de torsión y el ángulo de torsión (ecuaciones 3.14 y 3.15) y a las ecuaciones para la rigidez y la flexibilidad (ecuaciones a y b).

La distribución del esfuerzo cortante en un tubo se representa en la figura 3.10, donde se observa que el esfuerzo promedio en un tubo delgado es casi tan grande como el esfuerzo máximo. Esto significa que en una barra hueca se utiliza el material de manera más eficiente que en una barra sólida, como se explicó antes y se demuestra más adelante en los ejemplos 3.2 y 3.3.

Al diseñar un tubo circular para transmitir un par de torsión, debemos estar seguros de que el espesor t es suficientemente grande para evitar el arrugamiento o pandeo de la pared del tubo. Por ejemplo, se puede especificar un valor máximo de la razón entre el radio y el espesor, como $(r_2/t)_{\text{máx}} = 12$. Otras consideraciones incluyen los factores ambientales y de durabilidad, que también imponen requerimientos para el espesor mínimo de la pared del tubo. Estos temas se estudian en cursos y libros de texto sobre diseño mecánico.

Limitaciones

Las ecuaciones deducidas en esta sección están limitadas a barras con sección transversal circular (sólidas o huecas) que se comportan de una manera linealmente elástica. En otras palabras, las cargas deben ser tales que los esfuerzos no sobrepasen el límite de proporcionalidad del material. Además, las ecuaciones para esfuerzos son válidas sólo en partes de las barras alejadas de concentraciones de esfuerzos (como agujeros y otros cambios abruptos de la forma) y alejadas de las secciones transversales donde se aplican las cargas. (Las concentraciones de esfuerzos en torsión se analizan más adelante en la sección 3.11.)

Por último, es importante hacer énfasis en que las ecuaciones para la torsión de barras y tubos circulares no se pueden utilizar para barras que tengan otras formas. Las barras no circulares, como las rectangulares y las que tienen secciones transversales en forma de “I,” se comportan de manera muy diferente a las barras circulares. Por ejemplo, sus secciones transversales *no* permanecen planas y sus esfuerzos máximos *no* se ubican en las distancias más alejadas desde los puntos medios de las secciones transversales. Entonces, estas barras requieren métodos de análisis más avanzados, como los que se presentan en libros sobre teoría de elasticidad y mecánica de materiales avanzada.*

*La teoría de la torsión para barras circulares se originó con el trabajo del famoso científico francés C. A. de Coulomb (1736-1806); se atribuyen desarrollos adicionales a Thomas Young y A. Duleau (referencia 3.1). La teoría general de la torsión (para barras con cualquier forma) se debe al más famoso investigador de la elasticidad de todos los tiempos, Barré de Saint-Venant (1797-1886); consulte la referencia 2.10.

Ejemplo 3.1

Una barra sólida de acero con sección transversal circular (figura 3.11) tiene un diámetro $d = 1.5$ in, longitud $L = 54$ in y módulo de elasticidad en cortante $G = 11.5 \times 10^6$ psi. La barra está sometida a pares de torsión T que actúan en sus extremos.

(a) Si los pares de torsión tienen una magnitud $T = 250$ lb-ft, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en la barra? ¿Cuál es el ángulo de torsión entre los extremos?

(b) Si el esfuerzo cortante permisible es 6000 psi y el ángulo de torsión permisible es 2.5° , ¿cuál es el par de torsión máximo permisible?

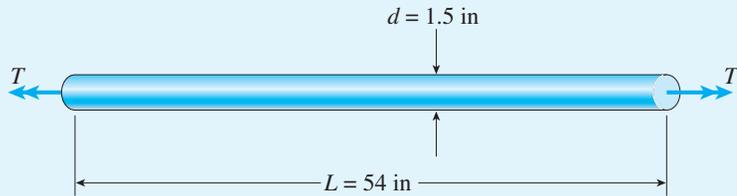


FIGURA 3.11 Ejemplo 3.1. Barra en torsión pura.

Solución

(a) *Esfuerzo cortante máximo y ángulo de torsión.* Dado que la barra tiene una sección transversal circular sólida, podemos determinar el esfuerzo cortante con la ecuación (3.12), como sigue:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in/ft})}{\pi(1.5 \text{ in})^3} = 4530 \text{ psi} \quad \leftarrow$$

De una manera similar, el ángulo de torsión se obtiene con la ecuación (3.15) con el momento polar de inercia dado por la ecuación (3.10):

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(1.5 \text{ in})^4}{32} = 0.4970 \text{ in}^4$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} = \frac{(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in/ft})(54 \text{ in})}{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in}^4)} = 0.02834 \text{ rad} = 1.62^\circ \quad \leftarrow$$

Por tanto, el análisis de la barra ante la acción del par de torsión dado está completo.

(b) *Par de torsión máximo.* El par de torsión máximo se determina mediante el esfuerzo cortante permisible o bien por el ángulo de torsión permisible. Iniciando con el esfuerzo cortante, reacomodamos la ecuación (3.12) y el cálculo es el siguiente:

$$T_1 = \frac{\pi d^3 \tau_{\text{perm}}}{16} = \frac{\pi}{16} (1.5 \text{ in})^3 (6000 \text{ psi}) = 3980 \text{ lb-in} = 331 \text{ lb-ft}$$

Cualquier par de torsión mayor que este valor resultará en un esfuerzo cortante que sobrepasará el esfuerzo permisible de 6000 psi.

Utilizando la ecuación (3.15) reacomodada, ahora podemos calcular el par de torsión con base en el ángulo de torsión:



El eje impulsor de un barco es una parte clave del sistema de propulsión

$$T_2 = \frac{GJ_P \phi_{\text{perm}}}{L} = \frac{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in}^4)(2.5^\circ)(\pi \text{ rad}/180^\circ)}{54 \text{ in}}$$

$$= 4618 \text{ lb-in} = 385 \text{ lb-ft}$$

Cualquier par de torsión mayor que T_2 resultará en un ángulo de torsión mayor que el permisible.

El par de torsión máximo es el menor de T_1 y T_2 :

$$T_{\text{máx}} = 331 \text{ lb-ft}$$

En este ejemplo el esfuerzo cortante permisible proporciona la condición limitante.

Ejemplo 3.2



Cigüeñal complejo

Se va a fabricar un eje de acero como una barra circular sólida o bien como un tubo circular (figura 3.12). Se requiere que el eje transmita un par de torsión de 1200 N·m sin que se exceda un esfuerzo cortante permisible de 40 MPa ni una razón de torsión permisible de $0.75^\circ/\text{m}$. (El módulo de elasticidad en cortante del acero es 78 GPa).

- Determine el diámetro necesario d_0 del eje sólido.
- Determine el diámetro exterior necesario d_2 del eje hueco si su espesor t se especifica igual a un décimo del diámetro exterior.
- Determine la razón de los diámetros (es decir, la razón d_2/d_0) y la razón de los pesos de los ejes hueco y sólido.

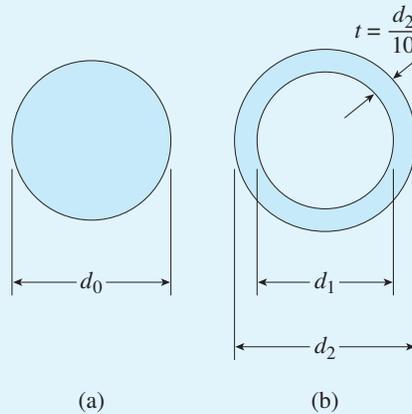


FIGURA 3.12 Ejemplo 3.2. Torsión de un eje de acero.

Solución

(a) *Eje sólido.* El diámetro requerido d_0 se determina a partir del esfuerzo cortante o bien de la razón de torsión permisible. En el caso del esfuerzo cortante permisible reacomodamos la ecuación (3.12) y obtenemos

$$d_0^3 = \frac{16T}{\pi \tau_{\text{perm}}} = \frac{16(1200 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(40 \text{ MPa})} = 152.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

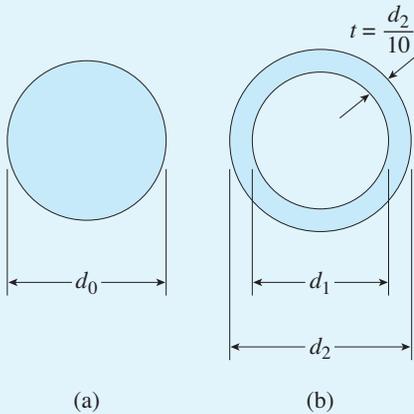


FIGURA 3.12 (Repetida.)

de donde obtenemos

$$d_0 = 0.0535 \text{ m} = 53.5 \text{ mm}$$

En el caso de la razón de torsión permisible, empezamos determinando el momento polar de inercia (consulte la ecuación 3.14):

$$I_P = \frac{T}{G\theta_{\text{perm}}} = \frac{1200 \text{ N}\cdot\text{m}}{(78 \text{ GPa})(0.75^\circ/\text{m})(\pi \text{ rad}/180^\circ)} = 1175 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Como el momento polar de inercia es igual a $\pi d^2/32$, el diámetro necesario es

$$d_0^4 = \frac{32I_P}{\pi} = \frac{32(1175 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}{\pi} = 11.97 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

o

$$d_0 = 0.0588 \text{ m} = 58.8 \text{ mm}$$

Al comparar los dos valores de d_0 , observamos que la razón de torsión gobierna el diseño y el diámetro necesario del eje sólido es

$$d_0 = 58.8 \text{ mm}$$

En un diseño práctico, seleccionaríamos un diámetro ligeramente mayor que el valor calculado de d_0 ; por ejemplo, 60 mm.

(b) *Eje hueco.* De nuevo, el diámetro requerido se basa en el esfuerzo cortante permisible o bien en la razón de torsión permisible. Comenzamos observando que el diámetro exterior de la barra es d_2 y el diámetro interior es

$$d_1 = d_2 - 2t = d_2 - 2(0.1d_2) = 0.8d_2$$

Por tanto, el momento polar de inercia (ecuación 3.16) es

$$I_P = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} [d_2^4 - (0.8d_2)^4] = \frac{\pi}{32} (0.5904d_2^4) = 0.05796d_2^4$$

En el caso del esfuerzo cortante permisible, utilizamos la fórmula de la torsión (ecuación 3.11) como sigue:

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{T(d_2/2)}{0.05796d_2^4} = \frac{T}{0.1159d_2^3}$$

Reacomodando términos, obtenemos

$$d_2^3 = \frac{T}{0.1159\tau_{\text{perm}}} = \frac{1200 \text{ N}\cdot\text{m}}{0.1159(40 \text{ MPa})} = 258.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Resolviendo para d_2 da

$$d_2 = 0.0637 \text{ m} = 63.7 \text{ mm}$$

que es el diámetro exterior necesario con base en el esfuerzo cortante.

En el caso de la razón de torsión permisible, utilizamos la ecuación (3.14) reemplazando θ con θ_{perm} e I_P con la expresión que obtuvimos antes; por tanto,

$$\theta_{perm} = \frac{T}{G(0.05796d_2^4)}$$

de donde

$$\begin{aligned} d_2^4 &= \frac{T}{0.05796G\theta_{perm}} \\ &= \frac{1200 \text{ N}\cdot\text{m}}{0.05796(78 \text{ GPa})(0.75^\circ/\text{m})(\pi \text{ rad}/180^\circ)} = 20.28 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Resolviendo para d_2 obtenemos

$$d_2 = 0.0671 \text{ m} = 67.1 \text{ mm}$$

que es el diámetro necesario con base en la razón de torsión.

Al comparar los dos valores de d_2 , observamos que la razón de torsión gobierna el diseño y el diámetro exterior necesario del eje hueco es

$$d_2 = 67.1 \text{ mm} \quad \leftarrow$$

El diámetro interior d_1 es igual a $0.8d_2$, o 53.7 mm. (Como valores prácticos, podríamos seleccionar $d_2 = 70 \text{ mm}$ y $d_1 = 0.8d_2 = 56 \text{ mm}$.)

(c) *Razones de diámetros y pesos.* La razón entre diámetro exterior del eje hueco y el diámetro del eje sólido (empleando los valores calculados) es

$$\frac{d_2}{d_0} = \frac{67.1 \text{ mm}}{58.8 \text{ mm}} = 1.14 \quad \leftarrow$$

Como los pesos de los ejes son proporcionales a las áreas de sus secciones transversales, podemos expresar la razón entre peso del eje hueco y el peso del eje sólido como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{W_{\text{hueco}}}{W_{\text{sólido}}} &= \frac{A_{\text{hueco}}}{A_{\text{sólido}}} = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)/4}{\pi d_0^2/4} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_0^2} \\ &= \frac{(67.1 \text{ mm})^2 - (53.7 \text{ mm})^2}{(58.8 \text{ mm})^2} = 0.47 \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Estos resultados muestran que para el eje hueco sólo se requiere 47 por ciento del material necesario para el eje sólido, en tanto que el diámetro exterior sólo es 14 por ciento mayor.

Nota: este ejemplo muestra cómo determinar los tamaños necesarios de barras sólidas y tubos circulares cuando se conocen los esfuerzos permisibles y las razones de torsión permisibles. También ilustra el hecho que los tubos circulares utilizan el material de manera más eficiente que las barras sólidas.

Ejemplo 3.3

Un eje hueco y uno sólido construidos con el mismo material tienen la misma longitud y radios exteriores R (figura 3.13). El radio interior del eje hueco es $0.6R$.

(a) Suponiendo que los dos ejes se someten al mismo par de torsión, compare sus esfuerzos cortantes, ángulos de torsión y pesos.

(b) Determine las razones entre resistencia y peso de los ejes.

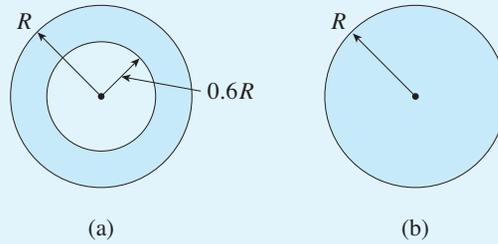


FIGURA 3.13 Ejemplo 3.3. Comparación de un eje hueco y uno sólido.

Solución

(a) *Comparación de los esfuerzos cortantes.* Los esfuerzos cortantes máximos, dados por la fórmula de la torsión (ecuación 3.11), son proporcionales a $1/I_p$ ya que los pares de torsión y los radios son los mismos. Para el eje hueco, obtenemos

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi(0.6R)^4}{2} = 0.4352\pi R^4$$

y para el eje sólido,

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = 0.5\pi R^4$$

Por tanto, la razón β_1 entre el esfuerzo cortante máximo en el eje hueco y en el eje sólido es

$$\beta_1 = \frac{\tau_H}{\tau_S} = \frac{0.5\pi R^4}{0.4352\pi R^4} = 1.15 \quad \leftarrow$$

donde los subíndices H y S se refieren al eje hueco y al sólido, respectivamente.

Comparación de los ángulos de torsión. Los ángulos de torsión (ecuación 3.15) también son proporcionales a $1/I_p$, debido a que los pares de torsión T , las longitudes L y los módulos de elasticidad G son los mismos para los dos ejes. Por tanto, su razón es la misma que para los esfuerzos cortantes:

$$\beta_2 = \frac{\phi_H}{\phi_S} = \frac{0.5\pi R^4}{0.4352\pi R^4} = 1.15 \quad \leftarrow$$

Comparación de los pesos. Los pesos de los ejes son proporcionales a las áreas de sus secciones transversales, en consecuencia, el peso del eje sólido es proporcional a πR^2 y el peso del eje hueco es proporcional a

$$\pi R^2 - \pi(0.6R)^2 = 0.64\pi R^2$$

Por tanto, la razón entre peso del eje hueco y el peso del eje sólido es

$$\beta_3 = \frac{W_H}{W_S} = \frac{0.64\pi R^2}{\pi R^2} = 0.64$$

De las razones anteriores observamos de nuevo la ventaja inherente de los ejes huecos. En este ejemplo el eje hueco tiene un esfuerzo 15 por ciento mayor y un ángulo de rotación 15 por ciento mayor que el eje sólido pero 36 por ciento menos peso.

(b) *Razones entre resistencia y peso.* Algunas veces la eficiencia relativa de una estructura se mide por su razón entre *resistencia* y *peso*, que para una barra en torsión se define como el par de torsión permisible dividido entre el peso. El par de torsión permisible para el eje hueco de la figura 3.13a (de la fórmula de la torsión) es

$$T_H = \frac{\tau_{\text{máx}} I_P}{R} = \frac{\tau_{\text{máx}}(0.4352\pi R^4)}{R} = 0.4352\pi R^3 \tau_{\text{máx}}$$

y para el eje sólido es

$$T_S = \frac{\tau_{\text{máx}} I_P}{R} = \frac{\tau_{\text{máx}}(0.5\pi R^4)}{R} = 0.5\pi R^3 \tau_{\text{máx}}$$

Los pesos de los ejes son iguales a las áreas de sus secciones transversales multiplicadas por su longitud L y por el peso específico γ del material:

$$W_H = 0.64\pi R^2 L \gamma \quad W_S = \pi R^2 L \gamma$$

Entonces, las razones entre resistencia y peso, S_H y S_S para las barras hueca y sólida, respectivamente, son

$$S_H = \frac{T_H}{W_H} = 0.68 \frac{\tau_{\text{máx}} R}{\gamma L} \quad S_S = \frac{T_S}{W_S} = 0.5 \frac{\tau_{\text{máx}} R}{\gamma L}$$

En este ejemplo la razón entre resistencia y peso del eje hueco es 36 por ciento mayor que la razón entre resistencia y peso del eje sólido, demostrando una vez más la eficiencia relativa de los ejes huecos. Para un eje más esbelto, el porcentaje aumentará; para un eje más robusto, disminuirá.

3.4 TORSIÓN NO UNIFORME

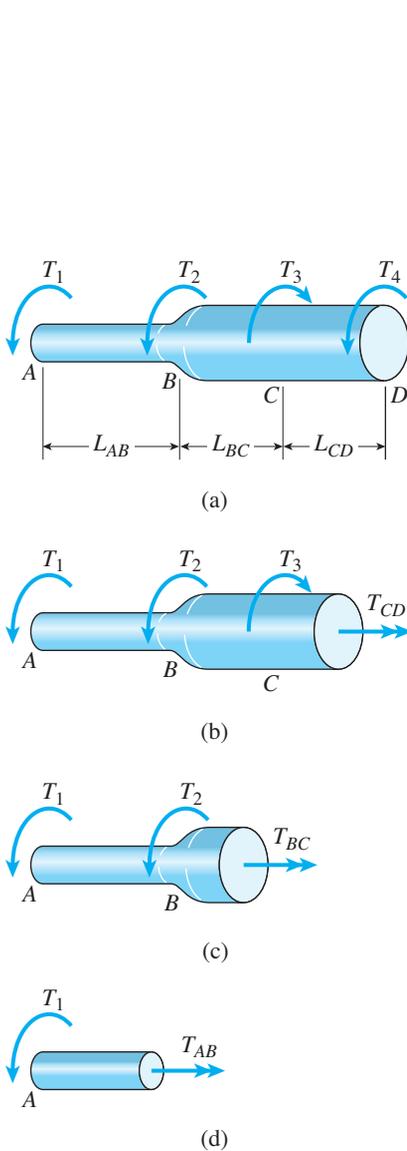


FIGURA 3.14 Barra en torsión no uniforme (caso 1).

Como se explicó en la sección 3.2, *torsión pura* se refiere a la torsión de una barra prismática sometida a pares de torsión que actúan sólo en sus extremos. **Torsión no uniforme** difiere de la torsión pura en que no se requiere que la barra sea prismática y los pares de torsión aplicados pueden actuar en cualquier parte a lo largo del eje de la barra. Las barras en torsión no uniforme se pueden analizar aplicando las fórmulas de torsión pura a segmentos finitos de la barra y luego se suman los resultados, o se aplican las fórmulas a elementos diferenciales de la barra y luego se integran.

Para ilustrar estos procedimientos, consideraremos tres casos de torsión no uniforme. Otros casos se pueden manejar mediante técnicas similares a las que aquí se describirán.

Caso 1. Barra constituida de segmentos prismáticos con par de torsión constante en cada segmento (figura 3.14). La barra que se muestra en la parte (a) de la figura tiene dos diámetros diferentes y está sometida a pares de torsión que actúan en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. En consecuencia, dividimos la barra en segmentos, de tal manera que cada uno sea prismático y esté sometido a un par de torsión constante. En este ejemplo hay tres segmentos, *AB*, *BC* y *CD*. Cada segmento está en torsión pura, y por tanto, se pueden aplicar todas las fórmulas deducidas en la sección anterior a cada segmento por separado.

El primer paso en el análisis es determinar la magnitud y el sentido del par de torsión interno en cada segmento. Es usual que los pares de torsión se determinen por inspección, pero si es necesario se pueden encontrar al cortar secciones a través de la barra, trazar diagramas de cuerpo libre y resolver ecuaciones de equilibrio. Este proceso se ilustra en las partes (b), (c) y (d) de la figura. El primer corte se hace en cualquier parte del segmento *CD*, con lo cual se expone el par de torsión interno T_{CD} . Del diagrama de cuerpo libre (figura 3.14b), observamos que T_{CD} es igual a $-T_1 - T_2 + T_3$. Del siguiente diagrama vemos que T_{BC} es igual a $-T_1 - T_2$ y del último tenemos que T_{AB} es igual a $-T_1$. Por tanto,

$$T_{CD} = -T_1 - T_2 + T_3 \quad T_{BC} = -T_1 - T_2 \quad T_{AB} = -T_1 \quad (a,b,c)$$

Cada uno de estos pares de torsión es constante en toda la longitud de su segmento.

Al determinar los esfuerzos cortantes en cada segmento, sólo necesitamos las magnitudes de estos pares de torsión internos, ya que las direcciones de los esfuerzos no son de interés. Sin embargo, al obtener el ángulo de torsión para toda la barra, necesitamos conocer la dirección o sentido de la torsión en cada segmento a fin de combinar los ángulos de torsión de manera correcta. Por tanto, es necesario establecer una *convención de signos* para los pares de torsión internos. Una regla conveniente en muchos casos es la siguiente: *un par de torsión es positivo cuando su vector apunta en dirección contraria a la sección cortada y negativo cuando su vector apunta hacia la sección*. De esta manera, todos los pares de torsión internos que se muestran en las figuras 3.14b, c y d están representados con sus sentidos positivos. Si el par de torsión calculado (con la ecuación a, b o c) resulta tener un signo positivo, significa que actúa en el sentido supuesto; si el par de torsión tiene un signo negativo, actúa en el sentido opuesto.

El esfuerzo cortante máximo en cada segmento de la barra se obtiene fácilmente a partir de la fórmula de la torsión (ecuación 3.11) al emplear las

dimensiones apropiadas y el par de torsión adecuado. Por ejemplo, el esfuerzo máximo en el segmento BC (figura 3.14) se determina al utilizar el diámetro de ese segmento y el par de torsión T_{BC} que se calcula mediante la ecuación (b). El esfuerzo máximo en toda la barra es el esfuerzo mayor de entre los esfuerzos calculados para cada uno de los tres segmentos.

El ángulo de torsión para cada segmento se determina con la ecuación (3.15), al emplear de nuevo las dimensiones adecuadas y el par de torsión apropiado. Luego se obtiene el ángulo de torsión total de un extremo de la barra con respecto al otro mediante la siguiente suma algebraica:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n \quad (3.19)$$

donde ϕ_1 es el ángulo de torsión para el segmento 1, ϕ_2 es el ángulo de torsión para el segmento 2, etcétera, y n es el número total de segmentos. Puesto que cada ángulo de torsión se determina con la ecuación (3.15), podemos escribir la fórmula general

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i (I_p)_i} \quad (3.20)$$

en donde el subíndice i es un índice de numeración para los diversos segmentos. Para el segmento i de la barra, T_i es el par de torsión interno (encontrado del equilibrio como se ilustra en la figura 3.14), L_i es la longitud, G_i es el módulo de cortante e $(I_p)_i$ es el momento polar de inercia. Algunos de los pares de torsión (y los ángulos de torsión correspondientes) pueden ser positivos y algunos negativos. Al sumar de *manera algebraica* los ángulos de torsión de todos los segmentos se obtiene el ángulo de torsión ϕ total entre los extremos de la barra. El proceso se ilustra más adelante en el ejemplo 3.4.

Caso 2. Barra con secciones transversales que varían continuamente y par de torsión constante (figura 3.15). Cuando el par de torsión es constante, el esfuerzo cortante máximo en una barra sólida siempre ocurre en la sección transversal que tiene el diámetro menor, como se muestra en la figura (3.12). Además, es usual que esta observación sea válida para barras tubulares; si este es el caso, sólo necesitamos investigar la sección transversal más pequeña a fin de calcular el esfuerzo cortante máximo. De lo contrario, puede ser necesario evaluar los esfuerzos en más de una ubicación con objeto de determinar el esfuerzo máximo.

Para encontrar el ángulo de torsión, consideramos un elemento con longitud dx a una distancia x desde un extremo de la barra (figura 3.15). El ángulo diferencial de rotación $d\phi$ para este elemento es

$$d\phi = \frac{T dx}{G I_p(x)} \quad (d)$$

en donde $I_p(x)$ es el momento polar de inercia de la sección transversal a una distancia x desde el extremo. El ángulo de torsión para toda la barra es la suma de los ángulos diferenciales de rotación:

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T dx}{G I_p(x)} \quad (3.21)$$

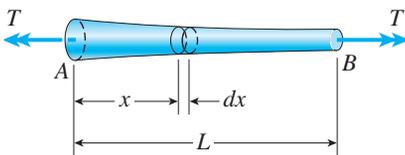


FIGURA 3.15 Barra en torsión no uniforme (caso 2).

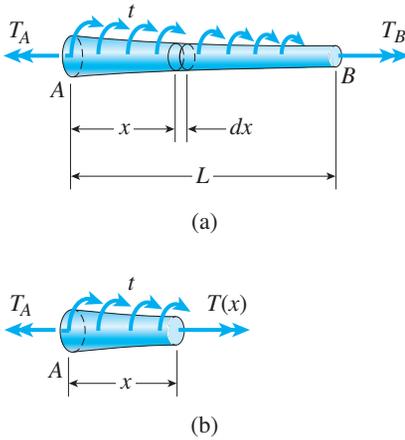


FIGURA 3.16 Barra en torsión no uniforme (caso 3).

Si la expresión para el momento polar de inercia $I_p(x)$ no es demasiado compleja, esta integral se puede evaluar de manera analítica, como en el ejemplo 3.5. En otros casos, se debe evaluar de manera numérica.

Caso 3. Barra con secciones transversales continuamente variables y par de torsión continuamente variable (figura 3.16). La barra que se muestra en la parte (a) de la figura está sometida a un par de torsión distribuido con intensidad t por unidad de distancia a lo largo del eje de la barra. Como resultado, el par de torsión interno $T(x)$ varía de manera continua a lo largo del eje (figura 3.16b). El par de torsión interno se puede evaluar con ayuda del diagrama de cuerpo libre y una ecuación de equilibrio. Como en el caso 2, el momento polar de inercia $I_p(x)$ se puede evaluar con las dimensiones de la sección transversal de la barra.

Conociendo el par de torsión y el momento polar de inercia como funciones de x , se puede emplear la fórmula de la torsión para determinar cómo varía el esfuerzo cortante a lo largo del eje de la barra. Luego se puede identificar la sección transversal de esfuerzo cortante máximo y determinar el esfuerzo cortante máximo.

El ángulo de torsión de la barra de la figura 3.16a se puede encontrar de la misma manera que se describió para el caso 2. La única diferencia es que el par de torsión, al igual que el momento polar de inercia, también varía a lo largo del eje. En consecuencia, la ecuación para el ángulo de torsión se convierte en

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{GI_p(x)} \tag{3.22}$$

Esta integral se puede evaluar de forma analítica en algunos casos, pero es usual que se deba evaluar de manera numérica.

Limitaciones

Los análisis descritos en esta sección son válidos para barras hechas de materiales linealmente elásticos con secciones transversales circulares (sólidas o huecas). Además, los esfuerzos determinados con la fórmula de la torsión son válidos en regiones de la barra alejadas de concentraciones de esfuerzos, que son esfuerzos altamente localizados que ocurren cuando el diámetro cambia abruptamente y cuando se aplican pares de torsión concentrados (consulte la sección 3.11). Sin embargo, las concentraciones de esfuerzos tienen relativamente poco efecto sobre el ángulo de torsión y, por tanto, en general las ecuaciones para ϕ son válidas.

Por último, debemos tener en cuenta que la fórmula de la torsión y las fórmulas para los ángulos de torsión se dedujeron para barras prismáticas. Podemos aplicarlas con seguridad a barras con secciones transversales variables sólo cuando los cambios de diámetro sean pequeños y graduales. Como regla básica, las fórmulas dadas aquí son satisfactorias siempre que el ángulo de ahusamiento (el ángulo entre los lados de la barra) sea menor que 10° .

Ejemplo 3.4

Un eje sólido de acero $ABCDE$ (figura 3.17) con diámetro $d = 30$ mm gira libremente sobre cojinetes en los puntos A y E . El eje es impulsado por un engrane en C que aplica un par de torsión $T_2 = 450$ N·m en el sentido que se muestra en la figura. Los engranes B y D son impulsados por el eje y tienen pares de torsión resistentes $T_1 = 275$ N·m y $T_3 = 175$ N·m, respectivamente, que actúan en el sentido opuesto al par de torsión T_2 . Los segmentos BC y CD tienen longitudes $L_{BC} = 500$ mm y $L_{CD} = 400$ mm, respectivamente, y el módulo de cortante es $G = 80$ GPa.

Determine el esfuerzo cortante máximo en cada parte del eje y el ángulo de torsión entre los engranes B y D .

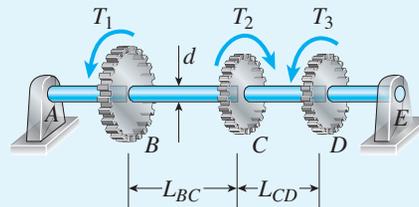


FIGURA 3.17 Ejemplo 3.4. Eje de acero en torsión.

Solución

Cada segmento de la barra es prismático y está sometido a un par de torsión constante (caso 1). Por tanto, el primer paso en el análisis es determinar los pares de torsión que actúan en los segmentos, después de lo cual podemos determinar los esfuerzos cortantes y los ángulos de torsión.

Pares de torsión que actúan en los segmentos. Los pares de torsión en los segmentos extremos (AB y DE) son cero puesto que no estamos tomando en cuenta ninguna fricción en los cojinetes en los soportes. Por tanto, los segmentos extremos no tienen esfuerzos ni ángulos de torsión.

El par de torsión T_{CD} en el segmento CD se determina cortando la sección a través del segmento y elaborando un diagrama de cuerpo libre, como en la figura 3.18a. El par de torsión se supone positivo y, por tanto, su vector apunta alejándose de la sección cortada. Del equilibrio del cuerpo libre, obtenemos

$$T_{CD} = T_2 - T_1 = 450 \text{ N}\cdot\text{m} - 275 \text{ N}\cdot\text{m} = 175 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El signo positivo en el resultado significa que T_{CD} actúa en el sentido positivo supuesto.

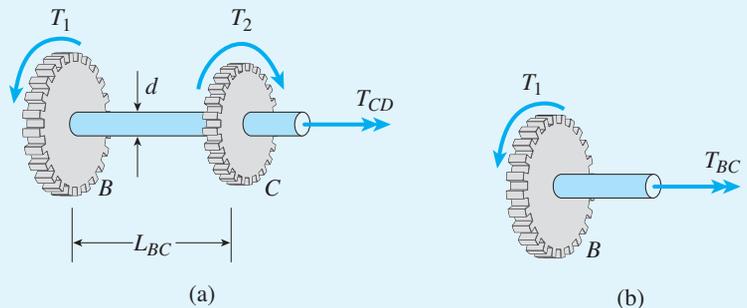


FIGURA 3.18 Diagramas de cuerpo libre del ejemplo 3.4.

El par de torsión en el segmento BC se determina de una manera similar, utilizando el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.18b:

$$T_{BC} = -T_1 = -275 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Observe que este par de torsión tiene un signo negativo, lo que significa que su sentido es opuesto al que se muestra en la figura.

Esfuerzos cortantes. Los esfuerzos cortantes máximos en los segmentos BC y CD se encuentran con la forma modificada de la fórmula de la torsión (ecuación 3.12); por tanto

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16(275 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(30 \text{ mm})^3} = 51.9 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

$$\tau_{CD} = \frac{16T_{CD}}{\pi d^3} = \frac{16(175 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(30 \text{ mm})^3} = 33.0 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

Como las direcciones de los esfuerzos cortantes no son de interés en este ejemplo, en los cálculos anteriores sólo se emplean los valores absolutos de los pares de torsión

Ángulos de torsión. El ángulo de torsión ϕ_{BD} entre los engranes B y D es la suma algebraica de los ángulos de torsión para los segmentos intermedios de la barra, según la ecuación (3.19); entonces,

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD}$$

Al calcular los ángulos de torsión individuales, necesitamos el momento de inercia de la sección transversal:

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(30 \text{ mm})^4}{32} = 79,520 \text{ mm}^4$$

Ahora podemos determinar los ángulos de torsión como se muestra:

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} = \frac{(-275 \text{ N}\cdot\text{m})(500 \text{ mm})}{(80 \text{ GPa})(79,520 \text{ mm}^4)} = -0.0216 \text{ rad}$$

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GI_P} = \frac{(175 \text{ N}\cdot\text{m})(400 \text{ mm})}{(80 \text{ GPa})(79,520 \text{ mm}^4)} = 0.0110 \text{ rad}$$

Observe que en este ejemplo los ángulos de torsión tienen sentidos opuestos. Sumando algebraicamente, obtenemos el ángulo de torsión total:

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD} = -0.0216 + 0.0110 = -0.0106 \text{ rad} = -0.61^\circ \quad \leftarrow$$

El signo negativo significa que el engrane D gira en el sentido de las manecillas del reloj (cuando se ve desde el extremo derecho del eje) con respecto al engrane B . Sin embargo, para la mayor parte de los fines sólo se necesita el valor absoluto del ángulo de torsión y, por tanto, es suficiente decir que el ángulo de torsión entre los engranes B y D es 0.61° . El ángulo de torsión entre los dos extremos de un eje en ocasiones se llama *enrollado*.

Notas: los procedimientos ilustrados en este ejemplo se pueden utilizar para ejes con segmentos de diferentes diámetros o de materiales distintos, siempre que las dimensiones y las propiedades permanezcan constantes en cada segmento.

En este ejemplo y en los problemas al final del capítulo sólo se consideran los efectos de la torsión. Los efectos de la flexión se consideran más adelante, al inicio del capítulo 4.

Ejemplo 3.5

Una barra ahusada AB con sección transversal circular se somete a pares de torsión T aplicados en los extremos (figura 3.19). El diámetro de la barra varía linealmente de d_A en el extremo izquierdo a d_B en el extremo derecho, suponiendo que d_B es mayor que d_A .

- Determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.
- Deduzca una fórmula para el ángulo de torsión de la barra.

Solución

(a) *Esfuerzos cortantes.* Como el esfuerzo cortante máximo en cualquier sección transversal de una barra sólida está dado por la fórmula modificada de la torsión (ecuación 3.12), sabemos de inmediato que el esfuerzo cortante máximo ocurre en la sección transversal que tenga el diámetro menor, es decir, en el extremo A (consulte la figura 3.19):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d_A^3} \quad \leftarrow$$

(b) *Ángulo de torsión.* Como el par de torsión es constante y el momento polar de inercia varía continuamente con la distancia x desde el extremo A (caso 2), utilizaremos la ecuación (3.21) para determinar el ángulo de torsión. Iniciamos formulando una expresión para el diámetro d a una distancia x desde el extremo A :

$$d = d_A + \frac{d_B - d_A}{L} x \quad (3.23)$$

en donde L es la longitud de la barra. Ahora podemos escribir una expresión para el momento polar de inercia:

$$I_P(x) = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} \left(d_A + \frac{d_B - d_A}{L} x \right)^4 \quad (3.24)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (3.21), obtenemos una fórmula para el ángulo de torsión:

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GI_P(x)} = \frac{32T}{\pi G} \int_0^L \frac{dx}{\left(d_A + \frac{d_B - d_A}{L} x \right)^4} \quad (3.25)$$

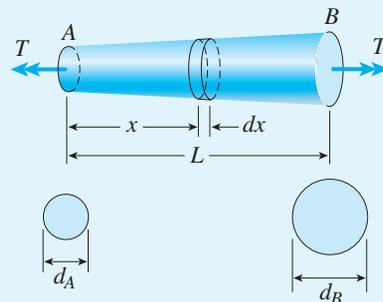


FIGURA 3.19 Ejemplo 3.5. Barra ahusada en torsión.

Para evaluar la integral en esta ecuación, observamos que es de la forma

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^4}$$

en donde

$$a = d_A \quad b = \frac{d_B - d_A}{L} \quad (\text{e,f})$$

Con ayuda de una tabla de integrales (consulte el apéndice C), obtenemos

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^4} = -\frac{1}{3b(a + bx)^3}$$

Esta integral se evalúa sustituyendo x con los límites 0 y L y con los valores de a y b de las expresiones en las ecuaciones (e) y (f). Por tanto, la integral en la ecuación (3.25) es igual a

$$\frac{L}{3(d_B - d_A)} \left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3} \right) \quad (\text{g})$$

Al reemplazar la integral en la ecuación (3.25) con esta expresión, obtenemos

$$\phi = \frac{32TL}{3\pi G(d_B - d_A)} \left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3} \right) \quad (3.26) \quad \leftarrow$$

que es la ecuación deseada para el ángulo de torsión de la barra ahusada.

Una forma conveniente de escribir la ecuación anterior es

$$\phi = \frac{TL}{G(I_P)_A} \left(\frac{\beta^2 + \beta + 1}{3\beta^3} \right) \quad (3.27)$$

en donde

$$\beta = \frac{d_B}{d_A} \quad (I_P)_A = \frac{\pi d_A^4}{32} \quad (3.28)$$

La cantidad β es la razón de los diámetros extremos e $(I_P)_A$ es el momento polar de inercia en el extremo A .

En el caso especial de una barra prismática, tenemos $\beta = 1$ y la ecuación (3.27) da $\phi = TL/G(I_P)_A$, como se esperaba. Para valores de β mayores que 1, el ángulo de rotación disminuye debido a que el diámetro mayor en el extremo B produce un aumento en la rigidez torsional (en comparación con una barra prismática).

3.5 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS EN CORTANTE PURO

Cuando una barra circular, sea sólida o hueca, se somete a torsión, actúan esfuerzos cortantes sobre las secciones transversales y sobre planos longitudinales, como se ilustró previamente en la figura 3.7. Ahora examinaremos con más detalle los esfuerzos y las deformaciones unitarias producidas durante la torsión de una barra.

Iniciamos considerando un elemento de esfuerzo $abcd$ cortado entre dos secciones transversales de una barra en torsión (figuras 3.20a y b). Este elemento está en un estado de **cortante puro**, debido a que los únicos esfuerzos que actúan sobre él son esfuerzos cortantes τ en los cuatro lados (consulte el análisis sobre esfuerzos cortantes en la sección 1.6).

Las direcciones de estos esfuerzos cortantes dependen de los sentidos de los pares de torsión aplicados T . En este análisis suponemos que los pares de torsión giran el extremo derecho de la barra en el sentido de las manecillas del reloj cuando se ve desde la derecha (figura 3.20a); de aquí que los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento tienen las direcciones que se muestran en la figura. Este mismo estado de esfuerzo existe en un elemento similar cortado desde el interior de la barra, excepto que las magnitudes de los esfuerzos cortantes son menores debido a que la distancia radial hasta el elemento es menor.

Los sentidos de los pares de torsión que se muestran en la figura 3.20a están elegidos intencionalmente de modo que los esfuerzos cortantes resultantes (figura 3.20a) sean positivos de acuerdo con la convención de signos para esfuerzos cortantes descrita previamente en la sección 1.6. Esta **convención de signos** se repite a continuación:

Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara positiva de un elemento es positivo si actúa en el sentido positivo de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en el sentido negativo de un eje. Y lo opuesto, un esfuerzo que actúa en una cara negativa de un elemento es positivo si actúa en la dirección negativa de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en la dirección positiva de un eje.

Al aplicar esta convención de signos a los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento de esfuerzo de la figura 3.20b observamos que los cuatro esfuerzos cortantes son positivos. Por ejemplo, el esfuerzo en la cara derecha (que es positiva debido a que el eje x está dirigido hacia la derecha) actúa en la dirección positiva del eje y ; por tanto, es un esfuerzo cortante positivo. Además, el esfuerzo en la cara izquierda (que es negativa) actúa en la dirección negativa del eje y ; por tanto, es un esfuerzo cortante positivo. Comentarios análogos se aplican a los esfuerzos restantes.

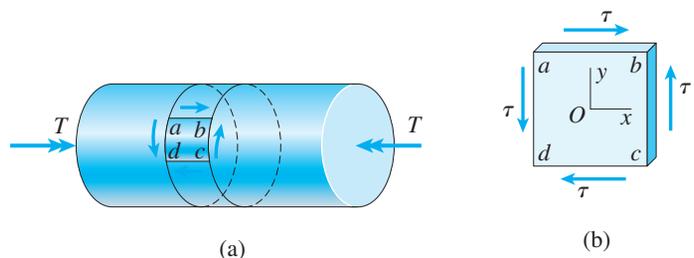


FIGURA 3.20 Esfuerzos que actúan sobre un elemento de esfuerzo cortado de una barra en torsión (cortante puro).

Esfuerzos sobre planos inclinados

Ahora ya podemos determinar los esfuerzos que actúan sobre *planos inclinados* cortados a través del elemento de esfuerzo en cortante puro. Seguiremos el mismo enfoque que se empleó en la sección 2.6 para analizar los esfuerzos en esfuerzo uniaxial.

En la figura 3.21a se muestra una vista bidimensional del elemento de esfuerzo. Como ya se explicó en la sección 2.6, usualmente trazamos una vista bidimensional por conveniencia, pero siempre debemos estar conscientes de que el elemento tiene una tercera dimensión (espesor) perpendicular al plano de la figura.

Ahora cortamos un elemento de esfuerzo con forma de cuña (o “triangular”) con una cara orientada a un ángulo θ con respecto al eje x (figura 3.21b). Los esfuerzos normales σ_θ y los esfuerzos cortantes τ_θ actúan sobre esta cara inclinada y en la figura se muestran en sus direcciones positivas. La **convención de signos** para los esfuerzos σ_θ y τ_θ se describió con anterioridad en la sección 2.6 y se repite a continuación:

Los esfuerzos normales σ_θ son positivos en tensión y los esfuerzos cortantes τ_θ son positivos cuando tienden a producir rotación del material en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (Observe que esta convención de signos para el esfuerzo cortante τ_θ que actúa sobre un plano inclinado es diferente de la convención de signos para los esfuerzos cortantes ordinarios τ que actúan sobre los lados de elementos rectangulares orientados con respecto a un conjunto de ejes xy).

Las caras horizontal y vertical del elemento triangular (figura 3.21b) tienen esfuerzos cortantes positivos τ que actúan sobre ellas y las caras anterior y posterior del elemento están libres de esfuerzo. Por tanto, todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento son visibles en esta figura.

Ahora se pueden determinar los esfuerzos σ_θ y τ_θ a partir del equilibrio del elemento triangular. Las *fuerzas* que actúan sobre sus tres caras se obtienen multiplicando los esfuerzos por las áreas sobre las que actúan. Por ejemplo, la fuerza sobre la cara izquierda es igual a τA_0 , donde A_0 es el área de la cara vertical. Esta fuerza actúa en la dirección y negativa y se muestra en el *diagrama de cuerpo libre* de la figura 3.21c. Puesto que el espesor del elemento en la dirección z es constante, observamos que el área de la cara inferior es $A_0 \tan \theta$ y el área de la cara inclinada es $A_0 \sec \theta$. Al multiplicar

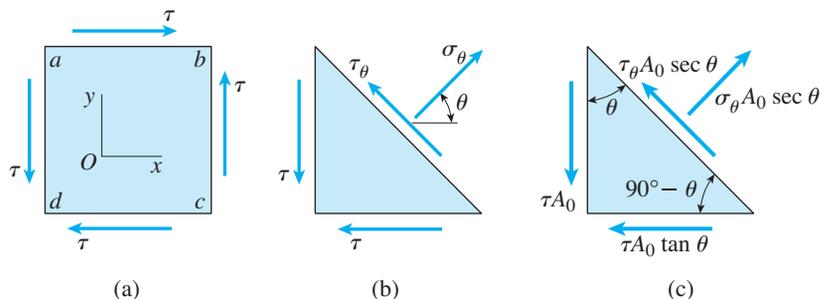


FIGURA 3.21 Análisis de esfuerzos sobre planos inclinados: (a) elemento en cortante puro, (b) esfuerzos que actúan sobre un elemento triangular de esfuerzo y (c) fuerzas que actúan sobre el elemento triangular de esfuerzo (diagrama de cuerpo libre).

los esfuerzos que actúan sobre estas caras por las áreas correspondientes nos permite obtener las fuerzas restantes y de allí completar el diagrama de cuerpo libre (figura 3.21c).

Ahora estamos en condiciones de escribir dos ecuaciones de equilibrio para el elemento triangular, una en la dirección de σ_θ y la otra en la dirección de τ_θ . Al escribir estas ecuaciones, las fuerzas que actúan sobre las caras izquierda e inferior se deben descomponer en componentes en las direcciones de σ_θ y τ_θ . De esta manera, la primera ecuación, obtenida sumando fuerzas en la dirección de σ_θ , es

$$\sigma_\theta A_0 \sec \theta = \tau A_0 \sec \theta + \tau A_0 \tan \theta \cos \theta$$

o

$$\sigma_\theta = 2\tau \sin \theta \cos \theta \quad (3.29a)$$

La segunda ecuación se obtiene sumando fuerzas en la dirección de τ_θ :

$$\tau_\theta A_0 \sec \theta = \tau A_0 \cos \theta - \tau A_0 \tan \theta \sin \theta$$

o

$$\tau_\theta = \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (3.29b)$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en formas más simples introduciendo las identidades trigonométricas siguientes (consulte el apéndice C):

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

Entonces las ecuaciones para σ_θ y τ_θ se convierten en

$$\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta \quad \tau_\theta = \tau \cos 2\theta \quad (3.30a,b)$$

Las ecuaciones (3.30a y b) dan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre cualquier plano inclinado en términos de los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre los planos x y y (figura 3.21a) y del ángulo θ que define la orientación del plano inclinado (figura 3.21b).

La manera en que varían los esfuerzos σ_θ y τ_θ con la orientación del plano inclinado se muestra en la figura 3.22, que es una gráfica de las ecuaciones (3.30a y b), en donde observamos que para $\theta = 0$, que es la cara derecha del elemento de esfuerzo en la figura 3.21a, la gráfica da $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = \tau$. Este último resultado era de esperarse, porque el esfuerzo cortante

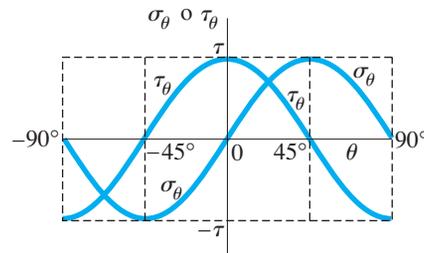


FIGURA 3.22 Gráfica de esfuerzos normales σ_θ y esfuerzos cortantes τ_θ contra el ángulo θ del plano inclinado.

τ actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj contra el elemento y , por tanto, produce un esfuerzo cortante positivo τ_θ .

Para la cara superior del elemento ($\theta = 90^\circ$), obtenemos $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = -\tau$. El signo menos de τ_θ significa que actúa en el sentido de las manecillas del reloj contra el elemento, es decir, hacia la derecha sobre la cara ab (figura 3.21a), lo es consistente con la dirección del esfuerzo cortante τ . Observe que los esfuerzos cortantes numéricamente mayores ocurren en los planos para los que $\theta = 0$ y 90° , así como sobre las caras opuestas ($\theta = 180^\circ$ y 270°).

De la gráfica observamos que el esfuerzo normal σ_θ alcanza un valor máximo en $\theta = 45^\circ$. En ese ángulo el esfuerzo es positivo (tensión) y numéricamente igual al esfuerzo cortante τ . De manera similar, σ_θ tiene su valor mínimo (que es de compresión) en $\theta = -45^\circ$. En los dos ángulos de 45° , el esfuerzo cortante τ_θ es igual a cero. Estas condiciones se representan en la figura 3.23 donde se muestran elementos de esfuerzos orientados en $\theta = 0$ y $\theta = 45^\circ$. El elemento a 45° está sometido a esfuerzos de tensión y compresión iguales en direcciones perpendiculares, sin esfuerzos cortantes.

Observe que los esfuerzos normales que actúan sobre el elemento a 45° (figura 3.23b) corresponden a un elemento sometido a esfuerzos cortantes τ que actúan en la dirección que se muestra en la figura 3.23a. Si se invierte la dirección de los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento de la figura 3.23a, los esfuerzos normales que actúan sobre los planos a 45° también cambiarán direcciones.

Si un elemento de esfuerzo está orientado a un ángulo distinto a 45° ,

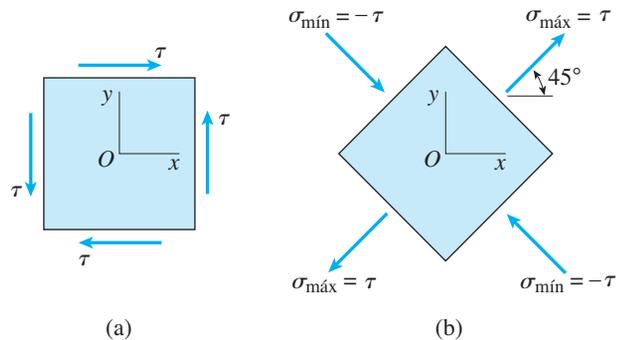


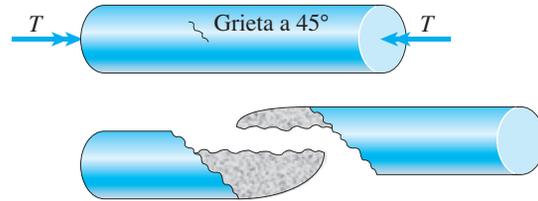
FIGURA 3.23 Elementos de esfuerzo orientados en $\theta = 0$ y $\theta = 45^\circ$ para cortante puro.

los esfuerzos normal y cortante actuarán sobre las caras inclinadas (consulte las ecuaciones 3.30a y b y la figura 3.22). Los elementos de esfuerzo sujetos a estas condiciones más generales se analizan con detalle en el capítulo 7.

Las ecuaciones deducidas en esta sección son válidas para un elemento de esfuerzo en cortante puro sin importar si el elemento se corta de una barra en torsión o de algún otro elemento estructural. Además, como las ecuaciones (3.30) se dedujeron sólo a partir del equilibrio, son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte o no de una manera linealmente elástica.

La existencia de esfuerzos de tensión máximos sobre planos a 45° con respecto al eje x (figura 3.23b) explica por qué las barras en torsión que están hechas de materiales frágiles y débiles en tensión fallan agrietándose a lo largo de una superficie helicoidal a 45° (figura 3.24). Como se mencionó en la sección 3.3, este tipo de falla se demuestra fácilmente torciendo una

FIGURA 3.24 Falla por torsión de un material frágil por agrietamiento de tensión a lo largo de una superficie helicoidal a 45° .



pieza de tiza para pizarrón.

Deformaciones unitarias en cortante puro

Ahora analizamos las deformaciones unitarias en un elemento en cortante puro. Por ejemplo, considere el elemento en cortante puro que se muestra en la figura 3.23a. Las deformaciones unitarias por cortante correspondientes se muestran en la figura 3.25a, donde están muy exageradas. La deformación unitaria cortante γ es el cambio en ángulo entre dos líneas que originalmente eran perpendiculares entre sí, como se analizó con anterioridad en la sección 1.6. Por tanto, la disminución en el ángulo en la esquina inferior izquierda del elemento es la deformación unitaria por cortante γ (medida en radianes). Este mismo cambio de ángulo ocurre en la esquina superior derecha, donde el ángulo disminuye y en las otras dos esquinas, donde los ángulos aumentan. Sin embargo, las longitudes de los lados del elemento, incluyendo el espesor perpendicular al plano de la hoja, no cambian cuando ocurren estas deformaciones unitarias por cortante. Por tanto, el elemento cambia su forma de un paralelepípedo rectangular (figura 3.23a) a un paralelepípedo oblicuo (figura 3.25a). Este cambio de forma se llama **distorsión cortante**.

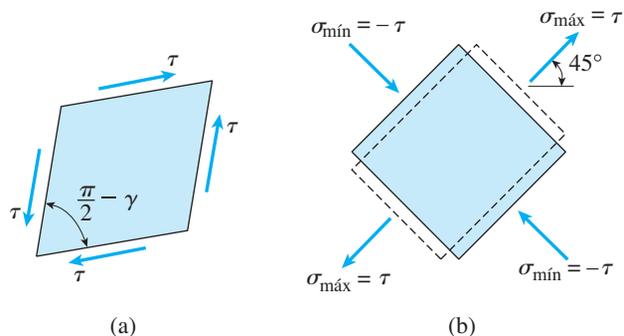
Si el material es linealmente elástico, la deformación unitaria por cortante para el elemento orientado en $\theta = 0$ (figura 3.25a) está relacionada con el esfuerzo cortante mediante la ley de Hooke en cortante:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (3.31)$$

donde, como es usual, el símbolo G representa el módulo de elasticidad en cortante.

A continuación considere las deformaciones unitarias que ocurren en

FIGURA 3.25 Deformaciones unitarias en cortante puro: (a) distorsión cortante de un elemento orientado en $\theta = 0$ y (b) distorsión de un elemento orientado en $\theta = 45^\circ$.



un elemento orientado en $\theta = 45^\circ$ (figura 3.25b). Los esfuerzos de tensión que actúan a 45° tienden a alargar el elemento en esa dirección. Debido al efecto de Poisson, también tienden a acortarlo en la dirección perpendicular (donde $\theta = 135^\circ$ o -45°). De manera similar, los esfuerzos de compresión que actúan a 135° tienden a acortar el elemento en esa dirección y a alargarlo en la dirección a 45° . Estos cambios dimensionales se muestran en la figura 3.25b, donde las líneas discontinuas muestran el elemento deformado. Como no hay distorsiones cortantes, el elemento permanece siendo un paralelepípedo rectangular no obstante que sus dimensiones han cambiado.

Si el material es linealmente elástico y obedece la ley de Hooke, podemos obtener una ecuación que relacione las deformaciones unitarias con el esfuerzo para el elemento en $\theta = 45^\circ$ (figura 3.25b). El esfuerzo de tensión $\sigma_{\text{máx}}$ que actúa en $\theta = 45^\circ$ produce una deformación unitaria normal en esa dirección igual a $\sigma_{\text{máx}}/E$. Como $\sigma_{\text{máx}} = \tau$, también podemos expresar esta deformación unitaria como τ/E . El esfuerzo $\sigma_{\text{máx}}$ también produce una deformación unitaria normal en la dirección perpendicular igual a $-\nu\tau/E$, donde ν es la relación de Poisson. De manera similar, el esfuerzo $\sigma_{\text{mín}} = -\tau$ (en $\theta = 135^\circ$) produce una deformación unitaria igual a $-\tau/E$ en esa dirección y una deformación unitaria positiva en la dirección perpendicular (la dirección a 45°) igual a $\nu\tau/E$. Por tanto, la deformación unitaria normal en la dirección a 45° es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\tau}{E} + \frac{\nu\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \quad (3.32)$$

que es positiva, representando alargamiento. La deformación unitaria en la dirección perpendicular es una deformación unitaria negativa de la misma magnitud. En otras palabras, el cortante puro produce alargamiento en la dirección a 45° y acortamiento en la dirección a 135° . Estas deformaciones unitarias son consistentes con la forma del elemento deformado de la figura 3.25a, debido a que la diagonal a 45° se ha alargado y la diagonal a 135° se ha acortado.

En la siguiente sección emplearemos la geometría del elemento deformado para relacionar la deformación unitaria por cortante γ (figura 3.25a) con la deformación unitaria normal $\epsilon_{\text{máx}}$ en la dirección a 45° (figura 3.25b). Al hacerlo deduciremos la siguiente relación:

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\gamma}{2} \quad (3.33)$$

Esta ecuación, junto con la ecuación (3.31), se pueden emplear para calcular las deformaciones unitarias por cortante máximas y las deformaciones unitarias normales máximas en torsión pura cuando se conoce el esfuerzo cortante τ .

Ejemplo 3.6

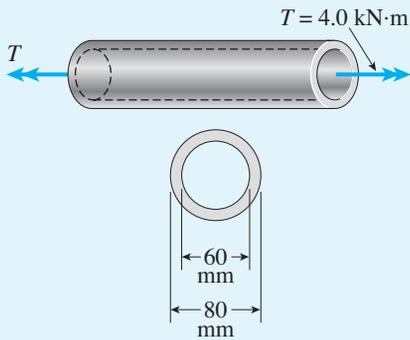


FIGURA 3.26 Ejemplo 3.6. Tubo circular en torsión.

Un tubo circular con diámetro exterior de 80 mm y diámetro interior de 60 mm se somete a un par de torsión $T = 4.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (figura 3.26). El tubo está hecho de una aleación de aluminio 7075-T6.

(a) Determine los esfuerzos máximos de cortante, tensión y compresión en el tubo y muéstrellos en diagramas de elementos de esfuerzo apropiadamente orientados.

(b) Determine las deformaciones unitarias máximas correspondientes en el tubo y muéstrelas en diagramas de los elementos deformados.

Solución

(a) *Esfuerzos máximos.* Los valores máximos de los tres esfuerzos (cortante, de tensión y de compresión) son numéricamente iguales, aunque actúan sobre planos diferentes. Sus magnitudes se determinan con la fórmula de la torsión:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{(4000 \text{ N}\cdot\text{m})(0.040 \text{ m})}{\frac{\pi}{32} [(0.080 \text{ m})^4 - (0.060 \text{ m})^4]} = 58.2 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre planos transversales y longitudinales, como se muestra en la figura 3.27a, donde el eje x es paralelo al eje longitudinal del tubo.

Los esfuerzos máximos de tensión y compresión son

$$\sigma_t = 58.2 \text{ MPa} \quad \sigma_c = -58.2 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos actúan sobre planos a 45° con respecto al eje (figura 3.27b).

(b) *Deformaciones unitarias máximas.* La deformación unitaria máxima en el tubo se obtiene con la ecuación (3.31). El módulo de elasticidad cortante se obtiene de la tabla H-2 del apéndice H, que es $G = 27 \text{ GPa}$. Por tanto, la deformación unitaria máxima es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G} = \frac{58.2 \text{ MPa}}{27 \text{ GPa}} = 0.0022 \text{ rad}$$

El elemento deformado se muestra mediante las líneas discontinuas en la figura 3.27c.

La magnitud de las deformaciones unitarias normales (de la ecuación 3.33) es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = 0.0011$$

Por tanto, las deformaciones unitarias máximas en tensión y compresión son

$$\epsilon_t = 0.0011 \quad \epsilon_c = -0.0011$$

El elemento deformado se muestra mediante las líneas discontinuas en la figura 3.27d para un elemento con lados de dimensiones unitarias.

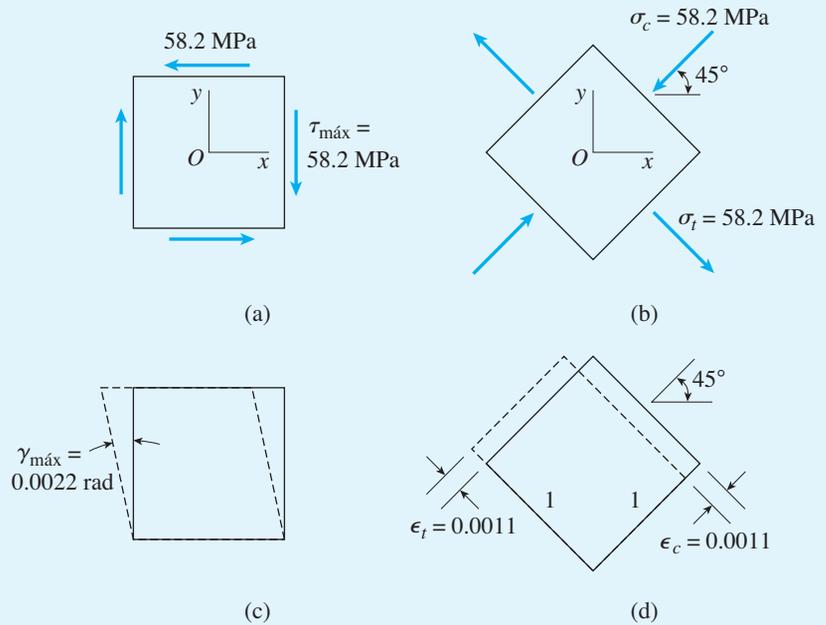


FIGURA 3.27 Elementos de esfuerzo y deformación unitaria para el tubo del ejemplo 3.6: (a) esfuerzos cortantes máximos, (b) esfuerzos máximos de tensión y compresión, (c) deformaciones unitarias máximas y (d) deformaciones unitarias máximas de tensión y compresión.

3.6 RELACIÓN ENTRE LOS MÓDULOS DE ELASTICIDAD E Y G

Es posible obtener una relación importante entre los módulos de elasticidad E y G a partir de las ecuaciones deducidas en la sección anterior. Para este fin, considere el elemento de esfuerzo $abcd$ que se muestra en la figura 3.28a. La cara anterior se supone que es cuadrada, la longitud de cada lado se denota con h . Cuando este elemento se somete a cortante puro por esfuerzos τ , la cara anterior se distorsiona en un rombo (figura 3.28b) con lados de longitud h y con deformación unitaria por cortante $\gamma = \tau/G$. Debido a la distorsión, la diagonal bd se alarga y la diagonal ac se acorta. La longitud de la diagonal bd es igual a su longitud inicial $\sqrt{2}h$ multiplicada por el factor $1 + \epsilon_{\text{máx}}$, donde $\epsilon_{\text{máx}}$ es la deformación unitaria normal en la dirección a 45° ; por tanto,

$$L_{bd} = \sqrt{2}h(1 + \epsilon_{\text{máx}}) \quad (\text{a})$$

Esta longitud se puede relacionar con la deformación unitaria normal γ considerando la geometría del elemento deformado.

Para obtener las relaciones geométricas requeridas, considere el triángulo abd (figura 3.28c) que representa la mitad de los rombos presentados en la figura 3.28b. El lado bd de este triángulo tiene una longitud L_{bd} (ecuación a) y los otros lados tienen una longitud h . El ángulo adb del triángulo es igual a la mitad del ángulo adc del rombo o $\pi/4 - \gamma/2$. El ángulo abd en el triángulo es el mismo. Por tanto, el ángulo dab del triángulo es igual a $\pi/2 + \gamma$. Ahora, empleando la ley de los cosenos (consulte el apéndice C) para el triángulo abd , obtenemos

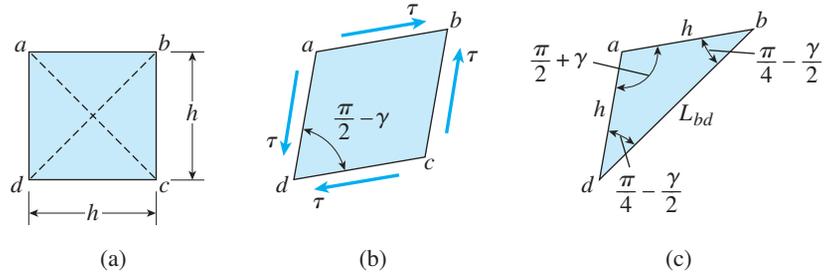


FIGURA 3.28 Geometría de un elemento deformado en cortante puro.

$$L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

Al sustituir L_{bd} obtenido en la ecuación (a) y simplificando, obtenemos

$$(1 + \epsilon_{\text{máx}})^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

Desarrollando el término en el lado izquierdo y observando que $\cos(\pi/2 + \gamma) = -\text{sen } \gamma$, obtenemos

$$1 + 2\epsilon_{\text{máx}} + \epsilon_{\text{máx}}^2 = 1 + \text{sen } \gamma$$

Como $\epsilon_{\text{máx}}$ y γ son deformaciones unitarias muy pequeñas, podemos ignorar el término $\epsilon_{\text{máx}}^2$ en comparación con $2\epsilon_{\text{máx}}$ y reemplazar $\text{sen } \gamma$ con γ . La expresión resultante es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\gamma}{2} \quad (3.34)$$

que establece la relación ya presentada en la sección 3.5 como la ecuación (3.33).

La deformación unitaria por cortante γ que aparece en la ecuación (3.34) es igual a τ/G según la ley de Hooke (ecuación 3.31) y la deformación unitaria normal $\epsilon_{\text{máx}}$ es igual a $\tau(1 + \nu)/E$ de acuerdo con la ecuación (3.32). Al realizar estas dos sustituciones en la ecuación (3.34) se obtiene

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.35)$$

Vemos que E , G y ν no son propiedades independientes de un material linealmente elástico y, si dos de ellas se conocen, la tercera se puede calcular a partir de la ecuación (3.35).

Algunos valores comunes de E , G y ν se presentan en la tabla H.2 del apéndice H.

3.7 TRANSMISIÓN DE POTENCIA POR EJES CIRCULARES

El uso más importante de los ejes circulares es transmitir potencia mecánica de un dispositivo o una máquina a otra, como en el caso del eje impulsor de un automóvil, el eje de la hélice de un barco o el eje de una bicicleta. La potencia se transmite mediante el movimiento rotatorio del eje, y la cantidad de potencia transmitida depende de la magnitud del par de torsión y de la velocidad de rotación. Un problema común de diseño es determinar el tamaño necesario de un eje tal que transmita una cantidad especificada de potencia a una velocidad rotacional especificada sin sobrepasar los esfuerzos permisibles para el material.

Supongamos que un eje impulsado por un motor (figura 3.29) gira a una velocidad angular ω , medida en radianes por segundo (rad/s). El eje transmite un par de torsión T al dispositivo (no se muestra en la figura) que realiza trabajo útil. El par de torsión aplicado por el eje al dispositivo externo tiene el mismo sentido que la velocidad angular ω , es decir, su vector apunta hacia la izquierda. Sin embargo, el par de torsión que se muestra en la figura es el par de torsión ejercido *sobre el eje* por el dispositivo y, por tanto, su vector apunta en la dirección opuesta.

En general, el trabajo W realizado por un par de torsión de magnitud constante es igual al producto del par de torsión por el ángulo que gira; es decir,

$$W = T\psi \quad (3.36)$$

donde ψ es el ángulo de rotación en radianes.

Potencia es la *rapidez* con que se realiza el trabajo o

$$P = \frac{dW}{dt} = T \frac{d\psi}{dt} \quad (3.37)$$

en donde P es el símbolo para la potencia y t representa el tiempo. La razón de cambio $d\psi/dt$ del desplazamiento angular ψ es la velocidad angular ω y, por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$P = T\omega \quad (\omega = \text{rad/s}) \quad (3.38)$$

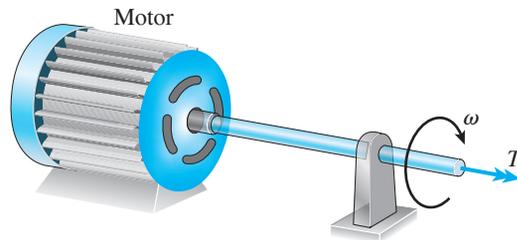


FIGURA 3.29 Eje que transmite un par de torsión T constante a una velocidad angular ω .

Esta fórmula, que resulta familiar de la física elemental, da la potencia transmitida por un eje rotatorio que transmite un par de torsión constante T .

Las **unidades** que se deben utilizar en la ecuación (3.38) son las siguientes. Si el par de torsión T se expresa en newtons metro, entonces la potencia se expresa en watts (W). Un watt es igual a un newton metro por segundo (o un joule por segundo). Si T se expresa en libras-pie, entonces la potencia se expresa en pies-libra por segundo.*

Con frecuencia la velocidad angular se expresa como la frecuencia f de rotación, que es el número de revoluciones por unidad de tiempo. La unidad de la frecuencia es el hertzio (Hz), que es igual a una revolución por segundo (s^{-1}). Como una revolución es igual a 2π radianes, obtenemos

$$\omega = 2\pi f \quad (\omega = \text{rad/s}, f = \text{Hz} = s^{-1}) \quad (3.39)$$

Entonces la expresión para la potencia (ecuación 3.38) se convierte en

$$P = 2\pi f T \quad (f = \text{Hz} = s^{-1}) \quad (3.40)$$

Otra unidad de uso común es el número de revoluciones por minuto (rpm), denotada con la letra n . Por tanto, también tenemos las siguientes relaciones:

$$n = 60f \quad (3.41)$$

y

$$P = \frac{2\pi n T}{60} \quad (n = \text{rpm}) \quad (3.42)$$

En las ecuaciones (3.40) y (3.42), las cantidades P y T tienen las mismas unidades que en la ecuación (3.38); es decir, P tiene unidades de watts si T tiene unidades de newtons metro y P tiene unidades de pies-libra por segundo si T tiene unidades de libras-pie.

En la práctica de ingeniería en Estados Unidos, la potencia algunas veces se expresa en caballos de potencia (hp), una unidad igual a 550 ft-lb/s. Por tanto, los caballos de potencia H transmitidos por un eje rotatorio son

$$H = \frac{2\pi n T}{60(550)} = \frac{2\pi n T}{33,000} \quad (n = \text{rpm}, T = \text{lb-ft}, H = \text{hp}) \quad (3.43)$$

Un caballo de potencia es aproximadamente igual a 746 watts.

Las ecuaciones anteriores relacionan el par de torsión que actúa en un eje con la potencia transmitida por éste. Al conocer el par de torsión podemos determinar los esfuerzos cortantes, las deformaciones unitarias por cortante, los ángulos de torsión y otras cantidades que se deseen mediante los métodos descritos en las secciones 3.2 a 3.5.

Los ejemplos siguientes ilustran algunos de los procedimientos para analizar ejes rotatorios.

*Consulte la tabla A-1 del apéndice A, para ver las unidades de trabajo y potencia.

Ejemplo 3.7

Un motor que impulsa un eje sólido circular de acero transmite 40 hp al engrane en *B* (figura 3.30). El esfuerzo cortante permisible en el acero es 6000 psi.

(a) ¿Cuál es el diámetro d requerido para el eje si opera a una velocidad de 500 rpm?

(b) ¿Cuál es el diámetro d requerido para el eje si opera a una velocidad de 300 rpm?

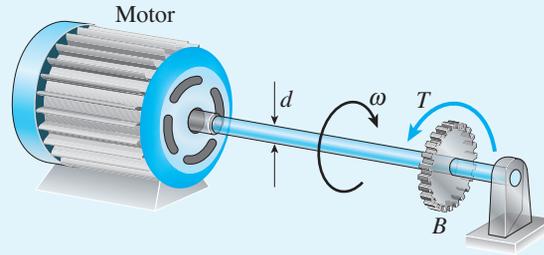


FIGURA 3.30 Ejemplo 3.7. Eje de acero en torsión.

Solución

(a) *Motor que opera a 500 rpm.* Conociendo la potencia y la velocidad de rotación, podemos encontrar el par de torsión T que actúa sobre el eje empleando la ecuación (3.43). Despejando T en la esa ecuación, obtenemos

$$T = \frac{33,000H}{2\pi n} = \frac{33,000(40 \text{ hp})}{2\pi(500 \text{ rpm})} = 420.2 \text{ lb-ft} = 5042 \text{ lb-in}$$

Este par de torsión lo transmite el eje del motor al engrane.

El esfuerzo cortante máximo en el eje se puede obtener con la fórmula modificada de la torsión (ecuación 3.12):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

Al despejar el diámetro d en esta ecuación y al sustituir t_{perm} con $\tau_{\text{máx}}$, obtenemos

$$d^3 = \frac{16T}{\pi\tau_{\text{perm}}} = \frac{16(5042 \text{ lb-in})}{\pi(6000 \text{ psi})} = 4.280 \text{ in}^3$$

de donde

$$d = 1.62 \text{ in}$$

El diámetro del eje debe tener al menos esta medida para no exceder el esfuerzo cortante permisible.

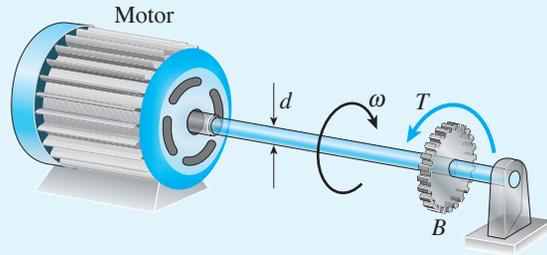


FIGURA 3.30 (Repetida)

(b) Motor operando a 300 rpm. Siguiendo el mismo procedimiento que en el inciso (a), obtenemos

$$T = \frac{33,000H}{2\pi n} = \frac{33,000(40 \text{ hp})}{2\pi(3000 \text{ rpm})} = 70.03 \text{ lb-ft} = 840.3 \text{ lb-in}$$

$$d^3 = \frac{16T}{\pi \tau_{\text{perm}}} = \frac{16(840.3 \text{ lb-in})}{\pi(6000 \text{ psi})} = 0.7133 \text{ in}^3$$

$$d = 0.89 \text{ in}$$

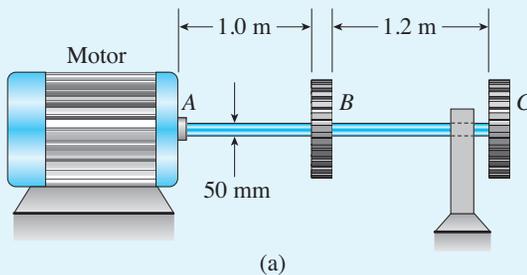
que es menor que el diámetro determinado en el inciso (a).

Este ejemplo ilustra que a mayor velocidad de rotación, menor será el tamaño requerido del eje (para la misma potencia y mismo esfuerzo permisible).

Ejemplo 3.8

Un eje sólido de acero ABC con 50 mm de diámetro (figura 3.31a) es impulsada en A por un motor que transmite 50 kW al eje a 10 Hz. Los engranes en B y C impulsan maquinaria que requiere potencia igual a 35 kW y 15 kW, respectivamente.

Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el eje y el ángulo de torsión ϕ_{AC} entre el motor en A y el engrane en C . (Utilice $G = 80 \text{ GPa}$).



$$T_A = 796 \text{ N}\cdot\text{m} \quad T_B = 557 \text{ N}\cdot\text{m} \quad T_C = 239 \text{ N}\cdot\text{m}$$

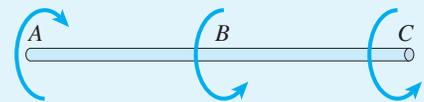


FIGURA 3.31 Ejemplo 3.8. Eje de acero en torsión.

Solución

Pares de torsión en el eje. Iniciamos el análisis determinando los pares de torsión aplicados al eje por el motor y los dos engranes. Como el motor suministra 50 kW a 10 Hz, crea un par de torsión T_A en el extremo A del eje (figura 3.31b) que podemos calcular con la ecuación (3.40):

$$T_A = \frac{P}{2\pi f} = \frac{50 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 796 \text{ N}\cdot\text{m}$$

De una manera similar, podemos calcular los pares de torsión T_B y T_C aplicados por los engranes al eje:

$$T_B = \frac{P}{2\pi f} = \frac{35 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 557 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T_C = \frac{P}{2\pi f} = \frac{15 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 239 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Estos pares de torsión se muestran en el diagrama de cuerpo libre del eje (figura 3.31b). Observe que los pares de torsión aplicados por los engranes tienen sentidos opuestos al par de torsión aplicado por el motor. (Si consideramos T_A como la “carga” aplicada al eje por el motor, entonces los pares de torsión T_B y T_C son las “reacciones” de los engranes).

Ahora se determinan (por inspección) los pares de torsión internos en los dos segmentos del eje a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.31b:

$$T_{AB} = 796 \text{ N}\cdot\text{m} \quad T_{BC} = 239 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Los dos pares de torsión internos actúan en el mismo sentido y por lo tanto, los ángulos de torsión en los segmentos AB y BC son aditivos al determinar el ángulo total de torsión. (Para ser específicos, los dos pares de torsión son positivos de acuerdo con la convención de signos adoptada en la sección 3.4).

Esfuerzos cortantes y ángulos de torsión. El esfuerzo cortante y el ángulo de torsión en el segmento AB del eje se determinan de la manera usual con las ecuaciones (3.12) y (3.15):

$$\tau_{AB} = \frac{16T_{AB}}{\pi d^3} = \frac{16(796 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(50 \text{ mm})^3} = 32.4 \text{ MPa}$$

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GI_P} = \frac{(796 \text{ N}\cdot\text{m})(1.0 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})\left(\frac{\pi}{32}\right)(50 \text{ mm})^4} = 0.0162 \text{ rad}$$

Las cantidades correspondientes para el segmento BC son

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16(239 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(50 \text{ mm})^3} = 9.7 \text{ MPa}$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} = \frac{(239 \text{ N}\cdot\text{m})(1.2 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})\left(\frac{\pi}{32}\right)(50 \text{ mm})^4} = 0.0058 \text{ rad}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en el eje se tiene en el segmento AB y es

$$\tau_{\text{máx}} = 32.4 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

Además, el ángulo total de torsión entre el motor en A y el engrane en C es

$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} = 0.0162 \text{ rad} + 0.0058 \text{ rad} = 0.0220 \text{ rad} = 1.26^\circ \quad \leftarrow$$

Como se explicó antes, las dos partes del eje giran en el mismo sentido, por lo que sus ángulos de torsión se suman.

Razones. La razón τ_1/τ_2 entre esfuerzo cortante en el tubo circular y el esfuerzo cortante en el tubo cuadrado (de la ecuación (3.61) es

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{\pi^2 r^2/4}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.79 \quad (n) \quad \leftarrow$$

La razón de los ángulos de torsión (de la ecuación 3.2) es

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\pi^3 r^3 t/8}{2\pi r^3 t} = \frac{\pi^2}{16} = 0.62 \quad (o) \quad \leftarrow$$

Estos resultados muestran que el tubo circular no sólo tiene un esfuerzo cortante 21 por ciento menor que el tubo cuadrado, sino también mayor rigidez contra la rotación.

*3.11 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS EN TORSIÓN

En las secciones anteriores de este capítulo analizamos los esfuerzos en elementos torsionales suponiendo que la distribución del esfuerzo variaba de una manera uniforme y continua. Esta hipótesis es válida siempre que no haya cambios abruptos en la forma de la barra (sin agujeros, ranuras, escalones abruptos y cambios similares) y siempre que la región en consideración esté alejada de cualesquiera puntos de carga. Si existe alguna o algunas condiciones disruptivas, entonces se desarrollarán esfuerzos muy localizados en las regiones circundantes a las discontinuidades. En el trabajo práctico de ingeniería estas **concentraciones de esfuerzos** se manejan mediante **factores de concentración de esfuerzos**, como ya se explicó en la sección 2.10.

Los efectos de una concentración de esfuerzos están confinados a una región pequeña alrededor de la discontinuidad, de acuerdo con el principio de Saint-Venant (consulte la sección 2.10). Por ejemplo, considere un eje escalonado que consiste de dos segmentos con diámetros diferentes (figura 3.47). El segmento mayor tiene un diámetro D_2 y el segmento menor tiene un diámetro D_1 . La unión entre los dos segmentos forma un “escalón” u “hombro” que está maquinado con un filete de radio R . Sin el filete, el factor de concentración de esfuerzo teórico sería infinitamente grande debido a la esquina abrupta reentrante a 90° . Por supuesto, los esfuerzos infinitos no pueden ocurrir, más bien, el material en la esquina reentrante se deformaría y aliviaría parcialmente la concentración de esfuerzos elevada. Sin embargo, ese tipo de situación es muy peligrosa ante cargas dinámicas y en un buen diseño siempre se utiliza un filete. Entre mayor sea el radio del filete, menores serán los esfuerzos.

A una distancia desde el hombro aproximadamente igual al diámetro D_2 (por ejemplo, en la sección transversal $A-A$ en la figura 3.47a) los esfuerzos cortantes torsionales prácticamente no se ven afectados por la discontinuidad. Por tanto, el esfuerzo máximo τ_2 a una distancia suficiente a la izquierda del hombro se puede encontrar con la fórmula de la torsión empleando D_2 como el diámetro (figura 3.47b). Los mismos comentarios

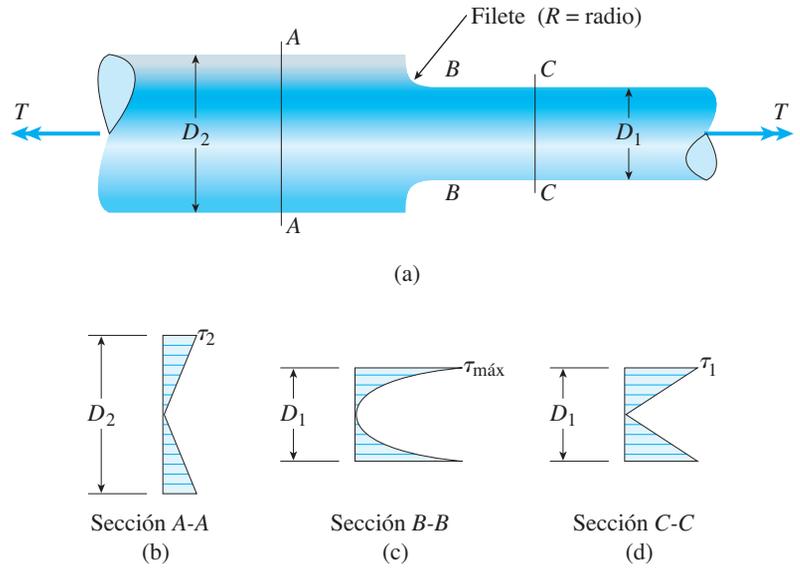


FIGURA 3.47 Eje escalonado en torsión.

generales se aplican a la sección C-C, que es la distancia D_1 (o mayor) desde el inicio del filete. Como el diámetro D_1 es menor que el diámetro D_2 , el esfuerzo máximo τ_1 en la sección C-C (figura 3.47d) es mayor que el esfuerzo τ_2 .

El efecto de concentración de esfuerzos es mayor en la sección B-B, que corta a través del inicio del filete. En esta sección el esfuerzo máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = K\tau_{\text{nom}} = K \frac{Tr}{I_P} = K \left(\frac{16T}{\pi D_1^3} \right) \quad (3.78)$$

En esta ecuación, K es el factor de concentración de esfuerzos y τ_{nom} (igual a τ_1) es el esfuerzo cortante nominal, es decir, el esfuerzo cortante en la parte menor del eje.

Los valores del factor K están trazados en la figura 3.48 como una función de la razón R/D_1 . Las curvas se presentan para varios valores de la razón D_2/D_1 . Observe que cuando el radio del filete R es muy pequeño y la transición de un diámetro al otro es abrupta, el valor de K es muy grande. Al contrario, cuando R es grande, el valor de K tiende a 1.0 y el efecto de la concentración de esfuerzos desaparece. La curva discontinua en la figura 3.48 es para el caso especial de un filete de un cuarto de círculo, lo cual significa que $D_2 = D_1 = 2R$. (Nota: los problemas 3.11.1 a 3.11.5 proporcionan práctica para obtener valores de K de la figura 3.48).

En la bibliografía técnica (consulte, por ejemplo, la referencia 2.9) se encuentran muchos otros casos de concentraciones de esfuerzos para ejes circulares, como un eje con una grieta y un eje con un agujero.

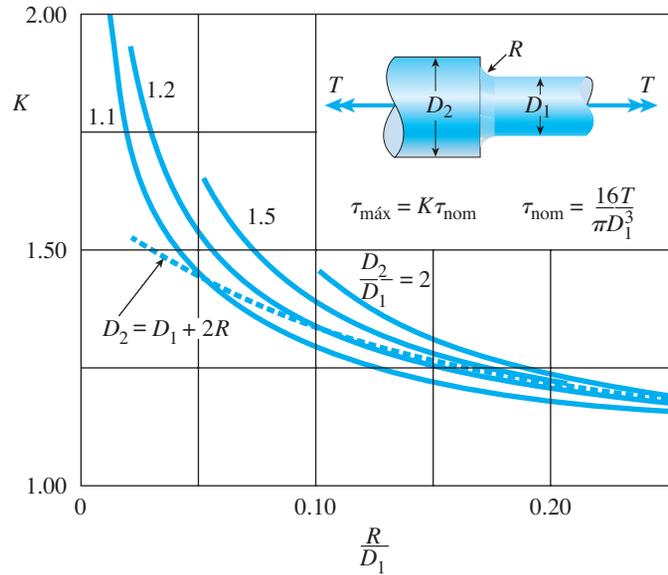


FIGURA 3.48 Factor de concentración de esfuerzos K para un eje escalonado en torsión. (La línea discontinua es para un filete de un cuarto de círculo.)

Como se explicó en la sección 2.10, las concentraciones de esfuerzos son importantes para los materiales frágiles ante cargas estáticas y para la mayor parte de los materiales sometidos a cargas dinámicas. Como caso de ejemplo, las fallas por fatiga son de mayor interés en el diseño de ejes rotatorios y flechas (consulte la sección 2.9 para un análisis breve de la fatiga). Los factores de concentración de esfuerzos teóricos K dados en esta sección se basan en un comportamiento linealmente elástico del material. Sin embargo, experimentos de fatiga demuestran que esos factores son conservadores y que las fallas por fatiga en materiales dúctiles, en general, ocurren con cargas más grandes que las anticipadas por los factores teóricos.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo investigamos el comportamiento de barras y tubos huecos sometidos a pares de torsión concentrados o a momentos torsionales distribuidos, así como a efectos de deformaciones previas. Desarrollamos relaciones par de torsión-desplazamiento para emplearlas en el cálculo de ángulos de torsión de barras en condiciones uniformes (es decir, momento torsional constante sobre toda su longitud) y no uniformes (o sea, pares de torsión y tal vez también el momento polar de inercia varían sobre la longitud de la barra). Luego se desarrollaron ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para estructuras estáticamente indeterminadas en un procedimiento de superposición que conduce a la solución para todos los pares de torsión desconocidos, desplazamientos rotacionales, esfuerzos, etcétera. Iniciando con un estado de cortante puro o elementos de esfuerzo alineados con el eje de la barra, desarrollamos luego ecuaciones para esfuerzos normal y cortante sobre secciones inclinadas. Se presentó una variedad de temas especiales en las últimas partes del capítulo. Los conceptos importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

1. Para barras y tubos circulares, el **esfuerzo cortante** (τ) y la **deformación unitaria** (γ) varían linealmente con la distancia radial desde el centro de la sección transversal.
2. La **fórmula de la torsión** define la relación entre el esfuerzo cortante y el momento torsional. El esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ se presenta en la superficie exterior de la barra o del tubo y depende del momento torsional T , de la distancia radial r y del segundo momento de inercia de la sección transversal I_p conocido como momento polar de inercia para secciones transversales circulares. Se observa que los tubos de pared delgada son más eficientes en torsión, debido a que el material disponible está sometido a esfuerzo de manera más uniforme que las barras circulares sólidas.
3. El ángulo de torsión ϕ de barras prismáticas circulares sometidas a momento(s) torsional(es) es proporcional al par de torsión T y a la longitud de la barra L , e inversamente proporcional a la rigidez torsional (GI_p) de la barra; esta relación se llama **relación par de torsión-desplazamiento**.
4. El ángulo de torsión por unidad de longitud de una barra se refiere a su **flexibilidad torsional** (f_T) y la relación inversa es la **rigidez torsional** ($k_T = 1/f_T$) de la barra o eje.
5. La suma de las deformaciones por torsión de los segmentos individuales de un eje no prismático es igual a la torsión de toda la barra (ϕ). Se utilizaron diagramas de cuerpo libre para determinar los momentos torsionales (T_i) en cada segmento i . Si los momentos torsionales y/o las propiedades de la sección transversal (I_p) varían continuamente, se requiere una expresión integral.
6. Si la estructura de la barra es **estáticamente indeterminada**, se requieren ecuaciones adicionales para resolver los momentos desconocidos. Las **ecuaciones de compatibilidad** se emplean para relacionar rotaciones de la barra con las condiciones de apoyo y, por tanto, generan relaciones adicionales entre las incógnitas. Es conveniente usar una **superposición** de estructuras “liberadas” (o estáticamente determinadas) para representar la estructura estáticamente indeterminada real de la barra.
7. Los **desajustes** y las **deformaciones previas** inducen momentos torsionales sólo en barras o ejes estáticamente indeterminados.
8. Un eje circular está sometido a **cortante puro** debido a momentos torsionales. Los **esfuerzos normal y cortante máximos** se pueden obtener considerando un elemento de esfuerzo inclinado. El esfuerzo cortante máximo ocurre en un elemento alineado con el eje de la barra; pero el esfuerzo normal máximo sucede en una inclinación a 45° con respecto al eje de la barra y el esfuerzo normal máximo es igual al esfuerzo cortante máximo.