Trabajo Práctico Nº 15: Calculo de Primitivas por Sustitución y por Partes. Otros métodos para obtener Primitivas.

> "Si me lo dicen, lo olvido; si me lo enseñan, recuerdo; si me involucro, lo aprendo."
>
> Benjamín Franklin

1) Cuestionario

a) **Explique en qué consiste el método de sustitución para resolver una integral.**
b) **Escriba la fórmula que se emplea para resolver una integral utilizando el método por partes.**
c) **Indique en qué casos se podría aplicar, y cómo se aplica, el método de integración por partes.**

2) Ejercicio Resuelto

a) **Calcule la siguiente integral utilizando el método de sustitución:**

$$\int (5x-2)^3 \ dx$$

Para aplicar el método requerido debemos proponer una sustitución, en este caso:

$$u = 5x - 2$$

Luego, debemos derivar la expresión propuesta como ***u*** para obtener ***du***:

$$du = 5\,dx \quad => \quad \tfrac{1}{5} du = dx$$

Sustituimos entonces (reemplazamos) en la expresión original, y luego reordenamos:

$$\int (5x-2)^3 \ dx = \int u^3 \frac{1}{5}\ du = \int \frac{1}{5} u^3\ du = \frac{1}{5}\int u^3 du$$

Tenemos ahora un integrando sencillo, pero debemos ser cuidadosos porque la nueva variable es ***u***.
Resolvemos entonces la integral:

$$\frac{1}{5}\int u^3\ du = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\ u^4 + C = \frac{1}{20} u^4 + C$$

No debemos olvidar que hemos recurrido a una sustitución, por lo que debemos reemplazar nuevamente ***u*** para volver a la expresión original en función de ***x***:

$$\frac{1}{20} u^4 + C = \frac{1}{20}(5x-2)^4 + C$$

Finalmente, hemos resuelto la integral dada utilizando el método de sustitución. La respuesta es:

$$\boxed{\int (5x-2)^3\ dx = \frac{1}{20}(5x-2)^4 + C}$$

b) **Calcule la siguiente integral utilizando el método de integración por partes:**

$$\int \mathrm{x}^6\ \ln \mathrm{x}\ \mathrm{dx}$$

Para aplicar el método de integración por partes, recordemos la expresión que se utiliza:

$$\int u\, dv = u\,.v - \int v\, du$$

Recordando que deben reconocerse en su integrando dos partes, que son ***u*** y ***dv***, los seleccionamos:

$$\mathbf{u = \ln x} \qquad \text{y} \qquad dv = \mathbf{x^6\ dx}$$

Derivamos ***u*** e integramos ***dv***:

$$\mathbf{du} = \frac{1}{x}\,\mathbf{dx} \qquad \text{y} \qquad v = \int \mathbf{x^6\ dx} = \frac{1}{7}x^7$$

Reemplazamos entonces en la integral inicial y aplicamos la fórmula:

$$\int \mathrm{x}^6\ \ln \mathrm{x}\ \mathrm{dx} = (\,lnx\,)\ \frac{1}{7}x^{\,7} - \int \frac{1}{7}\ x^7 \frac{1}{x}\ dx$$

Reordenamos, simplificamos en el integrando y resolvemos la integral indicada:

$$\frac{1}{7}x^7.\ lnx\ - \int \frac{1}{7}\ x^6\ dx\ = \frac{1}{7}x^7.\ lnx - \frac{1}{7}\ .\ \frac{1}{7}\ x^7 + C$$

Por último, extraemos factor común, expresamos la expresión del modo más sencillo, y escribimos la respuesta:

$$\boxed{\int x^6\,.\,lnx\,dx = \frac{1}{7}\ x^7.(\,lnx - \frac{1}{7}) + C}$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Completa y luego calcula las siguientes integrales:

a) $\int (2x^5+3)^6\ x^4\ dx\ = \frac{1}{10}\int u^6 du$ si u = ...

b) $\int\ sen^5\left(\frac{x}{6}\right) cos\left(\frac{x}{6}\right) dx\ = 6\int u^5 du$ si u = ...

c) $\int \cos\left(\sqrt{x^3}+5\right)\sqrt{x}\,dx = \beta \int \cos u\,du$ si β = …………. y u = ………………………

2.- Resuelva las siguientes integrales por medio de la sustitución indicada:

a) $\int (x^4+3)^6\,4x^3\,dx$ considerando u = x^4+3

b) $\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}\left(x^{3/2}-2\right)dx$ considerando v = $x^{3/2}-2$

c) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x+5}}$ considerando: i) w = $3x+5$ ii) w = $\sqrt{3x+5}$

3.- Calcular las siguientes integrales utilizando el método de sustitución:

a) $\int \dfrac{dx}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\sqrt{x}}$ b) $\int \frac{1}{x}\,ln^5(3x)\,dx$ c) $\int \frac{3^x}{(2+3^x)}\,dx$

d) $\int \dfrac{1-2x^3}{(x^4-2x+3)^3}dx$ e) $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) sen^4\left(\frac{x}{5}\right)dx$

4.- La velocidad $\boldsymbol{v = \frac{ds}{dt}}$ de una partícula que se mueve hacia adelante y hacia atrás sobre una recta es $\boldsymbol{v = 6\,sen(2t)}$ para todo $\boldsymbol{t}$. Hallar el valor de $\boldsymbol{s}$ para $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{2}\,seg}$, si $\boldsymbol{s = 0m}$ cuando $\boldsymbol{t = 0\,seg}$.

5.- En cada punto de cierta curva, la pendiente de la recta tangente es: $\boldsymbol{m = arctg(x)}$. Halle la ecuación de la curva, sabiendo que pasa por el punto $\boldsymbol{P(1;1)}$.

6.- La pendiente de una curva está dada por la expresión: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = xe^{(x^2-1)}}$. Sabiendo que la curva pasa por el punto de coordenadas $\boldsymbol{(1;1)}$, encuentre la curva.

7.- Reemplaza y completa empleando el método de integración por partes y luego resuelve:

a) $\int \mathbf{\cos^2 x\,dx}$ si: $\mathbf{u = \cos x}$ y: $\mathbf{dv = \cos x\,dx}$

b) $\int \mathbf{x^3 \ln x\,dx} = \boldsymbol{uv - \frac{1}{4}\int x^3 dx}$ si: **u =………** y: **dv =………**

c) $\int \mathbf{x\,4^x\,dx} = \boldsymbol{\frac{1}{\ln 4} x\,4^x - \int v\,du}$ si: **u =………** y: **dv =………**

8.- Calcule las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

a) $\int \mathbf{sen^2} \boldsymbol{t}\, \mathbf{dt}$ b) $\int \mathbf{z\, e^z\, dz}$ c) $\int \mathbf{x^2 \cos} \boldsymbol{x}\, \mathbf{dx}$

d) $\int (\boldsymbol{t}^2 + 7)\sqrt{\boldsymbol{t}+8}\, \mathbf{dt}$ e) $\int (\boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{z} + 1)\, \mathbf{e^z\, dz}$

9.- Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $\boldsymbol{v(t) = t^2 e^{-t}}$ metros por segundo, después de transcurridos $\boldsymbol{t}$ segundos. Cuán lejos llegará la partícula durante los primeros ***5*** segundos?

10.- La función de costo marginal es $\mathbf{C'(x) = \ln(x)}$, donde $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x}$. Halle la fórmula de la función ***C***, siendo $\boldsymbol{C(x)}$ el costo total, expresado en dólares, para producir ***x*** unidades de un determinado producto, y además $\boldsymbol{C(1) = 5}$.

11.- Un cohete se acelera al quemar el combustible que lleva a bordo, de modo que su masa disminuye con el transcurso del tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete al despegar (incluyendo el combustible) es $\boldsymbol{m}$, el combustible se consume a la razón $\boldsymbol{r}$ y los gases de escape se expulsan con la velocidad constante $\boldsymbol{v_c}$ (con relación al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el instante ***t*** se expresa mediante la ecuación $\boldsymbol{v(t) = -gt - v_c \ln\left(\frac{m-rt}{m}\right)}$, donde ***g*** es la aceleración debida a la gravedad, y ***t*** no es demasiado grande. Si ***g = 9,8 m/s²***, ***m = 30000 kg***, ***r = 160 kg/s*** y ***v_c = 3000 m/s***, encuentre la altura del cohete un minuto después del despegue.

12. – Utilice alguno de los métodos de integración vistos para calcular las siguientes integrales:

a) $\int 3(2x+3)\sqrt{3x^2+9x-6}\, dx$ b) $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$ c) $\int \frac{x+3}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}\, dx$

d) $\int w^2 \operatorname{sen} w\, dw$ e) $\int 6x^2 e^{3x}\, dx$ f) $\int (t^2 - 4t + 2)\, dt$

4) Ejercicios adicionales

1.- Resolver las siguientes integrales aplicando alguno/s de los métodos vistos:

a) $\int \ln 5 \left(5^x + 2\right)^6 5^x dx$ b) $\int \operatorname{sen}(\ln y)\, dy$