Trabajo Práctico Nº 6: *Límites laterales. Límites donde interviene infinito.*

Nuestras acciones hablan sobre nosotros tanto como nosotros sobre ellas.
George Eliot

1) Cuestionario

a) ¿Qué se entiende por límite lateral?

b) Defina el límite donde interviene infinito, ya sea para $x \to a$ o bien $x \to \pm\infty$. Interprete con sus palabras

c) ¿Qué método conoce para eliminar indeterminaciones de la forma ∞ / ∞ si $x \to \infty$?

d) ¿Qué es una Asíntota Vertical?

e) ¿Qué es una Asíntota Horizontal?

2) Ejercicios Resueltos

1.- Dada la función f / $f(x) = \begin{cases} 3x - 8 & \text{si} \quad x < -6 \\ 2 & \text{si} \quad x = -6 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x > -6 \end{cases}$

Calcular : a) $\lim_{x \to -9} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim_{x \to -6^+} f(x)$ d) $\lim_{x \to -6^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to -6} f(x)$

Solución

a) En este ejemplo se da una función definida sectorialmente, por lo tanto para calcular el limite se debe primero determinar en qué sector se encuentran los valores de **x** próximos a **− 9**. Se observa que si **x** está próximo a **− 9** , entonces **x** **< − 6**, por lo tanto la expresión que se debe usar es:

$$3x - 8, \text{ es decir } \lim_{x \to -9} f(x) = \lim_{x \to -9} (3x - 8) = 3 \cdot (-9) - 8 = -35$$

Se reemplaza directamente **x** por **− 9**, porque la función dada por **f (x) = 3 x − 8** es un polinomio

b) Idem para: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$

c) Aquí se pide calcular un límite lateral, entonces se debe ver cuál es la expresión que corresponde para los valores de **x** próximos a **− 6** pero mayores que – 6 en: $\mathbf{f(x) = x^2 + 1}$

$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = \lim_{x \to -6^+} (x^2 + 1) = 37$$

d) $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -6^-} (3x - 8) = -26$

e) Como en $x = -6$ se produce un cambio de fórmula, para calcular el límite pedido se debe necesariamente calcular los límites laterales y luego recordar que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

y que si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

En nuestro caso los límites laterales son distintos $\lim\limits_{x \to -6^+} f(x) = 37$ y $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x) = -26$, por lo que se puede afirmar que $\nexists \lim\limits_{x \to -6} f(x)$

2.-Límite infinito   Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{10x^3 + 4x^2 - 8}{5x^4 - 3x^3 + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3} - 5x\right)$

Solución

a) En este ejemplo la indeterminación que se presenta es el tipo ∞/∞. La regla que se utiliza para salvar esta indeterminación, cuando $x \to \infty$, es la de dividir numerador y denominador por la mayor potencia con que figura x en el denominador en este caso x^4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{10x^3 + 4x^2 - 8}{5x^4 - 3x^3 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{10x^3 + 4x^2 - 8}{x^4}}{\dfrac{5x^4 - 3x^3 + 2}{x^4}} = \text{(distribuyendo y simplificando)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{10}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^4}}{5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^4}} \text{, ahora teniendo en cuenta que}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ siendo } n \in N \text{, queda } = \frac{0 + 0 - 0}{5 - 0 + 0} = 0$$

b) Este límite presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, para salvar esta indeterminación es necesario llevarla primero a la forma ∞/∞ y luego trabajar como en el ejemplo anterior. Por lo tanto se multiplica y divide por el conjugado de la expresión.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3} - 5x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 - 3} - 5x\right).\left(\sqrt{2x^2 - 3} + 5x\right)}{\left(\sqrt{2x^2 - 3} + 5x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3 - 25x^2}{\sqrt{2x^2 - 3} + 5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-23x^2 - 3}{\sqrt{2x^2 - 3} + 5x}$$. Ahora se divide numerador y denominador por x , quedando

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-23x^2}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2 - 3}}{x} + \frac{5x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-23x - \frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2 - 3}}{x} + 5}$$, para introducir x en la raíz cuadrada

tenemos que recordar que $|x| = \sqrt{x^2}$ y como $x \to \infty$, entonces x es positivo $\therefore$ $x = \sqrt{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-23x - \frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2 - 3}}{\sqrt{x^2}} + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-23x - \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}} + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-23x - \frac{3}{x}}{\sqrt{2 - \frac{3}{x^2}} + 5} = \frac{-\infty}{\sqrt{2} + 5} = -\infty$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Dada la función f tal que:

$$f(x) = \begin{cases} -4 - x & \text{si} \quad x < -5 \\ (x+3)^2 - 4 & \text{si} \quad -5 < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x + 5 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

encuentre el límite de f cuando nos aproximamos a cada uno de los valores del siguiente conjunto: $\{-8\,;\ -5\,;0\,;1\,;5\,;10\}$

2.- Responde por Verdadero o Falso, y justifica:

si los límites laterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

3.- Expresa, con tus palabras, el significado de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$ b) $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 0$ c) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$

d) $\lim_{x\to \infty^-} f(x) = 1$ e) $\lim_{x\to \infty^+} f(x) = 2$ f) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

4.- Dadas las siguientes funciones f, tales que:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

b) c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ d) $f(x) = \text{cosec}\,\frac{\pi.x}{2}$

determina en cada caso, completando la tabla, si f tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda o por la derecha.

Puedes representar la función con una calculadora gráfica o buscar un programa graficador de funciones en internet, si quieres confirmar la respuesta, o puedes confeccionar otras tablas de valores próximos.

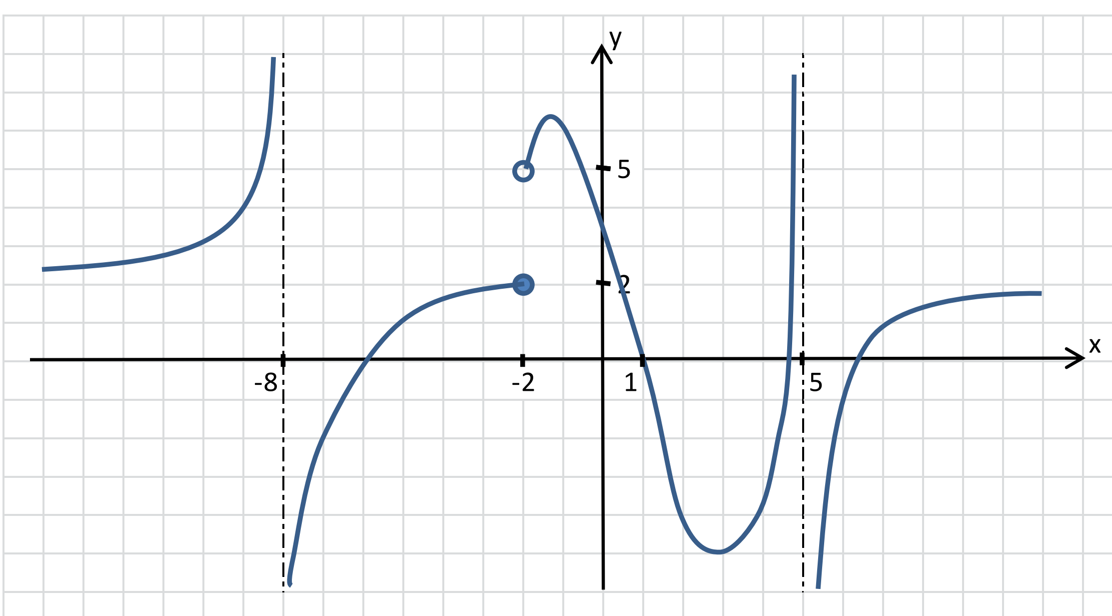
x	-2.5	-2.1	-2.01	-2.001	-1.5	-1.9	-1.99	-1.999
f(x)								

5.- Evalúa los límites que se indican a partir de la gráfica de la función f dada en la figura siguiente:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-8^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-8^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-8} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to5} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$



6.- Expresa el comportamiento de f en las proximidades de $x = 3$ empleando límites en los siguientes casos:

a) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi.x}{6}\right)$ d) $f(x) = \sec\left(\frac{\pi.x}{6}\right)$

7.- Encuentra los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 4^-} \frac{|x-4|}{x^2-16}$ b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+|x|}$ c) $\lim_{x\to -2} [x+3]$

d) $\lim_{x\to -4.8} [x+3]$ e) $\lim_{x\to 4} \frac{x-2}{x^2-16}$ f) $\lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x^2-16}$

8.- Establece si la proposición es Verdadera o Falsa, y justifica:

a) Si $f(x) = \begin{cases} -4, & x < -2 \\ 0, & x \geq -2 \end{cases}$ entonces $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

b) Para las funciones polinómicas, los límites laterales existen siempre y son iguales

c) Si $f(x) = \begin{cases} 5-x & , \quad x \leq 2 \\ x^2-6x+5, & x > 2 \end{cases}$ entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

9.- Calcula los siguientes límites para $x \to \infty$ ó para $x \to -\infty$

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+7x}{2x^2-16}$ b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4-2x^3-4x-7}{x^5+5x^4-11x+2}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\frac{1}{x^3}+1}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]$ e) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2+x} - \frac{x-1}{2x-1}$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{\sqrt{9x^2+3}}$

g) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$ h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1+x^4}}$ i) $\lim_{x\to\infty} \frac{|2x|+|x-2|}{x}$

10.- Obtiene los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^6-3x^2}{3x^5-4x^3}$ b) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{x^2-9}$ c) $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}$

d) $\lim_{x\to 4^+} \frac{5-x^2}{x-4}$ e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cosec} 3x}{x}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2+5}}{x^2}$

g) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{3}{x+3} - \frac{x-3}{x^2-9}\right)$

h) $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h+1}-1}{h}$

i) $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1}{h}$

11.- Dadas las siguientes funciones, identifica las asíntotas verticales y horizontales:

a) $y = \frac{x}{3-x}$ b) $y = \frac{x-5}{x^2-25}$ c) $y = \frac{x^2}{x-1}$

d) $y = \frac{1}{x^2+5x-18}$ e) $y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$

12.- Dadas $f(x) = \frac{1}{3-x}$ y $g(x) = \frac{1}{x-3}$ demuestre que $\lim_{x\to 3} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} g(x)$ no existen, y que en cambio existe $\lim_{x\to 3}[f(x) + g(x)]$.

¿Contradice este resultado a la propiedad que establece que el límite de una suma de funciones es la suma de los límites?

13.- Dibuja la gráfica de alguna función **f** que satisfaga las condiciones siguientes:

a) El dominio de f es $[-5\,;\,5]$ y además:

$$f(-5) = 0;\ \ f\,(-3) = 2;\ \ f(-1) = 0;\ \ f(0) = 0;\ \ f(1) = 0;\ \ f(3) = -2;\ \ f(5) = -4$$

$\lim_{x\to -5^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$

b) El dominio de f es $[\,-2\,;\,2\,]$ y la siguiente tabla de valores corresponde a f :

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	0	0	5	−5	3

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

4) Ejercicios adicionales

1.- Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

Dada f / $f(x)=\begin{cases} 4x+3 & si \quad x<1 \\ 6c-5 & si \quad 1\geq x \end{cases}$ **,** el valor de ***c*** para que f sea continua es : $\square$

A) 2 **B)** – 2 **C)** 0 **D) − 1**

2.- Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x + 3}$

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{t^4} - \dfrac{1}{t^3}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{2x}}{\sqrt{2x} - \sqrt[4]{x}}$

d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$