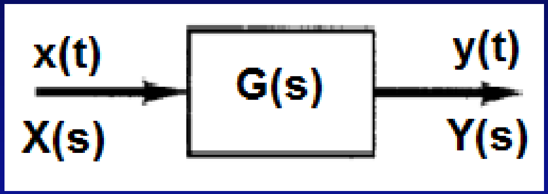
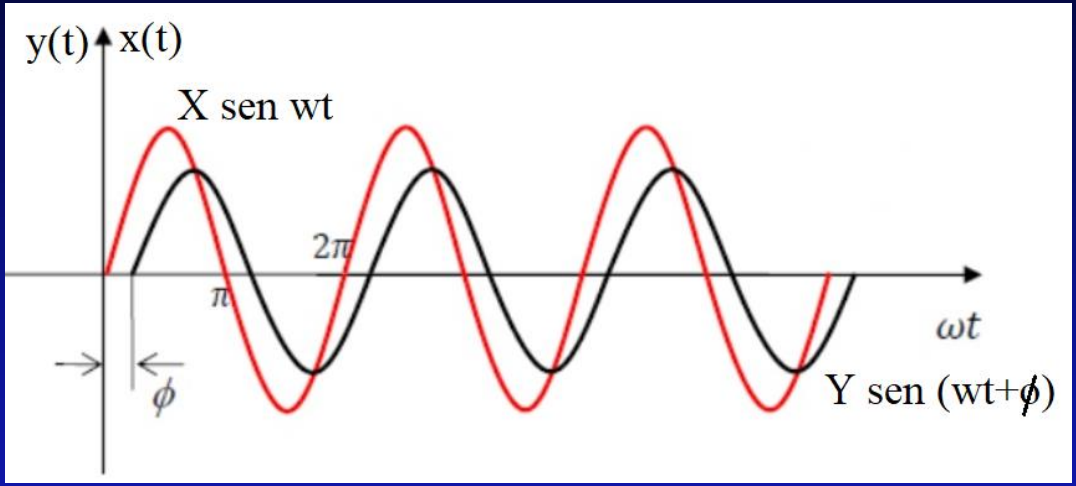
RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

RESPUESTA EN FRECUENCIA

Se define como la respuesta en estado estable de un Sistema, sometido a una señal sinusoidal de amplitud fija ***X***, pero a una frecuencia variable ***w*** en un determinado rango.





Dado una F. de T. G(s) , podemos representar la misma en funcion de jw , es decir

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Longrightarrow \quad G(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)}$$

Se demuestra que si el Sistema es estable y si la entrada es senoidal

x(t)=X.sen wt

Luego

y(t)=Y.sen(wt+ϕ)

RESPUESTA EN FRECUENCIA

Este desfasaje en módulo y fase está provocado por la Función de transferencia G(jw).

G(jw) es un n° complejo y se puede representar de 2 maneras.

a) **DIAGRAMAS DE BODE:** Representación de Magnitud (módulo) y Fase de G(jw) en un diagrama semilogaritmico.

b) **DIAGRAMAS DE NYQUIST:** Representación de Módulo y Fase de G(jw) en el plano complejo.

Ambos diagramas permiten en un pequeño espacio , representar un amplio espectro de frecuencias.

RESPUESTA EN FRECUENCIA

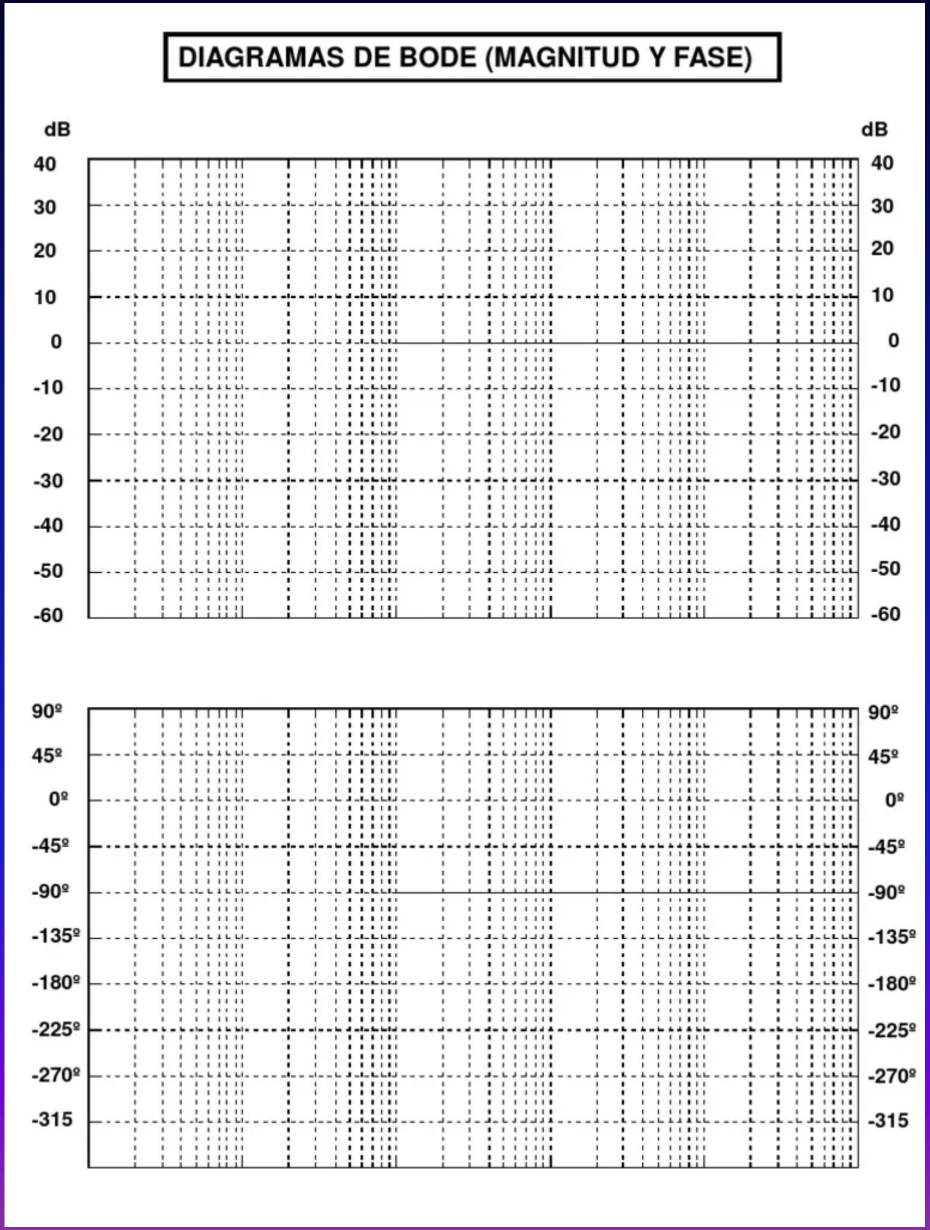
DIAGRAMAS DE BODE

Son diagramas que representan la respuesta en Frecuencia de una Función de Transferencia G(jw).

En ellos se representa:

1) El *Diagrama de Magnitud de Bode* en el que se grafica |G(jw)| en decibelios ,como función de la frecuencia en escala logarítmica.
2) El *Diagrama de Fase de Bode* en el que se grafica Arg G(jw) en grados ,como función de la frecuencia en escala logarítmica.

$|G(jw)|_{db} = 20.\log|G(jw)|.$



RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS DE BODE

Ventajas

a) Al usar un diagrama logarítmico , se puede convertir la multiplicación de amplitudes en suma de las mismas.

Ejemplo

$$20 \log(10K)= 20(\log 10 + 20 \log K) = 20 + 20 \log K$$

b) Se puede aproximar una curva , dibujando asíntotas.

c) Permite representar las características de baja y alta frecuencia en un solo diagrama.

Octava : banda de frecuencias que va de w_1 a $2w_1$

Década : banda de frecuencias que va de w_1 a $10w_1$

REPRESENTACION DE G(S) USANDO BODE

Sea la siguiente Función de Transferencia

$$G(s) = \frac{K_1\,(s+d)}{s\,(s+e).(as^2+bs+c)}$$

REPRESENTACION DE G(S) USANDO BODE

Sea la siguiente Función de Transferencia

RESPUESTA EN FRECUENCIA

REPRESENTACION DE G(S) USANDO BODE

Sea la siguiente Función de Transferencia

$$G(s) = \frac{K_1\ (s+d)}{s\ (s+e).(s^2+bs+1)}$$

Podemos entonces reemplazar s=jw

luego

$$G(jw) = \frac{K_1\ (jw+d)}{jw\ (jw+e).((jw)^2+bjw+1)}$$

$$G(jw) = \frac{K_1.d}{e}.\frac{(\frac{jw}{d}+1)}{jw.\left(\frac{jw}{e}+1\right).((jw)^2+bjw+1)}$$

K

Podemos entonces representar gráficamente (asintotas) cada uno de estos factores en un diagrama semilogaritmico , tanto en modulo como en fase y luego realizar la suma de sus asíntotas para lograr un representación general

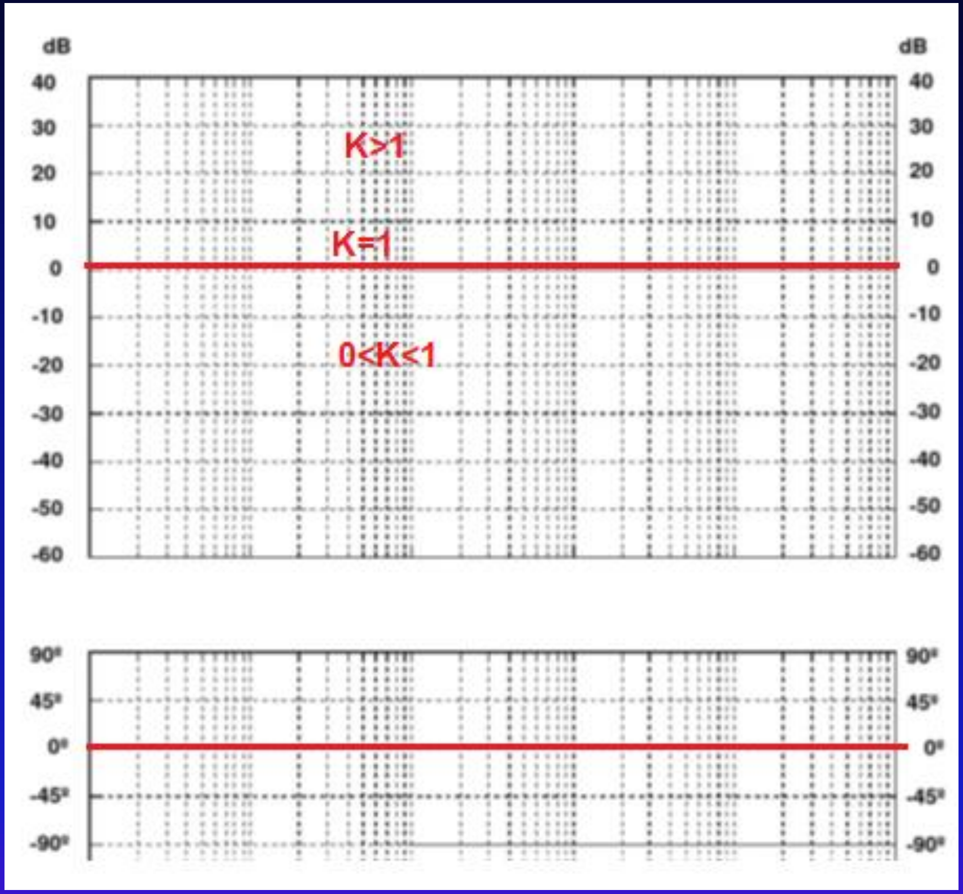
RESPUESTA EN FRECUENCIA

FACTORES BASICOS

1) Ganancia K

Una Ganancia se limita a amplificar o atenuar la entrada sin introducir retrasos o adelantos en la señal de salida.

Por tanto el D. de Bode será nulo en fase , pero nó en amplitud



AMPLITUD

$$Si \quad K > 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log|K| \quad es \ (+)$$

$$Si \quad K = 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log|K| \quad es \ (0)$$

$$Si \quad 0 < K < 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log|K| \quad es \ (-)$$

FASE

$$\varphi = Arg\ G(jw) = tg^{-1}(\frac{0}{K}) = tg^{-1}0 = 0$$

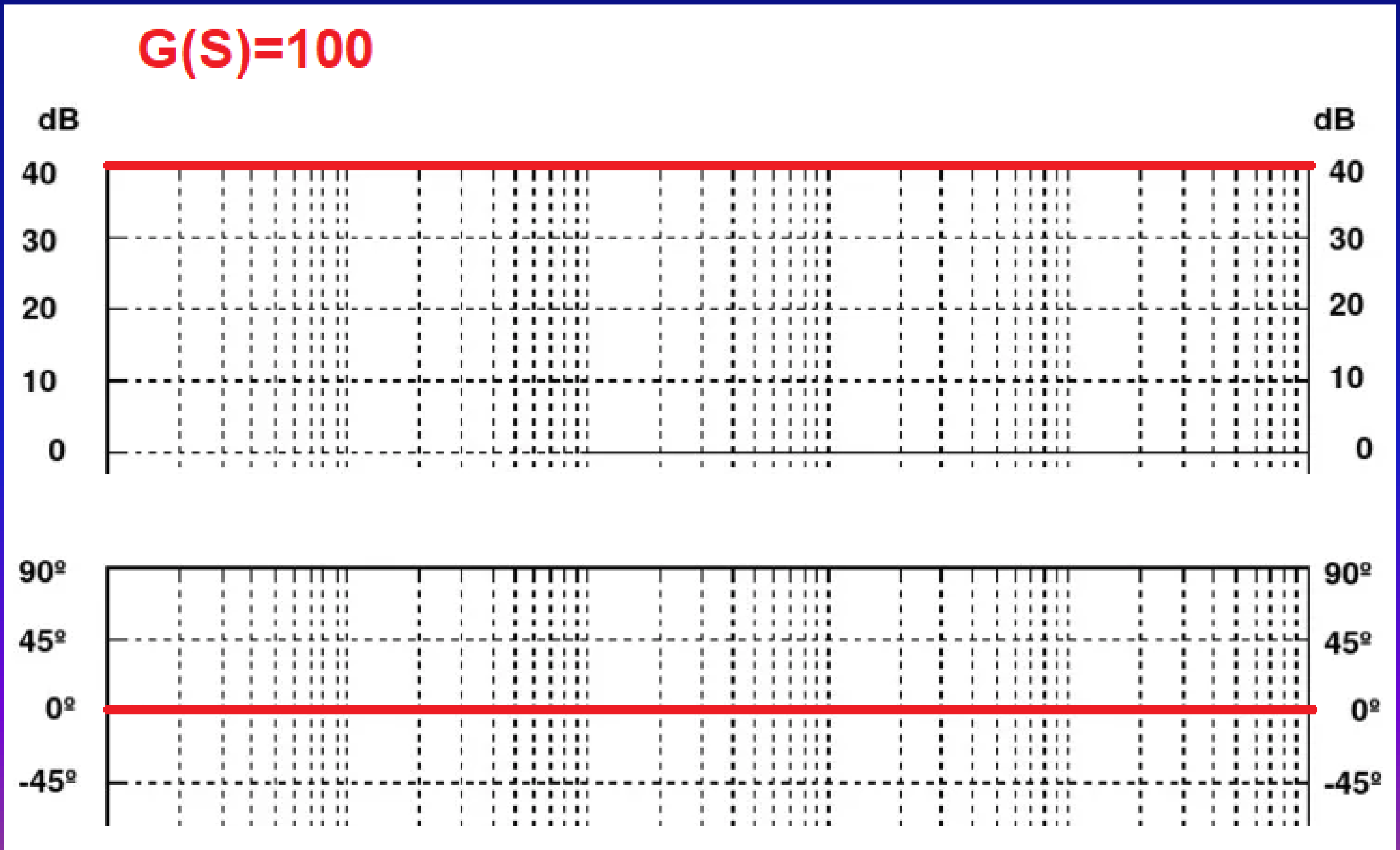
RESPUESTA EN FRECUENCIA

EJEMPLO

$$G(s) = 100 \qquad\qquad G(jw) = 100$$

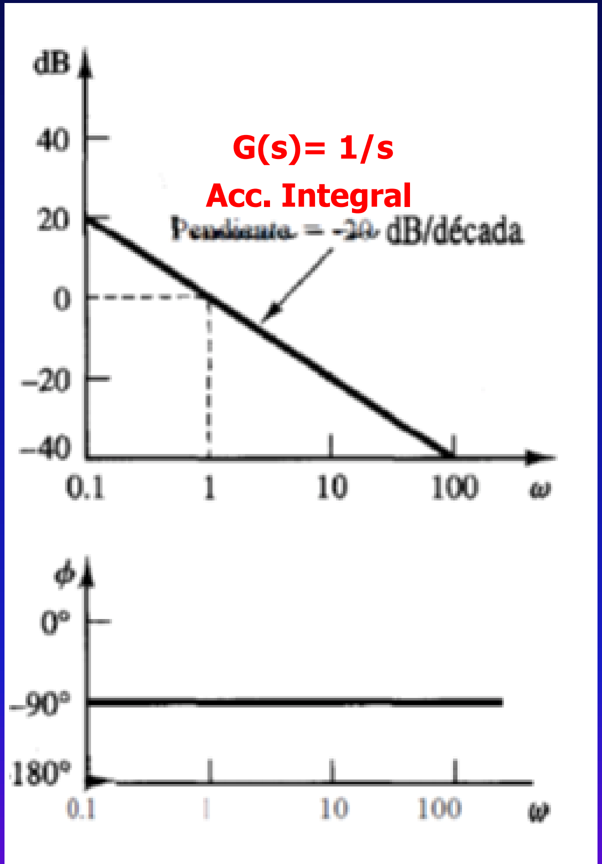
$$K_{db} = |G(jw)|_{db} = 20.\,log|100| = 20.\,log\,100 = 20.\,2 = 40\text{ db}$$

$$\varphi = Arg\ G(jw) = tg^{-1}(\frac{Im\ G(jw)}{Re\ G(jw)} = tg^{-1}0 = 0$$

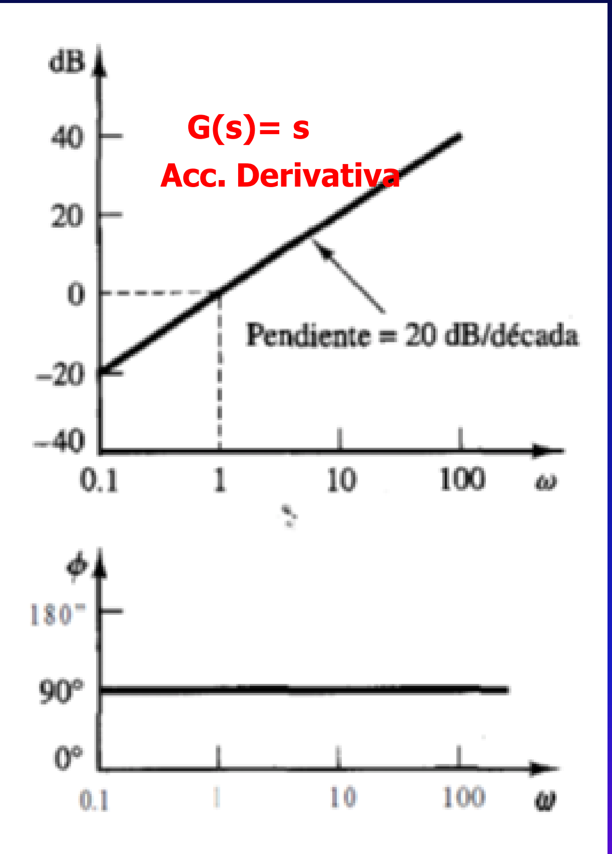


RESPUESTA EN FRECUENCIA

2) Polos y Ceros en el origen $(jw)^{\pm 1}$ (Acción integral ó derivativa)



Trazas de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$



Trazas de Bode de $G(j\omega) = j\omega$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

2) <u>Polos y Ceros en el origen</u> $(jw)^{\pm 1}$ (Acción integral ó derivativa)

$$G(s) = s \quad \Rightarrow \quad G(jw) = jw$$

<u>Módulo</u>

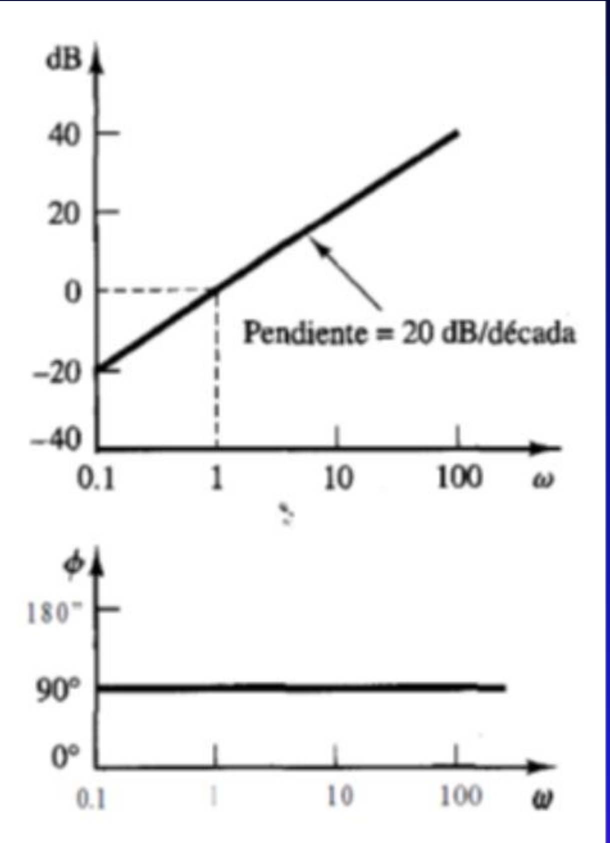
$$|G(jw)|_{db} = 20\, log\, |G(jw)| = 20\, log\, w$$

$$para\ \ w = 1 \quad \Rightarrow \quad 20\, log\, 1 = 0\, db$$

$$para\ \ w = 10 \quad \Rightarrow \quad 20\, log\, 10 = 20\, db$$

<u>Fase</u>

$$\varphi = Arg\, G(jw) = tg^{-1}\left(\frac{w}{0}\right) = tg^{-1}\infty = 90°$$



Trazas de Bode de $G(j\omega) = j\omega$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

2) Polos y Ceros en el origen $(jw)^{\pm 1}$ (Acción integral ó derivativa)

$$G(s) = s^{-1} \quad \Rightarrow \quad G(jw) = (jw)^{-1}$$

Módulo

$$|G(jw)|_{db} = 20\,log\,\left|G(jw)^{-1}\right| = 20\,log\,\left|\frac{1}{jw}\right| =$$

$$|G(jw)|_{db} = 20\,log\,1 - 20\,log\,(jw) = -20\,log(jw)$$

$$para\;\; w = 1 \quad \Rightarrow \quad 20\,log\,1 = 0\,db$$

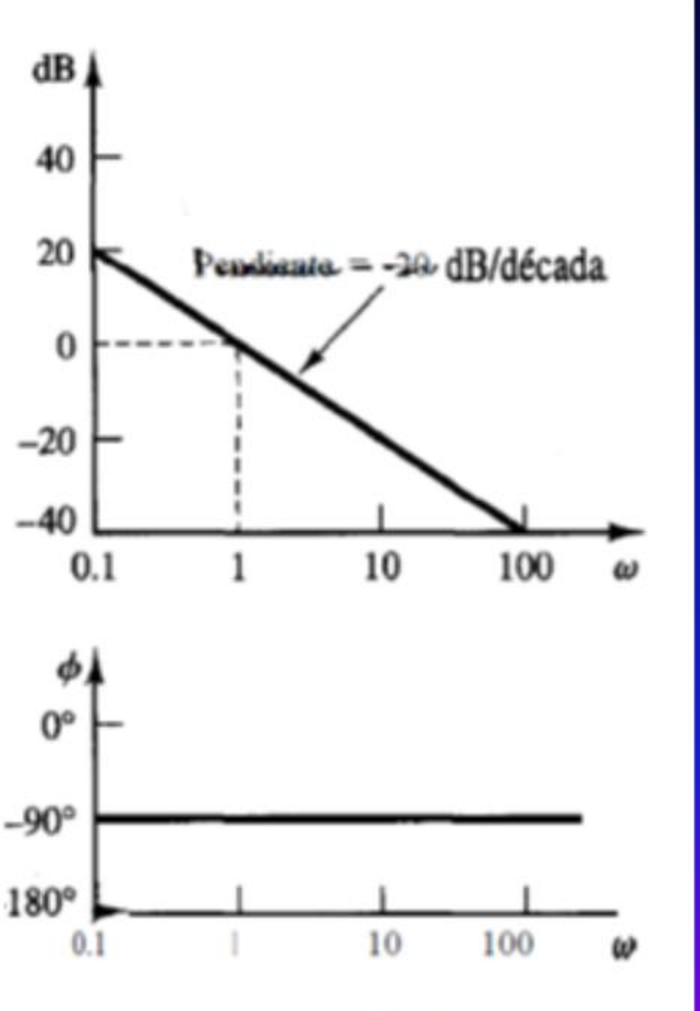
$$para\;\; w = 10 \quad \Rightarrow \quad -20\,log\,10 = -20\,db$$

Fase

$$\varphi = Arg \mid G(jw) = tg^{-1}\left(\frac{w}{0}\right) = tg^{-1}\infty = 90°$$

$$\varphi = Arg\,G(jw) = tg^{-1}(jw)^{-1} = tg^{-1}\left(\frac{jw}{0}\right)^{-1} =$$

$$\varphi = -tg^{-1}\infty = -90°$$



Trazas de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

3) Factores de Primer Orden (Polos ó Ceros simples) $(1+jwT)^{\pm 1}$

3a) Factores de Primer Orden (Polo simple) $(1+jwT)^{-1}$

Módulo

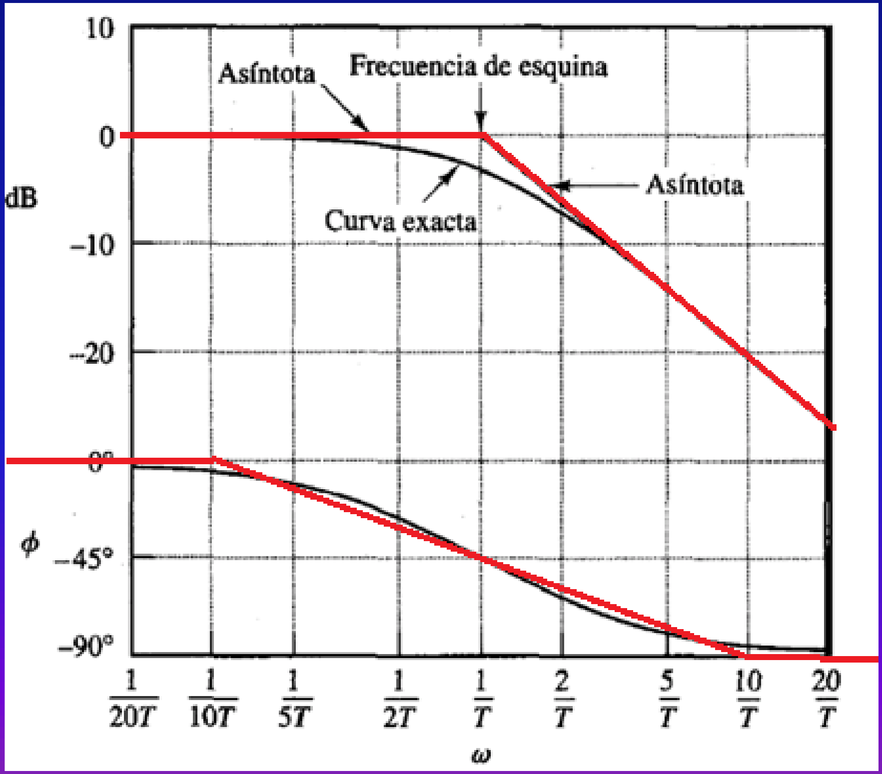
$$20\log\left|\frac{1}{1+jwT}\right| = -20\log|1+jwT| = -20\log\sqrt{1+w^2T^2} \quad db$$

$$Para \quad w \ll \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow -20\log 1 = 0\ db$$

$$Para \quad w \gg \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow -20\log wT\ \ db$$

$$Para \quad w = \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow -20\log 1 = 0\ \ db$$

$$Para \quad w = \frac{10}{T} \qquad \Rightarrow -20\log 10 = -20\ \ db$$



RESPUESTA EN FRECUENCIA

3a) <u>Factores de Primer Orden</u> (Polo simple) $(1 + jwT)^{-1}$

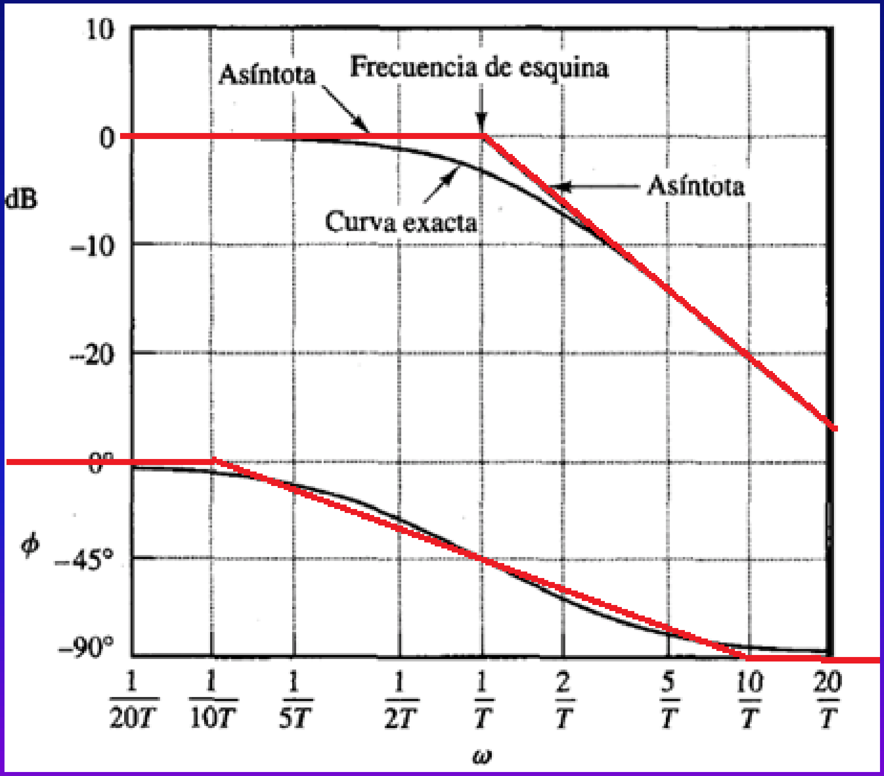
<u>Fase</u>

$$\varphi = tg^{-1}\frac{0}{1} - tg^{-1}\frac{wT}{1} = 0° - tg^{-1}wT = -tg^{-1}wT$$

$$w \ll \frac{1}{T} \;\Rightarrow\; \varphi = -tg^{-1}0 = 0°$$

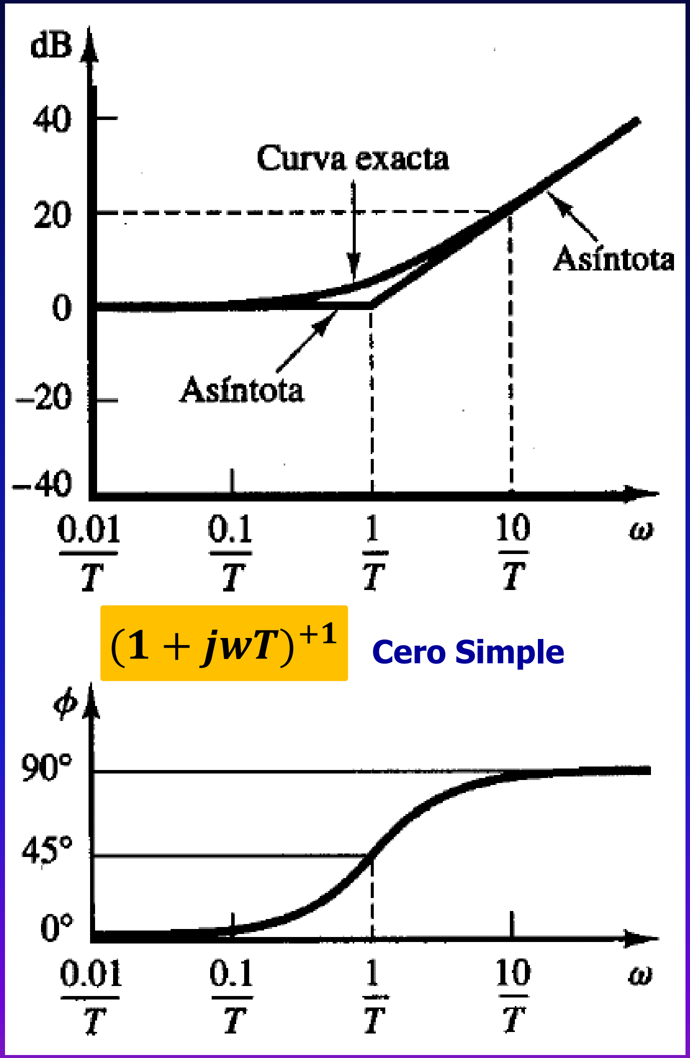
$$w \gg \frac{1}{T} \;\Rightarrow\; \varphi = -tg^{-1}\infty = -90°$$

$$w = \frac{1}{T} \;\Rightarrow\; \varphi = -tg^{-1}1 = -45°$$



RESPUESTA EN FRECUENCIA

3) Factores de Primer Orden (Ceros simples) $(1 + jwT)^{+1}$



El procedimiento de cálculo es exactamente igual al anterior

RESPUESTA EN FRECUENCIA

4) Factores Cuadraticos $\left[1 + 2\xi\left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right) + \left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

Sea

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\varepsilon\tau s + 1}$$

Sabemos que

$$w_n = \frac{1}{\tau}$$

luego

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi}{\omega_m} s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_m} + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_m}}$$

CALCULO DEL MODULO

$$|G(j\omega)|_{db} = \underbrace{20 \log 1}_{=0} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_m^2}}$$

p/ $\omega \ll \omega_m \quad |G(j\omega)|_{db} = -20 \log 1 = 0$ db

$\omega \gg \omega_m \quad |G(j\omega)|_{db} = -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_m^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_m}$ db

RESPUESTA EN FRECUENCIA

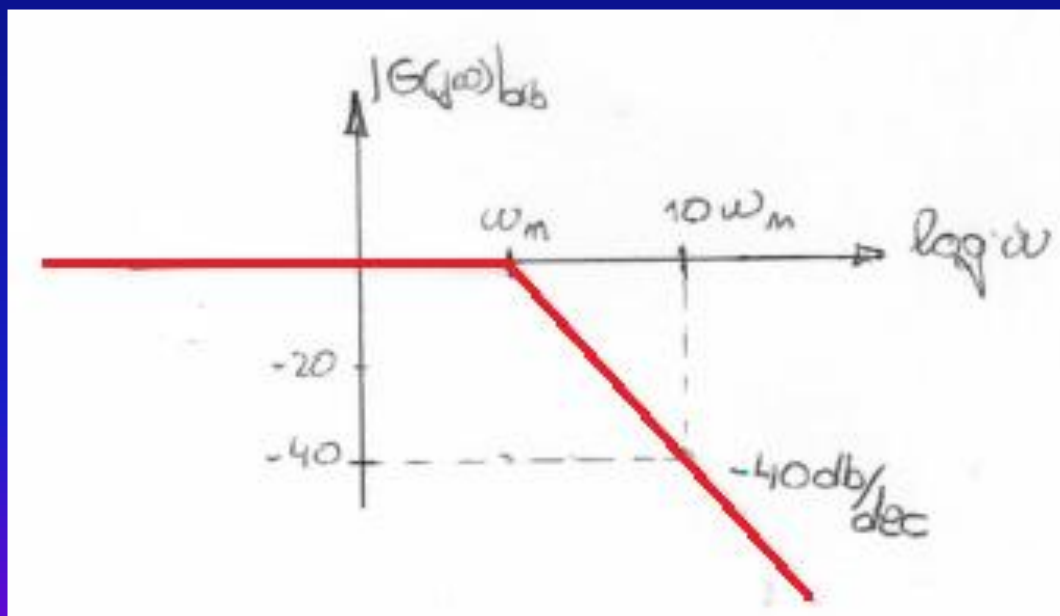
4) Factores Cuadraticos $\left[1 + 2\xi\left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right) + \left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

Luego, si

$$\omega = \omega_m \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = -40 \log 1 = 0 \text{ db}$$

$$\omega = 10\,\omega_m \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = -40 \log 10 = -40 \text{ db}$$

Gráficamente



RESPUESTA EN FRECUENCIA

4) Factores Cuadraticos $\left[1 + 2\xi(j\,{}^{w}/_{w_n}) + (j\,{}^{w}/_{w_n})^2\right]^{\pm 1}$

Cálculo de FASE

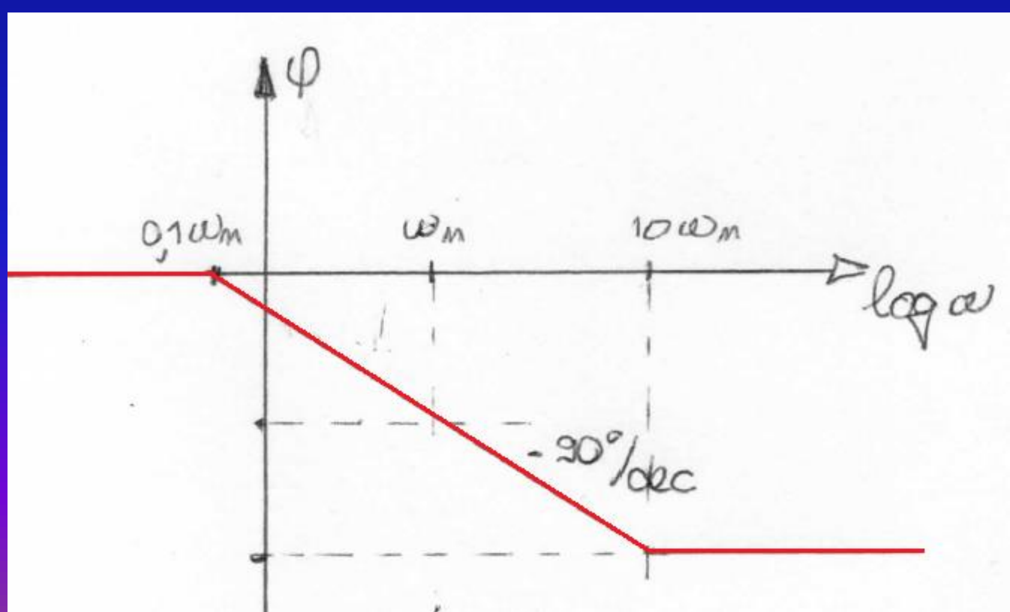
$$\varphi = -tg^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow \varphi = -tg^{-1}\,0 = 0°$$

$$\omega = \omega_n \Rightarrow \varphi = -tg^{-1}\,\infty = -90°$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow \varphi = -tg^{-1}(-0°) = -180°$$

Gráficamente



RESPUESTA EN FRECUENCIA

4) Factores Cuadraticos $\left[1+2\xi\left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right)+\left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

ξ determina el Pico de Resonancia

$$\boxed{\xi = 0{,}1} \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = -20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(0{,}2\,\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$p/\ \omega=\omega_n \Rightarrow -20\log\sqrt{(0{,}2)^2} = -20\log 0{,}2 = \boxed{14\,db}$$

$$\xi = 0{,}2 \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = 8\,db$$

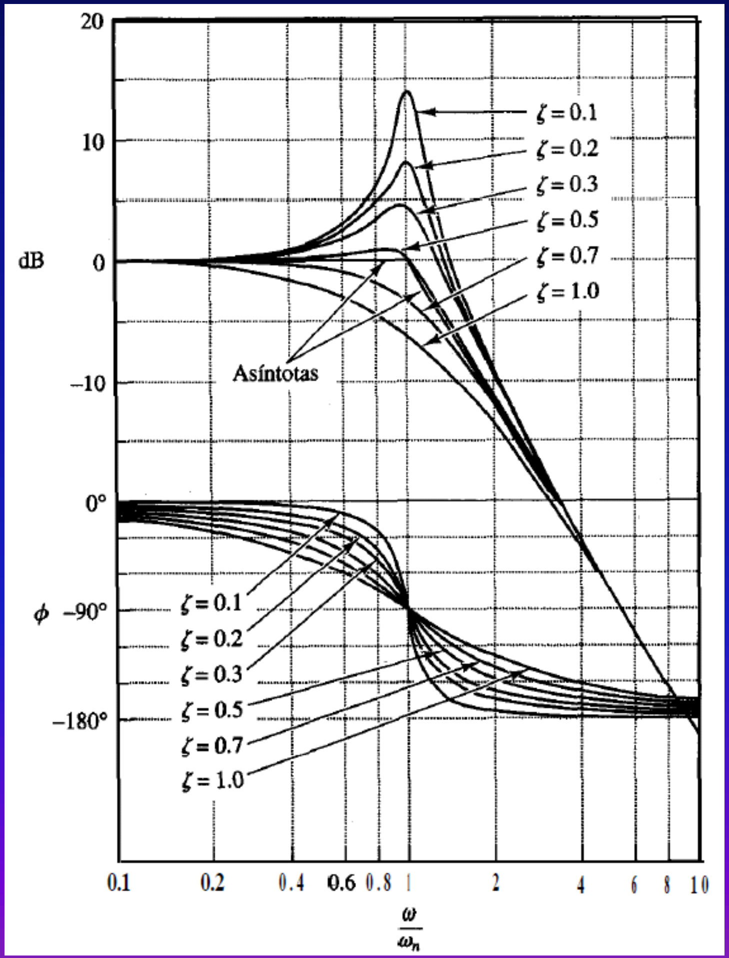
$$\xi = 0{,}7 \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = -2{,}92\,db$$

$$\xi = 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = -6\,db$$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS DE BODE

Factores Cuadráticos $[1 + 2\xi(j\,{}^{w}/_{w_n}) + (j\,{}^{w}/_{w_n})^2]^{\pm 1}$



p/ $\xi = 0{,}1$ $|G(jw)|_{db} = 14$ db

p/ $\xi = 0{,}2$ $|G(jw)|_{db} = 8$ db

p/ $\xi = 0{,}3$ $|G(jw)|_{db} = 4{,}4$ db

p/ $\xi = 0{,}5$ $|G(jw)|_{db} = 0$ db

p/ $\xi = 0{,}6$ $|G(jw)|_{db} = -1{,}6$ db

p/ $\xi = 0{,}7$ $|G(jw)|_{db} = -2{,}9$ db

p/ $\xi = 1$ $|G(jw)|_{db} = -6$ db

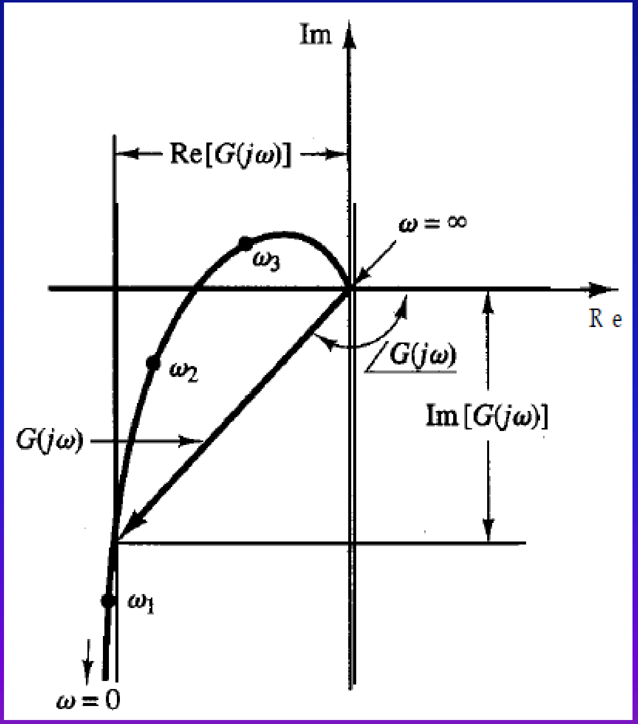
RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS NYQUIST

La Traza polar de una Función de Transferencia senoidal G(jw) ,es una gráfica de la *magnitud (modulo) de G(jw)* contra el *ángulo de fase de G(jw)* en coordenadas polares ,conforme w varia de cero a infinito.

Son también denominados ***Diagramas Polares***.

Por tanto, la traza polar es el lugar geométrico de los vectores $|G(jw)|, Arg\ G(jw)$ conforme w varía de cero a infinito.



Ventajas

Una ventaja de usar un diagrama polar es que representa, en una sola gráfica, las características de la respuesta en frecuencia de un sistema en el rango de frecuencia completo.

Desventajas

Una desventaja es que la traza no indica en forma clara la contribución de todos los factores individuales de la función de transferencia en lazo abierto.

RESPUESTA EN FRECUENCIA

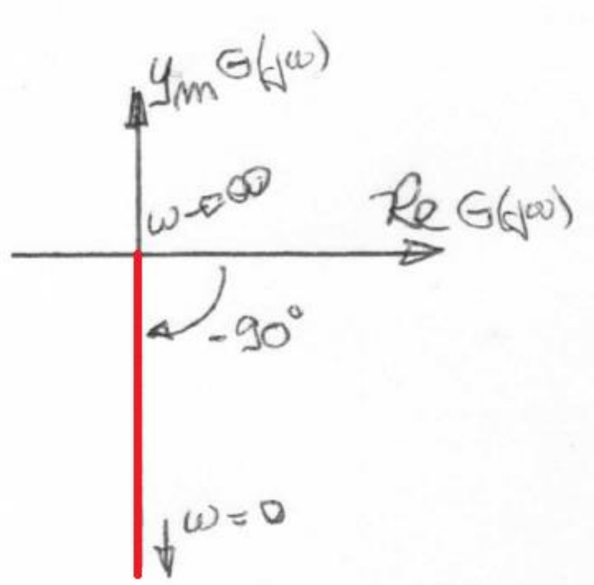
DIAGRAMAS DE NYQUIST

Polo en el origen $(jw)^{-1}$ (Acción integral)

FACTOR INTEGRAL $G(jw) = \dfrac{1}{jw}$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Ym^2} = \boxed{\frac{1}{\omega}}$$

$$Arg\ G(j\omega) = tg^{-1}\frac{Ym\,G(j\omega)}{Re\,G(j\omega)} = \frac{-\frac{1}{\omega}}{0} = -tg^{-1}\infty = \boxed{-90^\circ}$$



RESPUESTA EN FRECUENCIA

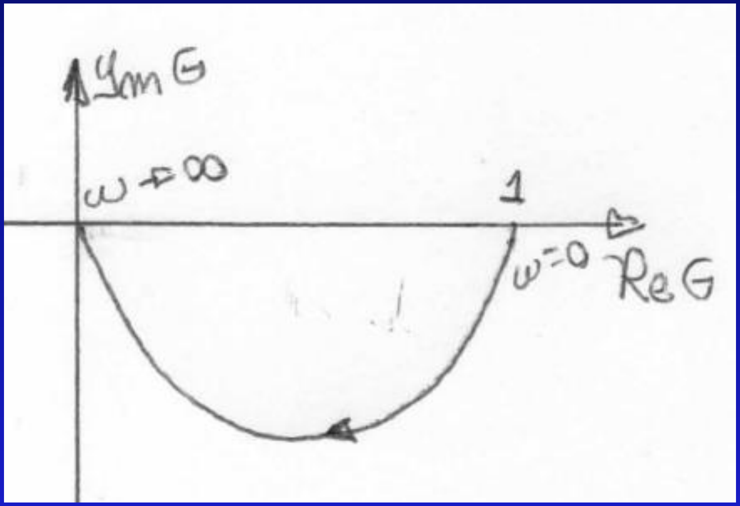
DIAGRAMAS DE NYQUIST

Factor de 1° Orden

$$G(jw) = \frac{1}{1 + jwT}$$

$$G(jw) = \frac{1}{1 + jwT} \cdot \frac{1 - jwT}{1 - jwT} = \frac{1 - jwT}{1 + w^2T^2}$$

$$\boxed{G(jw) = \frac{1}{1 + w^2T^2} - j\frac{wT}{1 + w^2T^2}}$$

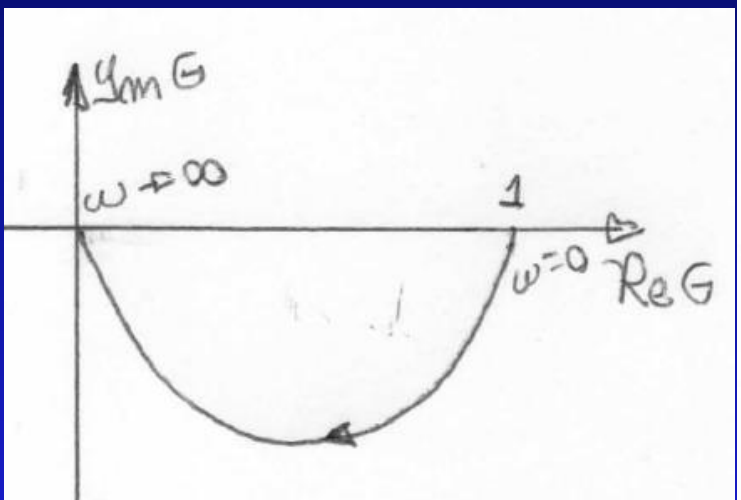


RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS DE NYQUIST

Factor de 1° Orden

$$G(jw) = \frac{1}{1 + jwT}$$



$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

$$\operatorname{Arg} G(j\omega) = \underbrace{tg^{-1}\frac{0}{1}}_{=0} - tg^{-1}\,\omega T = -tg^{-1}\,\omega T$$

p/ $\omega = 0$ $\quad |G(j\omega)| = 1$

$\operatorname{Arg} G(j\omega) = 0$

p/ $\omega = \frac{1}{T}$ $\quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{Arg} G(j\omega) = -45°$

p/ $\omega \to \infty$ $\quad |G(j\omega)| = 0$

$\operatorname{Arg} G(j\omega) = -90°$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS DE NYQUIST

Factores Cuadraticos $\left[1+2\xi(j\,{}^{w}/_{w_n})+(j\,{}^{w}/_{w_n})^2\right]^{\pm1}$

Sea

$$G(s)=\frac{1}{\tau^2s^2+2\varepsilon\tau s+1}$$

Sabemos que

$$w_n=\frac{1}{\tau}$$

luego

$$G(s)=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\xi j\frac{\omega}{\omega_n}+1}=\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+4\xi^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

$$\operatorname{Arg} G(j\omega)=-\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

p/ $\xi>0$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS DE NYQUIST

Factores Cuadraticos $\left[1 + 2\xi\left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right) + \left(j\,{}^{w}/_{w_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

p/ $\omega = 0$ $\quad |G(j\omega)| = 1$

$\text{Arg } G(j\omega) = 0^\circ$

p/ $\omega \to \infty$ $\quad |G(j\omega)| = 0$

$\text{Arg } G(j\omega) = 0^\circ$

<u>corte en los ejes</u>

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} - j\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

p/ $\omega = 0$ $\quad G(j0) = +1 - j0$

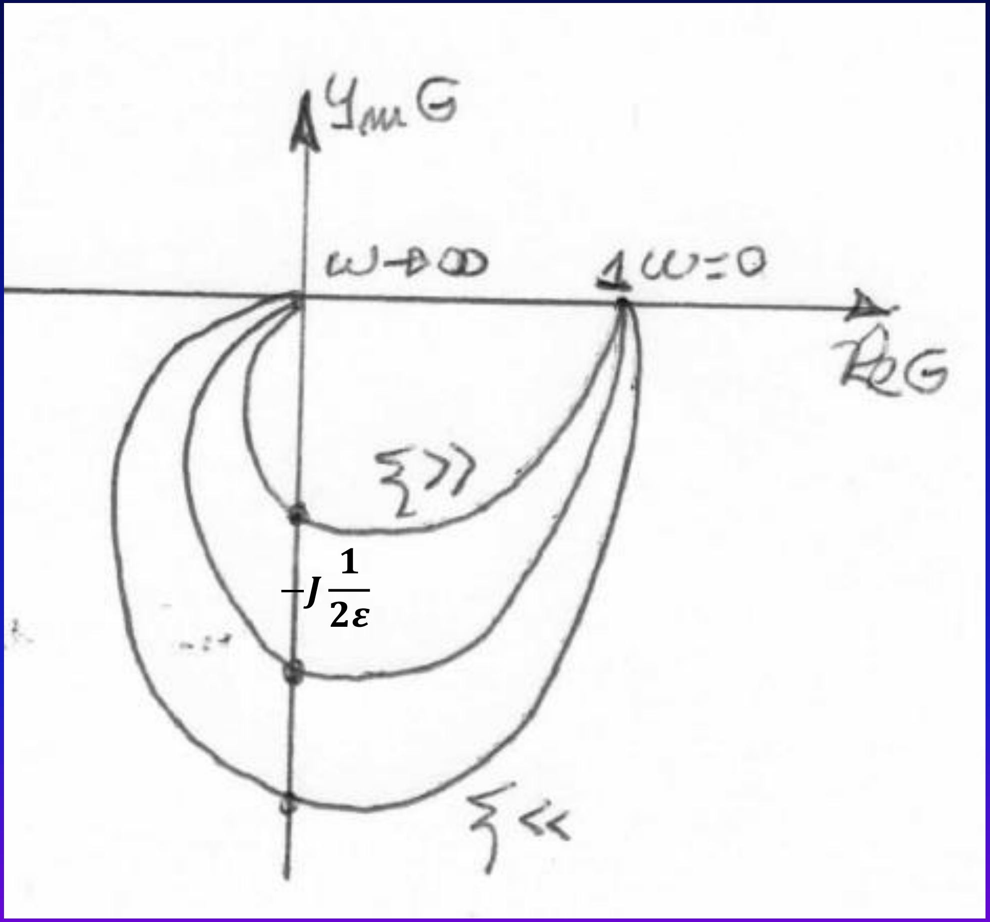
p/ $\omega = \infty$ $\quad G(j\infty) = -0 - j0$

p/ $\omega = \omega_n$ $\quad G(j\omega_n) = -\frac{1}{2\xi}$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS DE NYQUIST

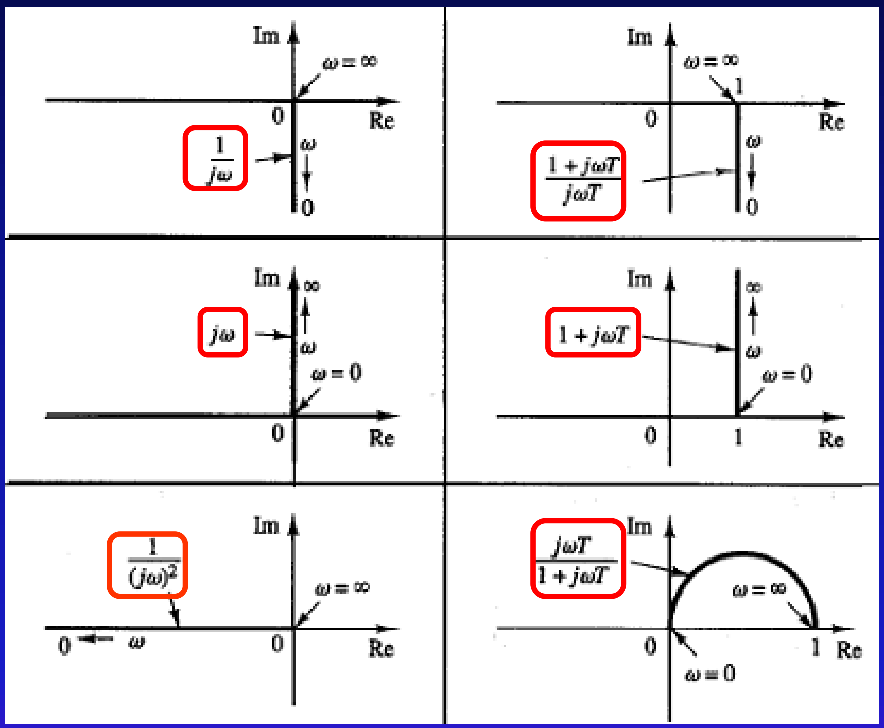
Factores Cuadraticos $\left[1 + 2\xi(j\,{}^{w}/_{w_n}) + (j\,{}^{w}/_{w_n})^2\right]^{\pm 1}$

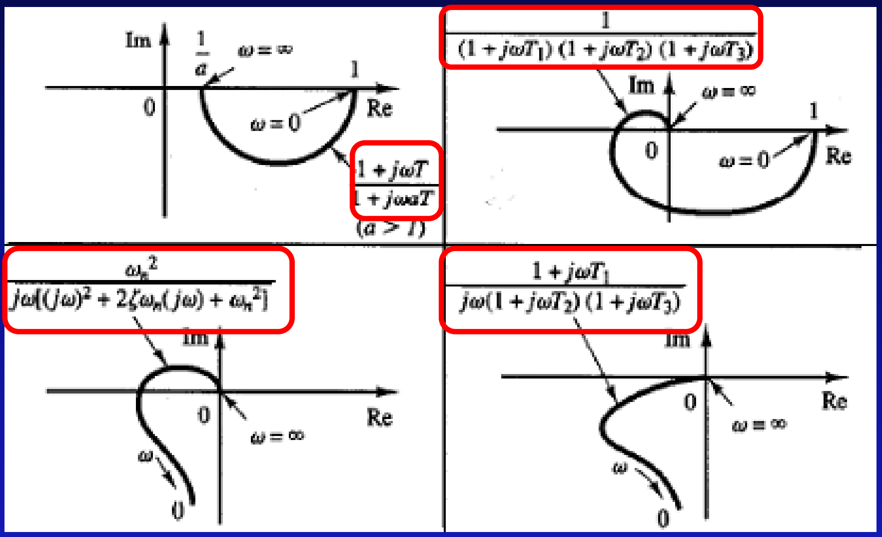


RESPUESTA EN FRECUENCIA

DIAGRAMAS NYQUIST

Ejemplos



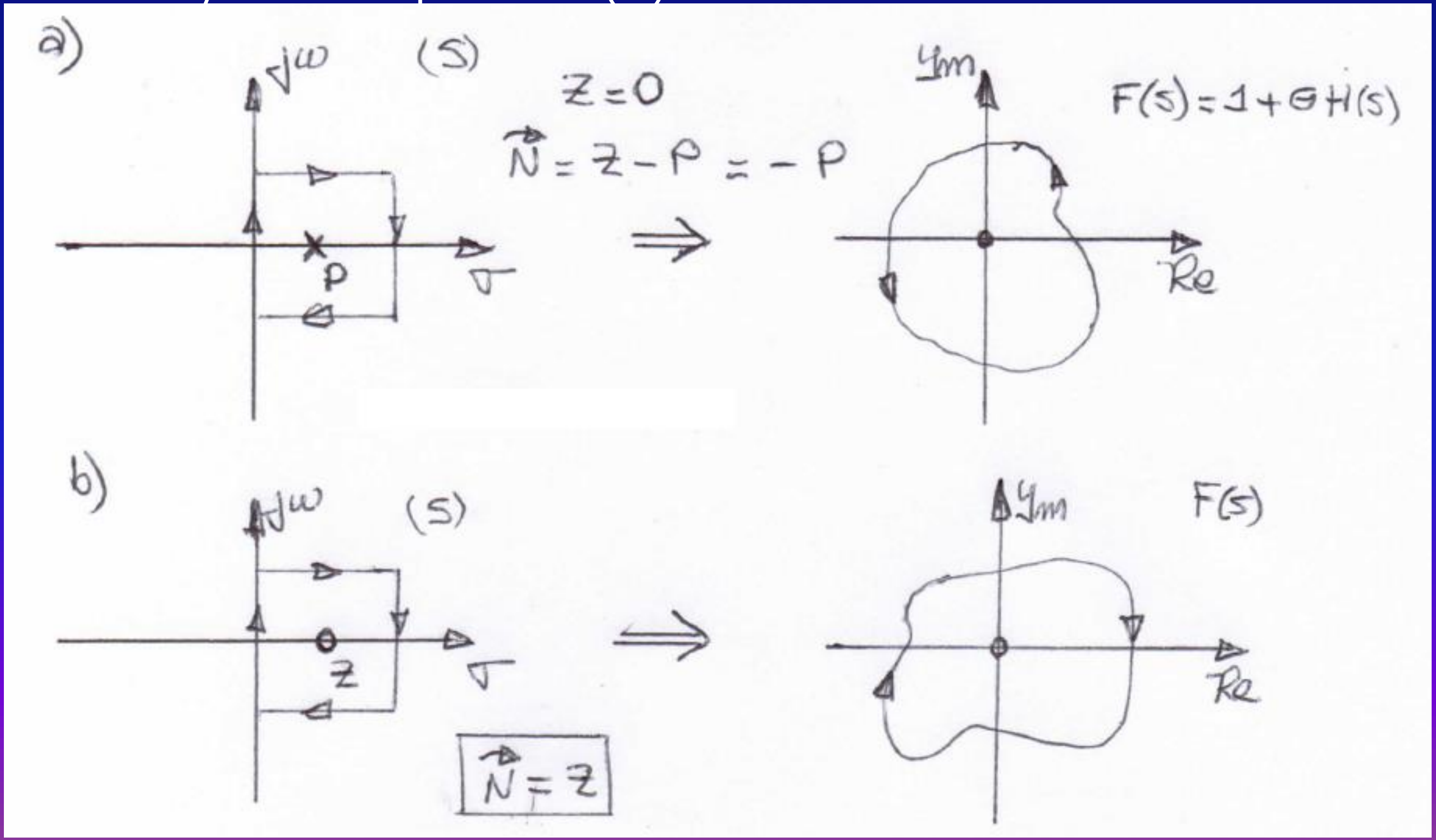


TEOREMA DE LA TRANSFORMACION

Para una trayectoria cerrada continua en el plano **s**=a+jb que no pasa por ningún punto singular ,le corresponde una curva cerrada en el plano **F(s)= Re + j Im**.

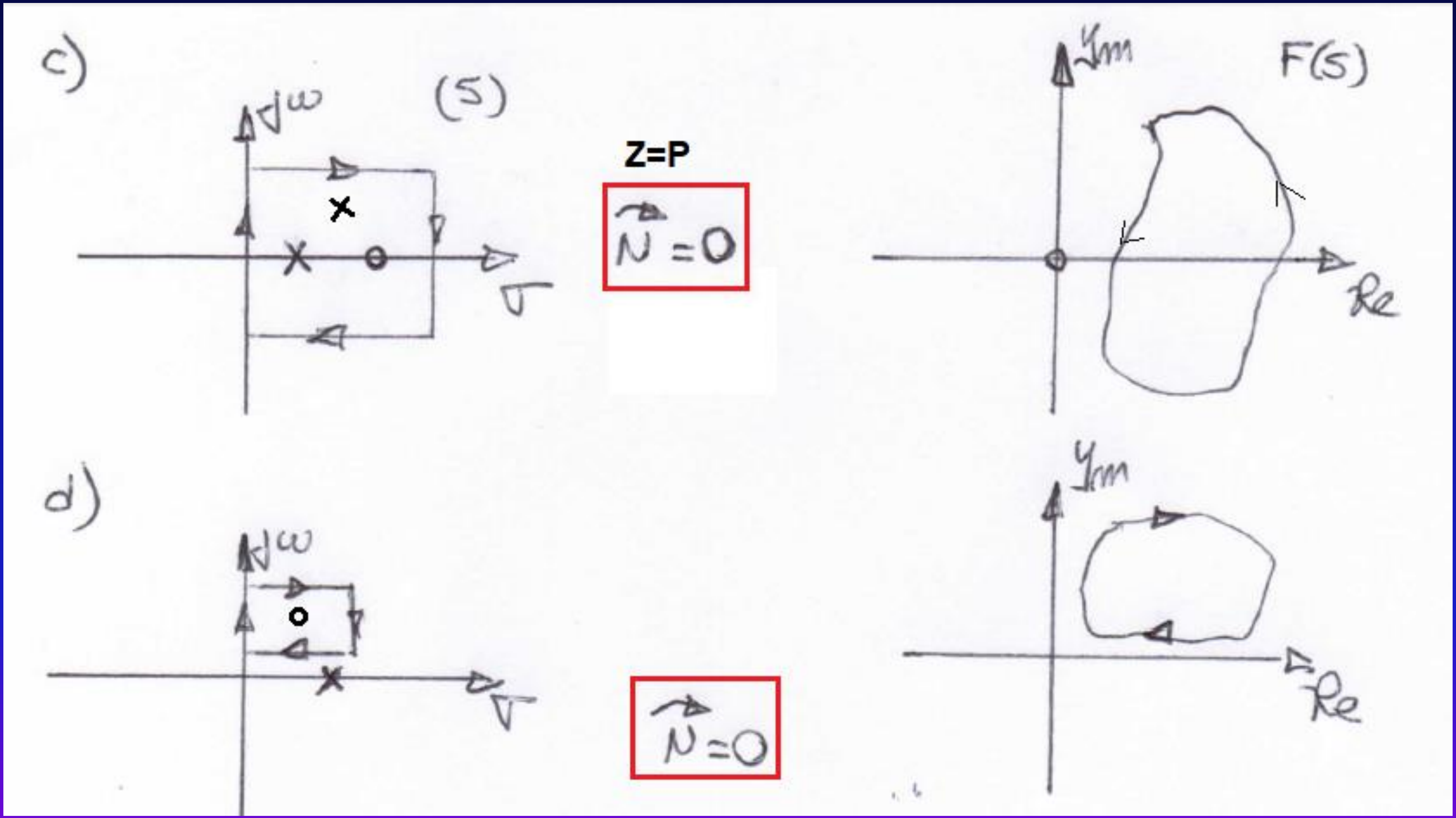
Esta curva cerrada llamada *Rodeo* ,estará alrededor del origen de F(s) ,y el sentido del rodeo alrededor del mismo será :

- Sentido Antihorario si hay un polo a parte real (+)
- Sentido Horario si hay un cero a parte real (+)



TEOREMA DE LA TRANSFORMACION

- No habrá rodeos al origen si hay igual cantidad de ceros y polos.



TEOREMA DE LA TRANSFORMACION

Para una trayectoria cerrada continua en el plano **s**=a+jb que no pasa por ningún punto singular ,le corresponde una curva cerrada en el plano **F(s)= Re + j Im**.