Sistemas de ecuaciones

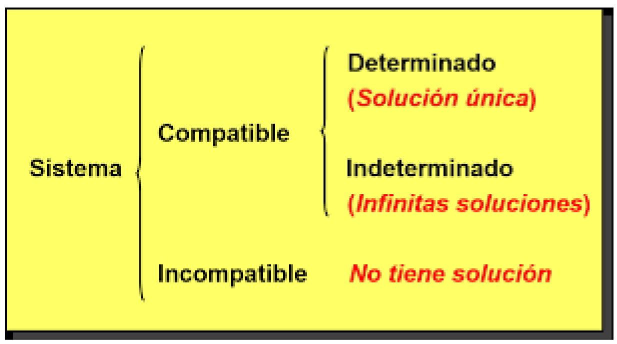
Resolver un sistema es hallar la intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones que lo forman o lo que es lo mismo es encontrar el o todos los pares ordenados (x , y) de números reales que verifiquen ambas ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones puede clasificarse según tenga o no solución.

Cuando sí la tiene el sistema se llama Compatible, cuando no la tiene se llama Incompatible.

Cuando el sistema tiene solución, puede ser que admita una única solución en cuyo caso se denomina Compatible Determinado, o puede tener infinitas soluciones y recibe el nombre de Compatible Indeterminado.

Esquemáticamente:

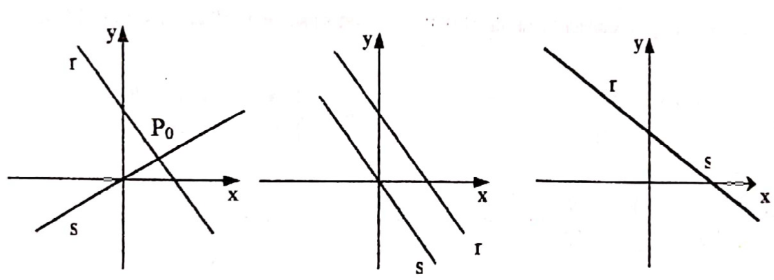


Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = r \\ a'x + b'y = s \end{cases}$$

donde: $\begin{cases} x \text{ e } y \text{ son las incógnitas} \\ a, b, \ a', b' \text{ son los coeficientes de las incógnitas} \\ r, s \text{ son los términos independientes} \end{cases}$



Rectas que se cortan. El sistema tiene una solución $\Leftrightarrow r \cap s \equiv P_0$

Rectas paralelas. El sistema no tiene solución $\Leftrightarrow r \cap s \equiv \emptyset$

Rectas coincidentes. El sistema tiene infinitas soluciones $\Leftrightarrow r \cap s$ infinitas soluciones

Solución

Una Solución del sistema (si existe) es la pareja de valores (x_0, y_0) que verifica simultáneamente las dos ecuaciones del mismo. Esto significa que se debe cumplir que:

$$\begin{cases} ax_0 + bx_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$$ (se reemplaza en el sistema x e y por x_0 e y_0)

Métodos de resolución

Existen varios métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, veamos algunos:

- **Método de Igualación**

Para aplicar este método en la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se procede según los siguientes pasos:

1) Despejar la misma incógnita de cada ecuación.
2) Igualar ambos resultados.
3) Resolver la ecuación obtenida.
4) Sustituir el valor de la incógnita hallada en cualquiera de las ecuaciones para calcular la incógnita que falta.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -14 & (1) \\ 3x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1): $x = \frac{(-14+3y)}{2}$ (3)

De (2): $x = \frac{(1-y)}{3}$ (4)

Luego, igualando (3) y (4) y resolviendo:

$$\frac{-14 + 3y}{2} = \frac{1 - y}{3}$$

$$3(-14 + 3y) = 2(1 - y)$$

$$-42 + 9y = 2 - 2y$$

$$9y + 2y = 2 + 42$$

$$11y = 44$$

$$y = \frac{44}{11}$$

$$y = 4 \qquad (5)$$

Se reemplaza (5) en (3) o (4) para obtener "x":

$$x = \frac{(1-4)}{3} = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \therefore \quad x = -1$$

Se verifica la solución (x = -1, y = 4) en el sistema

$$\begin{cases} \text{En } (1)\text{:} \quad 2.(-1) - 3.4 = -2 - 12 = -14 \quad \text{verifica} \\ \text{En } (2) \quad 3.(-1) + 4 = -3 + 4 = 1 \quad \text{verifica} \end{cases}$$

Finalmente el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es:

$S = \{(x = -1, y = 4)\}$ Generalmente se abrevia como $S = (-1, 4)$

- **<u>Método de Sustitución</u>**

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituir el valor en la otra ecuación, operar sobre la misma obteniendo la incógnita involucrada y con su valor ya determinado por sustitución encontrar el valor de la primera incógnita despejada.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -14 \qquad (1) \\ 3x + y = 1 \qquad (2) \end{cases}$$

De (1) se despeja "x": $x = \frac{(-14+3y)}{2}$ (3)

Se reemplaza (3) en la ecuación (2):

$$3\left(\frac{-14 + 3y}{2}\right) + y = 1$$

$$3(-14 + 3y) + 2y = 2$$

$$-42 + 9y + 2y = 2$$

$$11y = 2 + 42$$

$$y = \frac{44}{11}$$

$$y = 4 \qquad (4)$$

Se reemplaza (4) en (3) para obtener x:

$$x = \frac{(-14 + 3.4)}{2} = -1$$

$$x = -1$$

Finalmente el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es:

$$S = \{(x = -1, y = 4)\} = (-1,4)$$

- **<u>Método gráfico</u>**

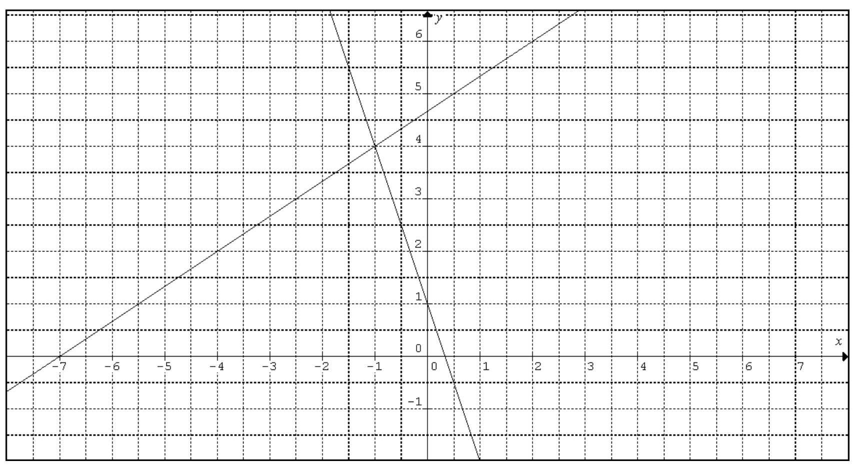
Consiste en representar las rectas, cuyas ecuaciones se determinan a partir de las ecuaciones del sistema, en un mismo sistema de coordenadas cartesianas. El o los puntos de intersección entre las rectas (si hubiera) representa la solución del sistema.

El procedimiento a seguir se detalla a continuación:

1) Se despeja "y" en cada ecuación y se obtienen las respectivas funciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -14 & (1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \\ 3x + y = 1 & (2) \Rightarrow y = -3x + 1 \end{cases}$$

2) Se representan ambas rectas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas:



Se determina gráficamente la solución del sistema que está dada por las coordenadas del punto de intersección: (-1, 4).

Finalmente el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es:

$$S = \{(x = -1, y = 4)\} = (-1,4)$$

- **<u>Método por determinantes</u>**

Para resolverlo es conveniente darle al sistema la forma:

$$\begin{cases} ax + by = r & (1) \\ cx + dy = s & (2) \end{cases}$$

Se aplica la regla de Cramer: el valor de cada incógnita es una fracción cuyo denominador (que tiene que ser distinto de cero) es el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas (determinante del sistema) y cuyo numerador es el determinante que se obtiene sustituyendo, en el determinante del sistema, la columna de los coeficientes de la incógnita que se busca por los términos independientes.

El determinante del sistema (Δ) se calcula: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$

La solución de encuentra como: $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ y $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

Donde $\Delta x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}$ y $\Delta y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}$

Ejemplo:

$\begin{cases} 2x - 3y = -14 & (1) \\ 3x + y = 1 & (2) \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-3).3 = 2 + 9 = 11 \neq 0$

$\Delta x = \begin{vmatrix} -14 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-14).1 - (-3).1 = -14 + 3 = -11 \quad \to x = \frac{-11}{11} = -1$

y $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -14 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-14).3 = 2 + 42 = 44 \quad \to y = \frac{44}{11} = 4$

Finalmente el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es:

$$S = \{(x = -1, y = 4)\} = (-1,4)$$

\- - - - -

A continuación se presenta un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas Compatible Indeterminado, resuelto por el método de sustitución.

Ejemplo:

$\begin{cases} x - 2y = -1 & (1) \\ -2x + 4y = 2 & (2) \end{cases}$

De la ecuación (1) se despeja x: $x = -1 + 2y \quad (3)$

Se reemplaza (3) en la ecuación (2):

$$-2(-1 + 2y) + 4y = 2$$

$$2 - 4y + 4y = 2$$

¡2=2!

Esta igualdad numérica a la que se llega sin poder determinar el valor de y, indica que es válido para cualquier valor de la misma. Se obtienen entonces las infinitas soluciones de este sistema (o sea que es Compatible Indeterminado).

Algunas de esas soluciones son:

Para $y = 1,\ x = -1 + 2.1 = 1 \therefore (x = 1, y = 1)$

Para $y = 0$, $x = -1 + 2.0 = -1$ $\quad\therefore (x = -1, y = 0)$

El conjunto solución de este sistema es:

$$S = \{(x, y)/x, y \in R \wedge x = -1 + 2y\}$$
$$S = \{(1, 1), (-1, 0), \dots\}$$

A continuación se presentará un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas Incompatible, resuelto por el método de igualación.

Sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad (1) \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 2 \quad (2) \end{cases}$$

De (1): $\quad x = \frac{(1+y)}{2} \quad$ (3)

De (2): $\quad x = \frac{[2+\frac{1}{4}y]}{1/2} = 2.\left[2 + \frac{1}{4}y\right]$

$x = 4 + \frac{1}{2}y \quad$ (4)

Igualando los segundos miembros de (3) y (4):

$$\frac{(1+y)}{2} = 4 + \frac{1}{2}y$$
$$1 + \frac{1}{2}y = 4 + \frac{1}{2}y$$
$$\frac{y}{2} - \frac{y}{2} = 4 - 1$$
$$¡\, 0 \neq 3 \,!$$

A este resultado sin sentido se llega cuando el sistema no tiene solución y se concluye que el mismo es incompatible.

$S = \varnothing$ **el sistema es incompatible**

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = r \\ a'x + b'y + c'z = s \\ a''x + b''y + c''z = t \end{cases}$$

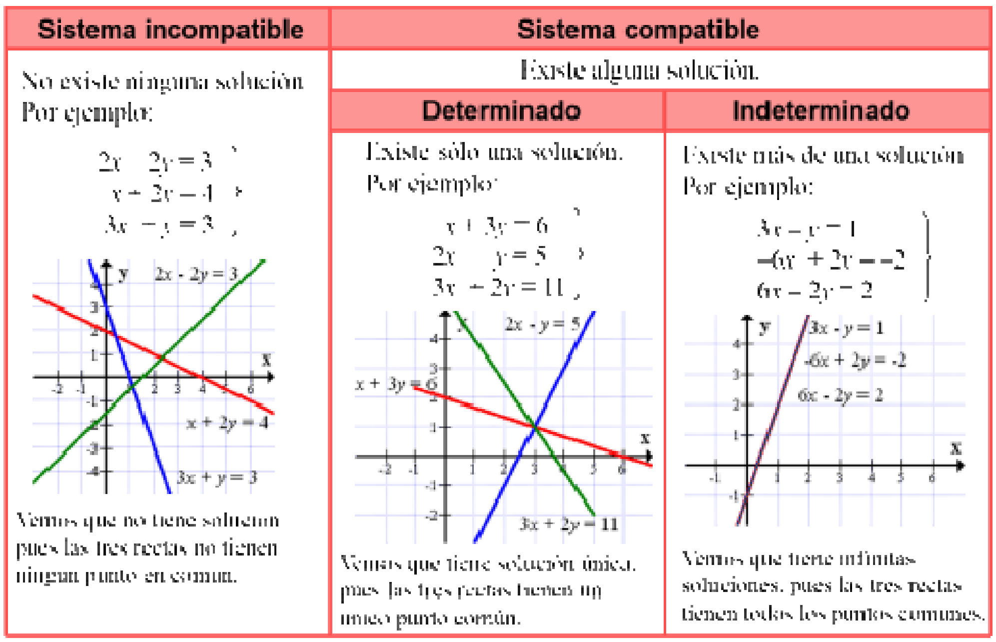
Se recomienda resolver por el método de determinante teniendo en cuenta que ahora el sistema es de 3x3.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x-z=-3 \end{cases} \rightarrow \ \Delta = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| = (1+0+6)-\ (-9+0-4) = 7+13 = 20 \ \rightarrow \Delta = 20$$

$$\Delta x \ = \left| \begin{array}{ccc} 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \end{array} \right| = (9+0-6)-\ (-9+0-16) = 3+7 = 10 \ \rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

De manera similar puede calcular “y” y “z”. Termine de resolverlo para ejercitarse.



<u>Sistemas de ecuaciones mixtas</u>

Un sistema de ecuaciones es mixto cuando no todas sus ecuaciones son lineales. Por ejemplo una es lineal y otra es cuadrática.

Ejemplo:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x^2+b'x=c'y \end{cases}$$

Para resolverlos se sugiere emplear todo lo visto para los métodos de sustitución y/o igualación (además de lo visto en los prácticos de función cuadrática)