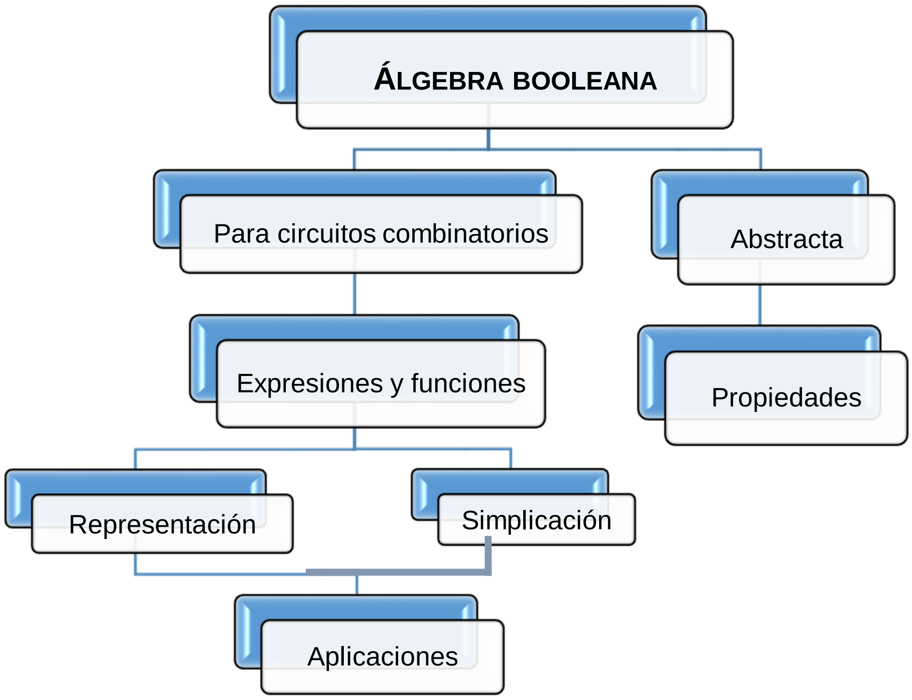
ÁLGEBRA DE BOOLE



Objetivos

- ✓ Reconocer la importancia del álgebra de Boole como unificación de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional.
- ✓ Saber determinar si un conjunto con operaciones internas es o no un álgebra booleana.
- ✓ Conocer el álgebra de Boole de las funciones booleanas.
- ✓ Simplificar funciones booleanas usando teoremas del álgebra de Boole.
- ✓ Simplificar funciones booleanas por medio de mapas de Karnaugh.

Álgebra de Boole

1.- Introducción

En muchas ocasiones la importancia de un acontecimiento histórico no se mide por su difusión, sino por las consecuencias que este trae. Esto es lo que ocurrió en Lógica con el álgebra de Boole. El álgebra booleana fue desarrollada por George Boole en su libro "An Investigation of the Laws of Thought" (Una Investigación de las Leyes del Pensamiento) publicado en 1854 y en donde muestra las herramientas para que las proposiciones lógicas puedan ser manipuladas en forma algebraica.

El logro fundamental de George Boole fue introducir una estructura algebraica –el álgebra de Boole– definida para un conjunto de elementos junto con dos operaciones que satisfacen ciertas propiedades, logrando con esto unificar la teoría de conjuntos y el cálculo proposicional puesto que ambas teorías se rigen por dicha estructura algebraica.

Debido al carácter abstracto de sus principios, el álgebra booleana no tuvo aplicación directa sino hasta 1938, año en el cual la compañía de teléfonos Bell de Estados Unidos la utilizo para realizar un análisis de los circuitos de su red telefónica. En ese mismo año Claude E. Shannon creó la llamada álgebra de conmutación para representar las propiedades de conmutación eléctrica biestables, demostrando con esto que el álgebra booleana se adapta perfectamente al diseño y representación de circuitos lógicos de control basados en relés e interruptores.

Los circuitos lógicos de control tienen una gran importancia, ya que las computadoras, los sistemas telefónicos, los robots y cualquier operación automatizada en una empresa, son algunos de los ejemplos de la aplicación de éstos y del álgebra booleana.

2.- Álgebras Booleanas

La teoría de conjunto y el cálculo proposicional en lógica, satisfacen leyes similares. Estas leyes sirven para definir una estructura matemática abstracta denominada álgebra booleana. Una vez que se demuestra que una estructura concreta es un álgebra de Boole, todos los resultados enunciados para un álgebra de Boole genérica serán válidos en esa estructura particular.

Las álgebras booleanas se pueden definir de distintas maneras, la más común es especificar las propiedades que deben satisfacer las operaciones.

Definición

Un álgebra booleana B, consta de un conjunto S, dos elementos distintos 0 y 1, los operadores binarios + y · en S y un operador unario $\overline{}$ de modo tal que para cualesquiera elementos x, y, z de S se satisfacen las siguientes propiedades.

Leyes asociativas $\begin{cases}(x+y)+z=x+(y+z)\\ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)\end{cases}$

Leyes conmutativas $\begin{cases}x+y=y+x\\ x\cdot y=y\cdot x\end{cases}$

Leyes distributivas $\begin{cases}x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)\\ x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)\end{cases}$

Leyes del elemento neutro $\begin{cases}x+0=x\\ x\cdot 1=x\end{cases}$

Leyes del complemento $\begin{cases}x+\overline{x}=1\\ x\cdot\overline{x}=0\end{cases}$

Si B es un álgebra booleana, se escribe $B=(S,+,\cdot,\overline{},0,1)$

Como en la notación estándar, por lo general se abreviará $a\cdot b$ como ab, como también se supondrá que el operador $\cdot$ se evaluará primero que +. Todo esto permite eliminar algunos paréntesis y escribir de manera menos engorrosas algunas expresiones, por ejemplo se puede escribir $(x\cdot y)+z$ de manera más sencilla como $xy+z$.

Respecto a la definición anterior se debe destacar que 0 y 1 son solo nombres simbólicos y, en general no tienen nada que ver con los números 0 y 1. Esto mismo se aplica a $+\ y\ \cdot$ que solo denotan operadores binarios y, en general, no tienen nada que ver con la suma y el producto ordinario.

Ejemplo 1.

Sea U un conjunto universal y sea S = P(U) el conjunto de las partes de U, si se definen las siguientes operaciones en S:

$X+Y=X\cup Y,\qquad X\cdot Y=X\cap Y,\qquad \overline{X}=X^C$

Entonces $(S,\ \cup,\ \cap,\ \overline{},\ \emptyset,\ U)$ es un álgebra booleana. El conjunto vacío juega el papel de 0 y el conjunto universal el de 1. Si X, Y, Z son elementos de S las propiedades enunciadas en la definición anterior se convierten en las propiedades estudiadas oportunamente en la teoría de conjunto.

Ejemplo 2.

El conjunto de todas las fórmulas proposicionales de n variables (P), los operadores $\wedge\ y\ \vee$, V y F y el operador de negación $\sim$ cumplen con todas las propiedades de un álgebra booleana, es decir que $(P,\ \wedge,\ \vee,\ \sim,\ V,\ F)$ es un álgebra booleana.

Ejemplo 3.

Sea D_{70} = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70 }, los divisores de 70. Las operaciones $+,\ \cdot,\ \overline{}$ que se definen sobre D_{70} de la siguiente manera:

a + b = mcm (a, b)   a b = mcd (a, b), $\overline{a} = \frac{70}{a}$

Entonces D_{70} es un algebra booleana con 1 como elemento cero y 70 como elemento unidad.

2.1.- Propiedades de las Álgebras Booleanas

A partir de la definición de álgebras booleanas se pueden deducir otras propiedades.

Teorema 1.

En un álgebra booleana, el elemento $\overline{x}$ *es único. Específicamente si* $x + y = 1$ y $xy = 0$ (1), *entonces* $y = \overline{x}$

Demostración

$y = y\,1$	Elemento neutro
$= y\,(x + \overline{x})$	Complemento
$= yx + y\overline{x}$	Distributiva
$= xy + y\overline{x}$	Conmutativa
$= 0 + y\overline{x}$	Por (1)
$= x\overline{x} + y\overline{x}$	Complemento
$= \overline{x}\,x + \overline{x}\,y$	Conmutativa
$= \overline{x}\,(x + y)$	Distributiva
$= \overline{x}\;1$	Por (1)
$y = \overline{x}$	Elemento neutro

Teorema 2.

Sea $B = (S, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ *un álgebra booleana, si* x *e* y *son dos elementos cualesquiera de S entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

a) Leyes de acotación $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x\,0 = 0 \end{cases}$

b) Leyes de idempotencia $\begin{cases} x + x = x \\ x\,x = x \end{cases}$

c) Leyes de absorción $\begin{cases} x + x\,y = x \\ x\,(x + y) = x \end{cases}$ $\begin{cases} x + \overline{x}\,y = x + y \\ x\,(\overline{x} + y) = x\,y \end{cases}$

d) Leyes de involución $\overline{(\overline{x})} = x$

e) Leyes de De Morgan para las álgebras booleanas $\begin{cases} \overline{(x + y)} = \overline{x}\;\;\overline{y} \\ \overline{(x\,y)} = \overline{x} + \overline{y} \end{cases}$

f) Leyes del 0 y del 1 $\begin{cases} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{cases}$

Demostración

a$_1$) $x + 1 = (x + 1)\ 1$ Elemento neutro

$x + 1 = (x + 1)\ (x + \overline{x})$ Complemento

$x + 1 = x + 1\ \overline{x}$ Distributiva

$x + 1 = x + \overline{x}\ 1$ Conmutativa

$x + 1 = x + \overline{x}$ Elemento neutro

$x + 1 = 1$ Complemento

a$_2$) $x\ 0 = (x\ 0) + 0$ Elemento neutro

$x\ 0 = x\ 0 + x\ \overline{x}$ Complemento

$x\ 0 = x\ (0 + \overline{x})$ Distributiva

$x\ 0 = x\ (\overline{x} + 0)$ Conmutativa

$x\ 0 = x\ \overline{x}$ Elemento neutro

$x\ 0 = 0$ Complemento

b$_1$) $x = x + 0$ Elemento neutro

$x = x + (x\ \overline{x})$ Complemento

$x = (x + x)(x + \overline{x})$ Distributiva

$x = (x + x)\ 1$ Complemento

$x = x + x$ Elemento neutro

b$_2$) $x = x\ 1$ Elemento neutro

$x = x\ (x + \overline{x})$ Complemento

$x = x\ x + x\ \overline{x}$ Distributiva

$x = x\ x + 0$ Complemento

$x = x\ x$ Elemento neutro

c$_1$) $x + xy = x\ 1 + xy$ Elemento neutro

$x + xy = x\ (1 + y)$ Distributiva

$x + xy = x\ (y + 1)$ Conmutativa

$x + xy = x\ 1$ Acotación

$x + xy = x$ Elemento neutro

c$_2$) De manera similar se puede demostrar $x\ (x + y) = x$

c$_3$) $x + \overline{x}\,y = (x + \overline{x})(x + y)$ Distributiva

$x + \overline{x}\,y = 1\ (x + y)$ Complemento

$x + \overline{x}\,y = (x + y)$ Elemento Neutro

c$_4$) De manera similar se puede demostrar $x\ (\overline{x} + y) = xy$

d) Si el complemento único de $\overline{x}$ es $\overline{\overline{x}}$, por la Ley del complemento debe cumplirse que:

$$\overline{x} + \overline{\overline{x}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \overline{x}\ \overline{\overline{x}} = 0 \qquad (1)$$

Por la misma ley se tiene que:

$$x + \overline{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad x\,\overline{x} = 0$$

$$\overline{x} + x = 1 \qquad \text{y} \qquad \overline{x}\ x = 0 \qquad (2)\ \text{Conmutativa}$$

Comparando (1) y (2) se demuestra que $x = \overline{\overline{x}}$

e$_1$) Para demostrar que $\overline{(x+y)} = \overline{x}\ \overline{y}$, es decir que el complemento de la suma es igual al producto de los complementos de cada término, se puede razonar de la siguiente manera.

Si el complemento de $x+y$ es $\overline{x}\ \overline{y}$, debe cumplirse por la ley del complemento:

i) $(x+y) + (\overline{x}\ \overline{y}) = 1$ y ii) $(x+y)(\overline{x}\ \overline{y}) = 0$

Para demostrar i) se procede de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
(x+y) + (\overline{x}\ \overline{y}) &= ((x+y)+\overline{x})\,((x+y)+\overline{y}) && \text{Distributiva}\\
&= ((y+x)+\overline{x})\,((x+y)+\overline{y}) && \text{Conmutativa}\\
&= (y+(x+\overline{x}))\,(x+(y+\overline{y})) && \text{Asociativa}\\
&= (y+1)\,(x+1) && \text{Complemento}\\
&= \quad 1 \qquad 1 && \text{Acotación}\\
&= 1 && \text{Elemento neutro}
\end{aligned}$$

De manera similar se procede para ii)

$$\begin{aligned}
(x+y)(\overline{x}\ \overline{y}) &= (\overline{x}\ \overline{y})(x+y) && \text{Conmutativa}\\
&= (\overline{x}\ \overline{y})\,x + (\overline{x}\ \overline{y})\,y && \text{Distributiva}\\
&= x\,(\overline{x}\ \overline{y}) + (\overline{x}\ \overline{y})\,y && \text{Conmutativa}\\
&= (x\ \overline{x})\overline{y} + \overline{x}\ (\overline{y}\ y) && \text{Asociativa}\\
&= (x\ \overline{x})\overline{y} + \overline{x}\ (y\,\overline{y}) && \text{Conmutativa}\\
&= 0\,\overline{y} + \overline{x}\ 0 && \text{Complemento}\\
&= \overline{y}\ 0 + \overline{x}\ 0 && \text{Conmutativa}\\
&= 0 + 0 && \text{Acotación}\\
&= 0 && \text{Elemento neutro}
\end{aligned}$$

Por i) y ii) se concluye que $\overline{(x+y)} = \overline{x}\ \overline{y}$

e$_2$) De manera similar se puede demostrar $\overline{(x\,y)} = \overline{x} + \overline{y}$

Nótese que las identidades de un álgebra booleana vienen por pares. Por ejemplo las leyes del elemento neutro: $x + 0 = x$ y $x \cdot 1 = x$, tales pares son *duales*.

<u>Definición</u>

El dual de una afirmación relacionada con expresiones booleanas se obtiene reemplazando 0 por 1, 1 por 0, $+ \, por \, \cdot$ *y* $\cdot \, por \, +$.

Por ejemplo, la expresión dual de $\overline{(x+y)} = \overline{x}\ \overline{y}$ es $\overline{(x\,y)} = \overline{x} + \overline{y}$

En la definición de álgebra booleana cada una de las leyes tiene su respectivo dual. Por lo tanto podemos afirmar lo siguiente.

Teorema 3.

El dual de un teorema relativo a álgebras booleanas también es un teorema.

Demostración

Supóngase que T es un teorema acerca de álgebras booleanas. Entonces existe una demostración D de T que solo implica la definición de un álgebra booleana. Sea D' la serie de afirmaciones obtenidas al reemplazar cada afirmación en D por su dual. Entonces D' es una demostración del dual de T.

Ejemplo

Obsérvese las demostraciones de las leyes de idempotencia.

b_1) $x = x + 0$	b_2) $x = x\,1$
$x = x + (x\,\overline{x})$	$x = x\,(x + \overline{x})$
$x = (x + x)(x + \overline{x})$	$x = x\,x + x\,\overline{x}$
$x = (x + x)\,1$	$x = x\,x + 0$
$x = x + x$	$x = x\,x$

Cada afirmación de b_2) es el dual de la respectiva afirmación de b_1). Se puede considerar indistintamente b_1) o b_2) como la expresión dual.

3.- Álgebras Booleanas para circuitos combinacionales

Casi un siglo después de aparecer la obra de George Boole, varias personas observaron que el álgebra booleana se podía utilizar para el análisis de circuitos eléctricos, particularmente Claude E. Shannon. Así el álgebra booleana se convirtió en una herramienta indispensable para el análisis y el diseño de las computadoras electrónicas en las décadas posteriores.

En una computadora digital solo existen dos posibilidades –que se escriben como 0 y 1– para el objeto mínimo e indivisible. Todos los programas y datos se pueden reducir en última instancia a combinaciones de bits. A través de los años se han utilizado varios dispositivos en las computadoras digitales para almacenar los bits. Los circuitos electrónicos permiten que estos dispositivos de almacenamiento se comuniquen entre sí.

Sea S = { 0, 1 } el conjunto de bits (dígitos binarios), con las operaciones binarias $+ y\ \cdot$, la operación unaria $\overline{\ \ }$ definidas de la siguiente manera:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$\overline{\ \ }$	0	1
	1	0

Entonces $B = (S, +, \cdot, \overline{\ \ }, 0, 1)$ es un álgebra booleana. Obsérvese que la operación $\overline{\ \ }$ simplemente cambia el bit; es decir $\overline{0} = 1\ y\ \overline{1} = 0$.

Las operaciones definidas de esta manera son conocidas como suma booleana, producto booleano y complemento.

Las reglas de precedencia de los operadores son las siguientes: primero se calculan los complementos, seguido los productos booleanos y finalmente las sumas booleanas.

Ejemplo

Evaluar $1\ 0 + \overline{(0+1)}$

$$\begin{aligned} 1\ 0 + \overline{(0+1)} &= 0 + \overline{1} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por ser $B = (S, +, \cdot, \overline{\ \ }, 0, 1)$ un álgebra booleana, se cumplen las propiedades demostradas, anteriormente en el teorema 2.

Otra forma útil para demostrar propiedades del álgebra booleana es utilizando tabla de valores.

Ejemplo

Demostrar que se cumple la siguiente propiedad $x(y+z) = x\,y + x\,z$

La forma más sencilla de demostrar una propiedad, es por tabla de valores.

x	y	z	$y+z$	$x(y+z)$	xy	xz	$xy+xz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3.1.- FUNCIONES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

Sea B = { 0, 1 }. Entonces $B^n = \{(x_1,\ x_2, . . .\ \ x_n) \mid x_i \in B,\ 1 \le i \le n\}$ es el conjunto de todas las posibles n–tuplas de ceros y unos. La variable x se llama *variable booleana* si toma únicamente los valores del conjunto B. Una función $B^n \to B$ se llama *función booleana* de grado n. Las x_i son las variables independientes de la función.

Los valores que toma una función booleana suelen indicarse mediante tablas.

Por ejemplo la función $F(x,y) = x\,\overline{y}$ que va del conjunto de los pares ordenados de valores booleanos al conjunto { 0, 1 } es una función de grado dos, cuyos valores se muestran en la siguiente tabla.

x	y	$\overline{y}$	$F(x,y) = x\,\overline{y}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Una *expresión booleana* es una expresión formada por alguno o todos elementos siguientes: variables booleanas x_i elementos 0 y 1, operadores booleanos.

Por ejemplo: $x\,y + \overline{z}\ 1$ es una expresión booleana. Estas expresiones también reciben el nombre de *polinomios booleanos*.

Dos expresiones booleanas distintas son *equivalentes* si una puede obtenerse de la otra mediante la aplicación de operaciones booleanas. Cuando son equivalentes representan la misma función booleana.

Por ejemplo las expresiones booleanas $x\,y,\ \ x\,y + 0,\ \ x\,y\,1$ son equivalentes.

Cada expresión booleana representa una función booleana. Los valores de esta función se obtienen sustituyendo las variables de la expresión por 0 y 1.

Ejemplo

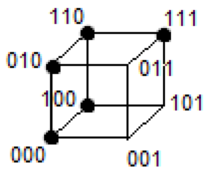
Calcular los valores de la función booleana $F(x,y,z) = x\,y + \overline{z}$

x	y	z	$x\,y$	$\overline{z}$	$F(x,y,z) = x\,y + \overline{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0

0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Las funciones booleanas pueden representarse gráficamente sin más que marcar los vértices del n–cubo que se corresponden con las n–tuplas de bits en las que la función vale 1.

La función booleana $F(x, y, z) = x\,y + \overline{z}$ de $B^3 \rightarrow B$ del ejemplo anterior puede representarse distinguiendo los vértices que se corresponden con las cinco ternas (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) y (1, 1, 1) en las que $F(x, y, z) = x\,y + \overline{z} = 1$.



Dos funciones booleanas F y G de grado n, ó de n variables, se dicen iguales si y solamente si: $F(b_1,\ b_2, . . . b_n) = G(b_1,\ b_2, . . .\ b_n)$ para cualesquiera elementos $b_1,\ b_2, . . .\ b_n$ de B.

Una función booleana F se puede complementar, complementando los valores que toma, es decir que el complemento de la función booleana es la función $\overline{F}$ donde $\overline{F}(x_1,\ x_2, . . . x_n) = \overline{F(x_1,\ x_2, . . .\ x_n)}$.

Sean dos funciones booleanas F y G de grado n, se definen la suma booleana F + G y el producto booleano F G de la siguiente manera:

$(F + G)\ (x_1,\ x_2, . . .\ x_n) = F(x_1,\ x_2, . . .\ x_n) +\ G(x_1,\ x_2, . . .\ x_n)$

$(F\ G)\ (x_1,\ x_2, . . .\ x_n) = F(x_1,\ x_2, . . .\ x_n)\ \ G(x_1,\ x_2, . . .\ x_n)$

Obsérvese que dos funciones booleanas F y G se pueden sumar o multiplicar, sumando o multiplicando sus valores booleanos para los respectivos valores de sus variables independientes.

¿Cuántas funciones booleanas de grado n hay?

Una función booleana de grados dos (dos variables) es una función de un conjunto con cuatro elementos (11, 10, 01, 00) en $B = \{0, 1\}$, un conjunto con dos elementos. Por lo tanto hay 16 funciones booleanas distintas de grado dos. A continuación se muestran los valores de estas funciones booleanas, etiquetas con $F_1, F_2, . . . , F_{16}$.

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

De la regla del producto (Combinatoria) se sigue que hay 2^n $n-tuplas$ distintas de ceros y unos. Puesto que una función booleana asigna el valor 0 ó 1 a cada una de estas $n-tuplas$, la misma regla del producto indica que existen 2^{2^n} funciones booleanas distintas de grado n.

3.2.- Representación de funciones booleanas: Desarrollo en sumas de productos.

Uno de los importantes problemas que se da en el contexto del álgebra booleana es poder encontrar –a partir de los valores de una función booleana– una expresión booleana que represente a dicha función. Este problema puede ser resuelto demostrando que toda función booleana se puede representar mediante una suma booleana de productos booleanos de variables y variables complementadas. La solución de este problema demuestra que toda función booleana puede ser representada utilizando los tres operadores booleanos: $+, \cdot\ y\ \overline{}$.

Se desarrollara, mediante un ejemplo, un importante procedimiento para encontrar una expresión booleana que represente a una función booleana.

Ejemplo

Para cada una de las funciones $F(x,\ y,\ z)\ y\ G(x,\ y,\ z)$ cuyos valores se muestran a continuación, calcular una expresión booleana que la represente.

Para representar F se necesita una expresión que valga 1 cuando x = z = 1 e y = 0 ya que es el único caso en donde la función toma el valor 1. Esa expresión se puede construir mediante el producto booleano de $x,\ \overline{y}\ \ y\ \ z$. Este producto $x\,\overline{y}\,z$, vale 1 si y sólo si $x = \overline{y} = z = 1$, o sea, si $x = z = 1\ \ e\ \ y = 0$.

Para representar G se necesita una expresión que valga 1 cuando x = z = 0 e y = 1 ó bien cuando ocurra que x = y = 1 y z = 0. Esta expresión se puede construir mediante la suma booleana de dos productos booleanos.

El producto booleano $\overline{x}\ y\,\overline{z}$ vale 1 si y sólo si x = z = 0 e y = 1. Análogamente el producto booleano $x\,y\,\overline{z}$ vale 1 si sólo si x = y = 1 y z = 0. La suma booleana de ambas expresiones, $\overline{x}\ y\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$, representa a G puesto que vale 1 si y solo si bien x = z = 0 e y = 1 ó bien x = y = 1 y z = 0.

Finalmente: $F(x,y,z) = x\,\overline{y}\,z,\quad G(x,y,z) =, \overline{x}\ y\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$.

x	y	z	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1

0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Este ejemplo ilustra un procedimiento para construir una expresión booleana que represente una función booleana conocidos los valores de dicha función. Cada combinación de los valores de las variables para los que la función vale 1, da lugar a un producto booleano de las variables y/o de sus complementos.

Definición

Un literal es una variable booleana ó una variable booleana complementada. Un minitérmino en las variables booleanas $x_1,\ x_2, . . .\ \ x_n$ es un producto booleano $y_1,\ y_2,$ $. . .\ y_n$ en donde $y_i = x_i\ \ o\ \ y_i = \overline{x_i}$.

Por lo tanto un minitérmino es un producto de n literales con un literal por cada variable y valdrá 1 para una y sólo una combinación de sus variables. Específicamente el minitérmino $y_1,\ y_2,$ $. . .\ y_n$ es 1 si, y sólo si, cada y_i es 1 y esto ocurre si y sólo si $x_i = 1$ cuando $y_i = x_i\ \ y\ \ x_i = 0$ cuando $y_i = \overline{x_i}$.

Ejemplo

Hallar el minitérmino que vale 1 si $x_1 = x_3 = 0\ \ y\ \ x_2 = x_4 = 1,$ y vale 0 en cualquier otro caso.

El minitémino que vale 1 para esta combinación de valores es $\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}\, x_4$.

Se puede construir una expresión booleana con un conjunto de valores prefijados sin más que realizar una suma booleana de distintos minitérminos. Particularmente, una suma booleana de minitérminos vale 1 cada vez que exactamente uno de los minitérminos de la suma vale 1 y vale 0 para las restantes combinaciones de las variables. En consecuencia, dada una función booleana, se puede construir una suma booleana de minitérminos que valga 1 cuando esta función booleana vale 1 y que valga 0 cuando la función tome el valor 0. A la suma de minitérminos que representa a la función se la llama *desarrollo en suma de productos* o bien *forma normal disyuntiva* de la función booleana.

Ejemplo

Hallar la forma normal disyuntiva de la función booleana $F(x,\ y,\ z) = (x + y)\overline{z}$

Para solucionar este problema, se puede proceder de dos maneras, a saber.

a) Aplicando propiedades de un álgebra booleana

$F(x,\ y,\ z) = (x + y)\overline{z}$

$= x\,\overline{z} + y\,\overline{z}$ Distributiva

$= x\,1\,\overline{z} + 1\,y\,\overline{z}$ Elemento neutro

$= x\,(y + \overline{y}\,)\,\overline{z} + (x + \overline{x}\,)\,y\,\overline{z}$ Complemento

$= x\;y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}$ Distributiva

$= x\;y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}$ Idempotencia

Por lo tanto la forma normal disyuntiva de F, es $F(x, y, z) = x\;y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}$

b) Por tabla de valores. Se calculan los valores de F para todos los posibles valores de las variables booleanas $x,\; y,\; z$.

x	y	z	$x + y$	$\overline{z}$	$(x + y)\,\overline{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Por lo tanto la forma normal disyuntiva de F es la suma booleana de los tres minitérminos correspondientes a las tres filas de la tabla en las que la función vale 1.

Es decir $F(x, y, z) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\;y\,\overline{z}$

También se puede obtener una expresión booleana que represente a una función booleana considerando el producto booleano de sumas booleanas. Al desarrollo resultante se le llama *desarrollo en producto de sumas* o bien *forma normal conjuntiva* de la función.

3.3.- Simplificación de funciones booleanas

Al resolver un problema, en general la función booleana obtenida no necesariamente es la óptima, es decir, la más fácil, sencilla y clara de implementar utilizando, por ejemplo, compuertas lógicas. La expresión que resulta del planteo del problema puede ser simplificada mediante dos formas distintas: haciendo uso de las propiedades del álgebra booleana ó bien mediante diagrama de Karnaugh.

a) Simplificación mediante propiedades

La aplicación de las propiedades es muy sencilla, simplemente se comparan partes de la función booleana con las propiedades que permitan hacer más simple la función. Esto se lleva a cabo hasta que ya no sea posible simplificar.

Ejemplo

Simplificar la siguiente función booleana $F(x,y,z) = \overline{x}\,y + \overline{(x\,y\,z)} + z\,(\,\overline{y} + x)$

$F(x,y,z) = \overline{x}\,y + \overline{(x\,y\,z)} + z\,(\,\overline{y} + x)$	
$F(x,y,z) = \overline{x}\,y + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + z\,(\,\overline{y} + x)$	De Morgan
$F(x,y,z) = \overline{x}\,y + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + z\;\overline{y} + z\,x$	Distributiva
$F(x,y,z) = \overline{x}\,y + \overline{x} + \overline{y} + z\;\overline{y} + \overline{z} + z\,x$	Conmutativa
$F(x,y,z) = \overline{x}\;(y + 1) + \overline{y}(1 + z\,) + \overline{z} + z\,x$	Distributiva
$F(x,y,z) = \overline{x}\;1 + \overline{y}\;1 + \overline{z} + z\,x$	Acotación
$F(x,y,z) = \overline{x}\;+ \overline{y}\;+ \overline{z} + z\,x$	Elemento neutro
$F(x,y,z) = \overline{x}\;+ \overline{y}\;+ \overline{z} + x$	Absorción
$F(x,y,z) = (x\;+ \overline{x}\;)\;+ \overline{y}\;+ \overline{z}$	Conmutativa / Asociativa
$F(x,y,z) = 1\;+ \overline{y}\;+ \overline{z}$	Complemento
$F(x,y,z) = (1\;+ \overline{y}\;)\;+ \overline{z}$	Asociativa
$F(x,y,z) = 1\;+ \overline{z}$	Acotación
$F(x,y,z) = (\,1\;+ \overline{z}\,)$	Asociativa
$F(x,y,z) = 1$	Acotación

La expresión booleana en su forma más sencilla es F = 1 y este resultado indica que si se sustituyen las diferentes combinaciones con los valores binarios 0 o 1 de las variables x, y, z en la función inicial, entonces el resultado será siempre igual a 1.

En general luego de un proceso de simplificación el resultado no siempre es 1, en cambio lo que se espera es obtener una expresión más simple conformada por menos variables.

Ejemplo 2

Simplificar la siguiente función booleana $F(x,y,z,w) = x\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + \overline{x}\;\overline{z}\;w$

$F(x,y,z,w) = x\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + \overline{x}\;\overline{z}\;w$	
$F(x,y,z,w) = x\,\overline{z} + \overline{x}\;\overline{z}\;w + x\,\overline{y}\,z$	Conmutativa
$F(x,y,z,w) = \overline{z}\;(x\;+ \overline{x}\;\;w) + x\,\overline{y}\,z$	Distributiva
$F(x,y,z,w) = \overline{z}\;(x +\;\;w) + x\,\overline{y}\,z$	Absorción
$F(x,y,z,w) = \overline{z}\;x + \overline{z}\;\;w + x\,\overline{y}\,z$	Distributiva
$F(x,y,z,w) = \overline{z}\;x + x\,\overline{y}\,z\;\;+ \overline{z}\;\;w$	Conmutativa
$F(x,y,z,w) = x\;(\,\overline{z}\;\;+\;\;\overline{y}\,z)\;\;+ \overline{z}\;\;w$	Distributiva
$F(x,y,z,w) = x\;(\,\overline{z}\;\;+ z\,\overline{y}\,)\;\;+ \overline{z}\;\;w$	Conmutativa

$F(x, y, z, w) = x\,(\overline{z} + \overline{y}) + \overline{z}\ w$ Absorción

$F(x, y, z, w) = x\,\overline{z} + x\,\overline{y} + \overline{z}\ w$ Distributiva

En los ejemplos anteriores se aplicó una propiedad a la vez, esto se hizo para que no haya confusión en la aplicación de las mismas. Obviamente, cuando ya se tiene suficiente práctica, se pueden aplicar varias propiedades simultáneamente. Tampoco es necesario indicar que propiedad se usa, sin embargo se hizo para ilustrar la simplificación.

b) Simplificación mediante diagrama de Karnaugh

Para reducir el número de términos de una función booleana que representa a un circuito combinacional[1] hace falta encontrar términos que se puedan combinar entre sí. El método gráfico llamado *diagrama de Karnaugh o K–diagrama* sirve para hallar términos que se puedan combinar en el caso de funciones booleanas que dependen de relativamente pocas variables –sirven para simplificar funciones de hasta seis variables, aunque se vuelven bastante complicados para casos de cinco o seis variables.

Los K–diagramas proporcionan un método visual para simplificar una forma normal disyuntiva. Se verá primero como se usan estos diagramas para simplificar expresiones de funciones booleanas de dos variables, se continuará mostrando cómo se pueden utilizar para minimizar funciones de tres variables y finalmente para cuatro.

En la forma normal disyuntiva de una función de dos variables, x, y hay cuatro posibles minitérminos.

Un K–diagrama para una función booleana de dos variables consta de cuatro celdas.

	y	$\overline{y}$
x	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{x}$	$\overline{x}\ y$	$\overline{x}\ \overline{y}$

En general el número de celdas depende de la cantidad de variables que intervengan en la función booleana y se puede calcular aplicando la fórmula $N°\ casilla = 2^{N°\ de\ variable}$

Se coloca un 1 en la celda que representa a un minitérmino si este minitérmino aparece en el desarrollo de la función. Caso contrario se coloca un 0. Se dice que dos celdas son *adyacentes* si los minitérminos que representan difieren exactamente en un literal. Por ejemplo la celda que representa a $\overline{x}\ y$ es adyacente a la celda que representa a $x\,y$ y también a la que representa a $\overline{x\,y}$.

Ejemplo 1

[1] Los elementos básicos de los circuitos se llaman puertas lógicas. Cada tipo de puerta implementa una operación booleana.

Simplificar las siguientes funciones

$F(x,y) = x\,y + \overline{x}\,y,\;\; G(x,y) = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y,\;\; H(x,y) = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y + \overline{x}\;\overline{y}$

Primero se hacen las K–diagramas y luego se colocan los 1 en donde correspondan.

	y	$\overline{y}$
x	1	
$\overline{x}$	1	

F

	y	$\overline{y}$
x		1
$\overline{x}$	1	

G

	y	$\overline{y}$
x		1
$\overline{x}$	1	1

H

Se rodean con un círculo los bloques de las celdas del K–diagrama que representan minitérminos que se pueden combinar y luego se calcula la correspondiente suma de productos.

Se agrupan los 1 en celdas adyacentes en bloques cuadrados o rectangulares 2, 4, 8, 16, . . . 2^n y se descartan las variables cuyo valor cambia de una celda a otra. La regla es agrupar la información con el menor número de bloques ya que de cada uno se obtiene cuando menos un literal y los bloques deben estar conformados por el mayor número de celdas porque entre más grande sea el número de celdas agrupadas por bloque más simple será la función booleana resultante.

	y	$\overline{y}$
x	1	0
$\overline{x}$	1	0

F

	y	$\overline{y}$
x	0	1
$\overline{x}$	1	0

G

	y	$\overline{y}$
x	0	1
$\overline{x}$	1	1

H

Obsérvese que los 1 pueden ser compartidos por distintos bloques, la regla es que un bloque debe tener al menos un 1 que sea exclusivamente de él. Además, si hay 1 en las cuatro celdas se pueden combinarse los cuatro minitérminos para dar lugar a uno solo que será la expresión booleana 1 que no depende de ninguna de las variables.

Para la función F la variable que cambia de valor es x, mientras que la variable y mantiene su valor. Por lo tanto se descarta x y se obtiene $F(x,y) = y$.

Para la función G no se puede descartar ninguna de las variables puesto que son bloques con un solo 1. En consecuencia se obtiene $G(x,y) = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$.

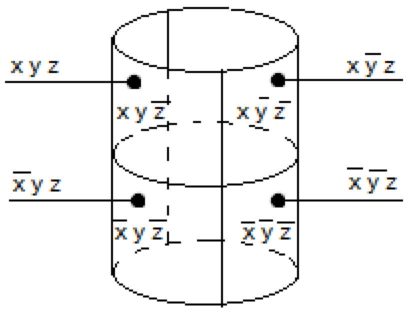
Finalmente para la función H, por el bloque vertical se descarta la variable x obteniéndose $\overline{y}$, mientras que por el bloque horizontal se descarta la variable y obteniéndose $\overline{x}$, consecuentemente la función simplificada

será: $H(x,y) = \overline{x} + \overline{y}$.

Un K–diagrama de tres variables es un rectángulo dividido en ocho celdas y puede verse como si estuviese dibujado sobre un cilindro. Dos celdas tienen un lado en común sobre el cilindro si y sólo si, son adyacentes. En general si en un K–diagrama se unen los dos extremos ya sean horizontal o verticalmente, entonces las celdas de las esquinas del mismo quedaran juntas y por lo tanto se las considerarán como celdas adyacentes. Esto permite realizar una mejor simplificación.

Obsérvese que la secuencia en que se coloca la expresión de las variables en el diagrama no es la binaria ascendente, sino una forma que solamente exista un cambio a la vez, es decir, una forma en la que no debe cambiar una variable en cada paso. A esta forma de arreglar las variables se la llama código reflejado.

	$y\,z$	$y\,\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}\,z$
x	$x\,y\,z$	$x\,y\,\overline{z}$	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$	$x\,\overline{y}\,z$
$\overline{x}$	$\overline{x}\,y\,z$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$



En general, cuando el número de variables que integran la función booleana es impar, el número de filas del diagrama es menor que el número de columnas. También es conveniente ordenar las variables alfabéticamente colocando las primeras variables como filas y las restantes como columnas.

Ejemplo

Simplificar la siguiente función booleana:

$$F(x,y,z) = x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

	$y\,z$	$y\,\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}\,z$
x	1	1	1	1
$\overline{x}$	1		1	1

Por el bloque cuadrado se eliminan las variables z y x obteniéndose $\overline{y}$, por el bloque rectangular se eliminan las variables z e y obteniéndose x. Finalmente por el bloque conformado por las dos columnas de los extremos se eliminan las variables x e y, obteniéndose z. Por lo tanto $F(x,y,z) = x + \overline{y} + z$.

Un K–diagrama de cuatro variables es un cuadrado dividido en 16 celdas.

Ejemplo

Simplificar la siguiente expresión booleana.

$F(w,x,y,z) = wxy\overline{z} + wx\overline{yz} + w\overline{x}yz + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{yz} + \overline{w}xyz + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

	$y\,z$	$y\,\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}\,z$
$w\,x$		1	1	
$w\,\overline{x}$	1	1	1	
$\overline{w}\,\overline{x}$		1	1	
$\overline{w}\,x$	1	1	1	1

Del bloque que contiene ocho 1 se elimina, en primer lugar las variables w y x, luego se elimina la variable y, por lo tanto se obtiene $\overline{z}$. Del bloque de cuatro 1 se eliminan tanto la variable y como la z, obteniéndose $\overline{w}\ x$. Finalmente del bloque que contiene dos 1 se elimina solamente la variable z, obteniéndose $w\,\overline{x}\ y$. Por lo tanto la función simplificada es $F(w,x,y,z) = \overline{z} + \overline{w}\ x + w\,\overline{x}\,y$

Si en la expresión original de la función booleana algunos de los minitérminos no tiene todas las variables intervinientes, este minitérmino equivale a las variables que se dan originalmente juntamente con todas las posibles combinaciones de las variables faltantes.

Ejemplo

Para simplificar la función $F(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{x}\ \overline{y}\ z + \overline{w}\,\overline{x}\ y + y\,z + w\,\overline{x}\,y\,z + w\,\overline{x}\ y\,\overline{z}$ se debe tener en cuenta que $\overline{w}\,\overline{x}\ y = \overline{w}\,\overline{x}\ y\,z + \overline{w}\,\overline{x}\ y\,\overline{z}$, es decir que no se trabaja con el minitérmino incompleto, sino con su equivalente. Lo mismo para el minitérmino $y\,z = w\,x\,y\,z + w\,\overline{x}\,y\,z + \overline{w}\,x\,y\,z + \overline{w}\,\overline{x}\,y\,z$.

Simplificar $F(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{x}\ \overline{y}\ z + \overline{w}\,\overline{x}\ y + y\,z + w\,\overline{x}\,y\,z + w\,\overline{x}\ y\,\overline{z}$ y obtener la expresión en suma de productos y productos de sumas.

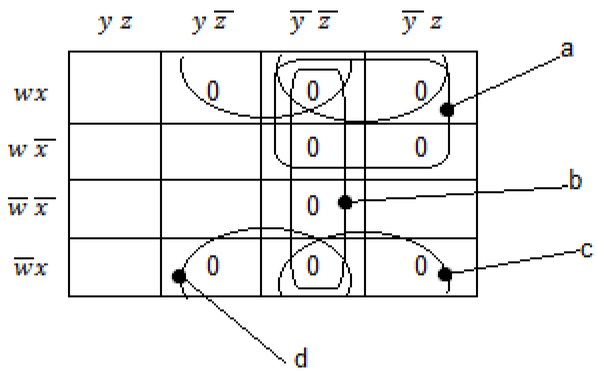
Usando la información tanto de los minitérminos que se completaron, como los inicialmente completos, se obtiene el siguiente K–diagrama.

	$y\,z$	$y\,\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}\,z$
wx	1			
$w\,\overline{x}$	1	1		
$\overline{w}\,\overline{x}$	1	1		1
$\overline{w}x$	1			

Obsérvese que existen minitérminos repetidos ($\overline{w}\,\overline{x}\,y\,z$; $w\,\overline{x}\,y\,z$); obviamente se los considera una sola vez.

Haciendo las simplificaciones según los bloques propuestos, se obtiene la función simplificada en suma de productos $F(w,x,y,z) = \overline{x}\,y + y\,z + \overline{w}\,\overline{x}\,z$. Obsérvese que el primer término corresponde al bloque cuadrado, el segundo término al bloque rectangular y el último termino al bloque de dos 1 de las casillas de las columnas de los extremos.

En el caso de *producto de sumas* se utiliza el mismo K–diagrama, pero en las celdas vacías se colocan se colocan ceros y se agrupa la información de manera semejante a cuando se tienen unos, como se muestra a continuación.



Para evitar confusiones a los distintos bloques propuestos se le asignaron letras. Así, del bloque "a" se obtiene $w\,\overline{y}$, del bloque "b" $\overline{y}\,\overline{z}$, del bloque "c" $x\,\overline{y}$ y por último del bloque "d" se obtiene $x\,\overline{z}$. Se obtiene la siguiente expresión complementada debido a que se usaron las celdas de ceros no las de unos.

$$\overline{F}(w,x,y,z) = w\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y} + x\,\overline{z}$$

Complementando ambos miembros de la función booleana resulta

$$\overline{\overline{F}}(w,x,y,z) = (\overline{w\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y} + x\,\overline{z}})$$

Aplicando la ley de De Morgan se tiene

$F(w,x,y,z) = \overline{(w\,\overline{y})}\,\overline{(\overline{y}\,\overline{z})}\,\overline{(x\,\overline{y})}\,\overline{(x\,\overline{z})}$ Aplicando nuevamente la ley de De Morgan

$$F(w,x,y,z) = (\overline{w} + y)(y + z)(\overline{x} + y)(\overline{x} + z)$$

Esta es la expresión boleana simplificada en productos de sumas, de la función dada.

Obsérvese que no es igual la función booleana simplificada en sumas de productos que la que se obtuvo en productos de sumas, sin embargo se puede decir que son lógicamente equivalentes. Esto se puede demostrar usando propiedades del álgebra booleana o bien elaborando las tablas de valores correspondientes.

$$F(w,x,y,z) = \overline{w}\,y + y\,z + \overline{w}\,\overline{x}\,z$$

$$F(w,x,y,z) = (\overline{w} + y)(y + z)(\overline{x} + y)(\overline{x} + z)$$

Emplear los K–diagramas para simplificar funciones booleanas de cinco o seis variables puede ser una opción realista, pero los K–diagramas con un número mayor de variables se complican mucho, por lo que se emplean en raras ocasiones.

4.-Aplicaciones del Álgebra Booleana

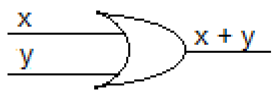
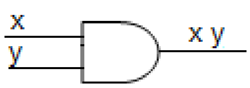
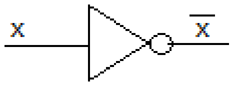
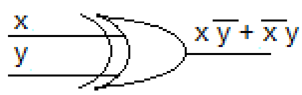
Los circuitos de las computadoras, así como otros componentes electrónicos, reciben datos de entrada cada uno de los cuales es un 0 ó un 1 y producen también como salida ceros y unos. Los circuitos pueden construirse utilizando cualquier elemento básico que posea dos estados diferentes. Entre esos elementos se encuentran los interruptores que pueden estar en posición *on* o en *off* y los dispositivos ópticos que pueden estar encendidos o apagados.

4.1.- Compuertas lógicas

Un bloque lógico es una representación simbólica gráfica de una o más variables de entrada a un operador lógico para obtener una señal determinada o resultado. Los símbolos varían de acuerdo con la rama donde se utiliza o bien del fabricante. Cada bloque lógico representa un dispositivo que permite manipular la señal según el campo de acción, en mecánica se los llama válvulas (paso del aire o aceite), en electricidad apagadores, contactos (paso de corriente eléctrica) y en electrónica puertas o compuertas (paso de pulsos eléctricos).

Se trataran los símbolos usados en electrónica para la representación de las compuertas, ya que son los que interesan al área de computación, sin embargo el tratamiento teórico por medio del álgebra booleana es válido para todos ellos independientemente del área.

Compuertas básicas

Compuerta	Símbolo
O (Or)	
Y (And)	
No (Not)	
Or–exclusivo (Xor)	

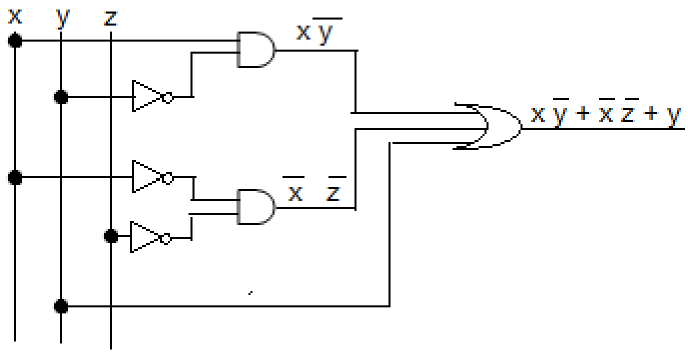
Las compuertas pueden recibir una ó más señales de entrada. $x\ e\ y$ son señales que entran a la compuerta y pueden tener un valor de 1 ó 0 dependiendo de si existe ó no la señal, la cual procede de un sensor ó bien de la salida de una compuerta anterior. Esos valores de entrada generan una sola salida, que a su vez también es 0 ó 1 dependiendo de la compuerta que se trate y de los valores de las señales de entrada.

Para representar funciones booleanas mediante compuertas lógicas es conveniente tener en cuenta las tablas de verdad de los operadores lógicos (∨, ∧, ∼) vistas en lógica proposicional.

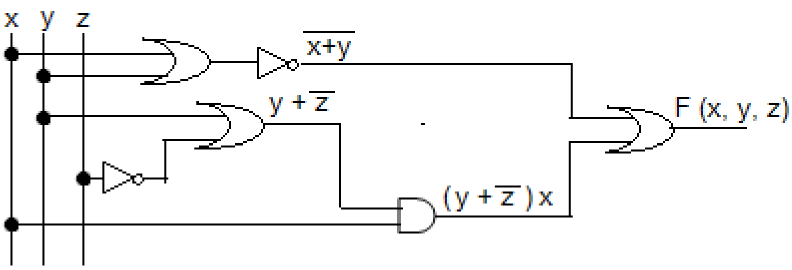
Ejemplo

Representar las siguientes funciones booleanas usando puertas lógicas básicas.

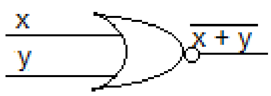
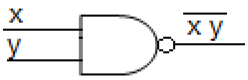
a) $F(x, y, z) = x\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z} + y$



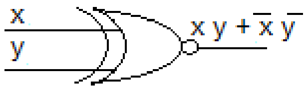
b) $F(x, y, z) = \overline{(x + y)} + (y + \overline{z})\,x$



También existen compuertas lógicas compuestas como Nand que es la combinación de los operadores Not y And; o la compuerta Nor que es la combinación de los operadores Not y Or.

Compuerta	Símbolo
Nor	
Nand	

Xnor



Generalmente los circuitos digitales se construyen con compuertas Nand y Nor ya que son más fáciles de encontrar en el mercado, son más comunes desde el punto de vista del hardware y están disponibles en la forma de circuitos integrados.

4.2.- Electrónica digital

En el apartado anterior se vio que los dispositivos con los que se implementan las funciones booleanas son las compuertas lógicas, estas al combinarse han permitido, inicialmente, la creación de la válvula electrónica (tubo de vacío o bulbo), posteriormente la del “transistor” y actualmente la del “chip”, elementos con los cuales se construye todo tipo de aparato electrónico digital.

La electrónica digital es una parte de la electrónica que maneja información codificada en dos estados: falso y verdadero o más comúnmente 0 y 1. Electrónicamente se asigna a cada uno un voltaje o rango de voltaje determinado. Esta particularidad permite que, usando el álgebra booleana y con un sistema de numeración binario, se puedan realizar complejas operaciones lógicas o aritméticas sobre señales de entrada. La electrónica digital ha alcanzado una gran importancia debido a que constituye la piedra angular de las computadoras.

Las computadoras realizan el trabajo por medio de un microprocesador, el cual es un circuito de alta escala de integración compuesto por muchos circuitos simples como flip–flops, contadores, decodificadores, comparadores, etc., todos en una misma pastilla de silicio en donde se utilizan compuertas del álgebra booleana para llevar a cabo las operaciones lógicas.

Las microoperaciones que lleva a cabo el microprocesador se realiza en lenguaje binario a nivel bit. Por ejemplo, si x = 110010, y = 011011 se pueden llevar a cabo las siguientes operaciones:

$x \wedge y = 110010 \wedge 011011 = 010010$

$x \vee y = 110010 \vee 011011 = 111011$

$\overline{x} = \overline{(110010)} = 001101$

Basada en el álgebra booleana, la unidad lógica aritmética (ALU: Arithmetic Logic Unit) es la parte del microprocesador que realiza las operaciones aritméticas y lógicas en los datos.

Como se puede ver, la computadora está integrada por elementos que utilizan el álgebra booleana para su desarrollo y funcionamiento. Sin embargo, no es para lo único que se utiliza el álgebra booleana, ya que otra de sus aplicaciones que actualmente está teniendo mucho éxito es la relacionada con la construcción de robots.